МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

_Особенности численного расчёта показателей Ляпунова хаотических аттракторов потоковых динамических систем

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента__4__ курса __4041__группы
направления (специальности) 09.03.02 «Информационные системы и технологии»

код и наименование направления (специальности)

_________________________института физики_____________________________

наименование факультета, института, колледжа

____________Лопатникова Никиты Сергеевича___________________________

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
доцент кафедры ФОС, к.ф.-м.н. __________________ Д.В. Савин
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
физики открытых систем,
д.ф.-м.н., профессор __________________ А.А. Короновский
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2025

Введение

В последние десятилетия теория хаоса и нелинейных динамических систем стала неотъемлемой частью исследований в физике, инженерии, биологии и экономике [1]. В частности, такие системы находят свое применение в задачах обработки и передачи информации [2 - 4], крипотграфии [5] и т.п. Хаотические аттракторы, демонстрирующие экспоненциальную чувствительность к начальным условиям, требуют специальных методов анализа для количественной оценки их устойчивости. Показатели Ляпунова (они же ляпуновские показатели, ЛП), характеризующие среднюю скорость расхождения близлежащих траекторий в фазовом пространстве, служат ключевым инструментом для определения степени хаотичности системы. Однако их расчёт для потоковых систем (непрерывных по времени) сопряжён с рядом вычислительных сложностей, включая необходимость решения уравнений в вариациях и контроля численной устойчивости алгоритмов [6].

В математической физике спектр показателей Ляпунова помогает определить, как система реагирует на малые возмущения. Если система возвращается к равновесному состоянию после небольшого отклонения, это указывает на устойчивость. Так, например, в сложных механических системах ЛП помогает анализировать устойчивость каждого из компонентов [7], а в экономике применяется для анализа устойчивости экономических моделей [8].

Целью данной работы является исследование особенностей вычисления спектра ляпуновских показателей для нелинейных динамических систем с акцентом на влияние алгоритмических решений и параметров расчётной схемы на достоверность получаемых результатов, а также анализ зависимости значений показателей от типов систем и их функциональных режимов.

В рамках достижения этой цели были сформулированы следующие задачи: разработка программного обеспечения для расчёта полного спектра ЛП, сравнительный анализ двух методологических подходов — интегрирования уравнений в вариациях с использованием якобиана системы и анализа эволюции расстояний между траекториями идентичных копий системы с близкими начальными условиями; экспериментальное исследование поведения спектра ЛП для модельных систем различной природы — автономной системы Рёсслера и неавтономной системы Уэды (при варьировании параметров внешнего гармонического воздействия); изучение влияния ключевых параметров вычислительной процедуры — шага интегрирования, длительности временного интервала, частоты ортогонализации — на устойчивость сходимости и точность получаемых оценок показателей.

Хаотические аттракторы в потоковых системах описываются системами нелинейных дифференциальных уравнений, где аналитическое вычисление показателей Ляпунова невозможно. Это требует специализированных численных методов, учитывающих:

1. Интеграцию основных уравнений и вариационных уравнений для матрицы возмущений.
2. Периодическую ортогонализацию и перенормировку векторов возмущений для предотвращения вырождения.
3. Учёт особенностей автономных (не зависящих явно от времени) и неавтономных систем, где динамика управляется внешними воздействиями.

В рамках реализации вычислительных алгоритмов и последующего анализа результатов в работе применялись современные инструменты программирования на языке Python, включая библиотеки SciPy для численного интегрирования дифференциальных уравнений и оптимизации вычислений, NumPy для работы с многомерными массивами и выполнения математических операций, а также Matplotlib для визуализации полученных данных [9].

1. Теоретические сведения

Показатель Ляпунова — численная характеристика динамических систем, описывающая скорость экспоненциального расхождения или схождения близких траекторий в фазовом пространстве. Положительное значение указывает на хаос, нулевое — на нейтральную устойчивость (например, периодические колебания), отрицательное — на сходимость траекторий к устойчивому состоянию [6].

Для расчёта старшего ляпуновского показателя использовался метод Бенеттина , основанный на формуле:

$$\lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=1}^{N} ln \frac{||\delta x_i||}{||\delta x_{i-1}||} \tag{1}$$

где N — количество шагов интегрирования, Δt — временной интервал между шагами, ‖δxi‖ — нормы векторов возмущений на i -м и (i−1) -м шагах [7].

Основные этапы метода Бенеттина:

1. Инициализация ортонормированного базиса — задание n линейно независимых векторов возмущений для системы размерности n .
2. Эволюция и ортогонализация — интегрирование векторов возмущений вместе с системой с периодической ортогонализацией Грама-Шмидта для предотвращения их коллапса в направлении максимального роста.
3. Накопление логарифмов норм — суммирование значений $ln||\delta x_i||$ за N шагов. Усреднение — вычисление итоговых показателей по формуле: $$\lambda_i = \frac{1}{N \cdot \Delta T} \sum_{k=1}^{N} \ln||v_i^{(k)}||. \tag{4}$$
4. Полный спектр показателей Ляпунова λ1≥λ2≥⋯≥λn характеризует поведение системы во всех направлениях фазового пространства. Метод позволяет анализировать устойчивость и выявлять хаотическое поведение в автономных и неавтономных системах.

2. Численное моделирование

2.1 Описание программы

Программа для расчёта спектра ляпуновских показателей реализована на Python с использованием библиотек NumPy, SciPy и Matplotlib.

Алгоритм включает два подхода: метод возмущённых траекторий (ВТ) и метод уравнений в вариациях (УВ).

Метод ВТ начинается с инициализации функции системы уравнений, начальных условий, шага интегрирования, количества шагов и начального отклонения. Для расчёта полного спектра используются векторы возмущений, равные размерности фазового пространства, вычисляемые как разность между основной и возмущённой траекториями. Предварительный «разогрев» основной траектории устраняет влияние начальных условий. Далее выполняются итеративное интегрирование, ортонормализация матрицы возмущений методом Грама-Шмидта и накопление логарифмов норм векторов, которые затем усредняются для формирования спектра ЛП.

Метод УВ, в отличие от ВТ, основан на решении вариационных уравнений с явным заданием якобиана системы, зависящего от производных правых частей уравнений. На этапе инициализации определяются функции для правых частей системы и её якобиана, например, для осциллятора Уэды матричная функция якобиана задаётся через производные по фазовым переменным. После «разогрева» основной траектории система расширяется матрицей возмущений, которая обновляется через произведение якобиана на временной интервал. Периодическая ортонормализация предотвращает коллинеарность векторов, а спектр формируется делением суммы логарифмов норм на общее время моделирования. Оба метода сравнивают устойчивость и точность расчётов, где ВТ менее чувствителен к шагу интегрирования, а УВ обеспечивает высокую точность нулевого показателя при строгом контроле параметров.

2.2 Результаты численного моделирования

Для тестирования алгоритмов использовались модельные системы: неавтономная система Уэды (описывающая хаотические колебания под внешним воздействием) и автономная система Рёсслера (демонстрирующая хаос в химических реакциях). Исследование проводилось на 4 наборах параметров для каждой системы, охватывающих периодические и хаотические режимы.

Сравнение методов ВТ и УВ:

Влияние шага интегрирования (Δt):

Метод ВТ показал стабильность показателей Ляпунова при всех значениях Δt,

Метод УВ при малых шагах демонстрировал аномалии: Λ_1 возрастал, а Λ_3 отклонялся от ожидаемых значений, что указывает на численную нестабильность.

Зависимость от количества циклов интегрирования (N):

Оба метода сходились к нулевому показателю Λ_1 при увеличении N,

УВ приближал Λ_1 к нулю уже при 20 000 циклов, тогда как ВТ требовал 60 000 циклов для аналогичной точности.

Чувствительность к времени перенормировки ($T_{он}$):

Метод ВТ демонстрировал ослабление Λ_3 при увеличении $T_{он}$, что связано с накоплением ошибок,

УВ сохранял стабильность всех показателей, подтверждая устойчивость к редкой коррекции возмущений.

Влияние начального возмущения (ε_0):

Для метода ВТ анализ всех исследованных значений начального возмущения (ε_0 = 0.001–0.01) показал стабильность спектра ляпуновских показателей, что подтверждает его устойчивость к вариациям начальных условий, Для метода УВ параметр начального возмущения $\varepsilon 0$ не применим, так как возмущения вводятся через якобиан системы и считаются бесконечно малыми.

Ключевые выводы:

Метод ВТ устойчив к вариациям численных параметров, но требует частой перенормировки для минимизации ошибок.

Метод УВ обеспечивает высокую точность нулевого показателя, но склонен к артефактам при экстремальных значениях шага интегрирования.

Оба метода показали сходимость ЛП при увеличении количества циклов, подтверждая их применимость для анализа хаотических и периодических режимов.

Заключение

В ходе выполнения работы была разработана программа для расчёта спектра ляпуновских показателей (ЛП) с использованием двух методов: уравнений в вариациях (УВ) и анализа возмущённых траекторий (ВТ). Алгоритм реализован в соответствии с методом Бенеттина, включая этапы ортогонализации и перенормировки векторов возмущений. Ключевые фрагменты кода соответствуют шагам интегрирования систем, вычислению вариационных уравнений и обработке данных для получения показателей.

Проведены расчёты для двух типов систем: неавтономной (осциллятор Уэды) и автономной (аттрактор Рёсслера) в различных режимах (периодический и хаотический). Для системы Уэды метод ВТ продемонстрировал высокую устойчивость к изменению шага интегрирования, В отличие от него, метод УВ проявил аномалии при малых шагах: Λ_1 возрастал, а Λ_3 резко снижался, что указывает на критическую зависимость метода от параметров интегрирования. Для системы Рёсслера оба метода показали близкие результаты в периодическом режиме ($\Lambda_1 \approx 0$), однако при хаотическом режиме метод УВ давал ложные положительные значения при малых шагах, тогда как ВТ сохранял стабильность.

Сравнение методов выявило их специфические особенности. Метод УВ точнее приближает нулевой показатель при большом количестве циклов интегрирования, но требует строгого контроля шага интегрирования. Метод ВТ, напротив, менее чувствителен к шагу, но критически зависит от частоты перенормировки: увеличение интервала перенормировки приводило к отклонению. Для автономной системы Рёсслера метод ВТ показал полную независимость от величины начального возмущения, тогда как в неавтономной системе Уэды минимальное возмущение обеспечивало наиболее точные результаты.

Результаты подтвердили, что метод ВТ более устойчив к вариациям численных параметров, но требует частой перенормировки для минимизации накопления ошибок. Метод УВ, несмотря на высокую точность в определении нулевого показателя, склонен к артефактам при экстремальных значениях шага интегрирования. Оба метода показали сходимость ЛП при увеличении количества циклов.

Список литературы

1. Kapitaniak T. Chaos for Engineers: Theory, Applications, and Control / T. Kapitaniak. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. – 144 p.
2. Lau F.C.M. Chaos-Based Digital Communication Systems: Operating Principles, Analysis Methods, and Performance Evaluation / F.C.M. Lau, C.K. Tse. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. – 228 p.
3. Дмитриев А.С. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи / А.С. Дмитриев, А.И. Панас. – М.: Физматлит, 2002. – 252 с.
4. Короновский А.А. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, № 12. – С. 1281–1310.
5. **Chaos-Based Cryptography: Theory, Algorithms and Applications** / ed. by Ljupco Kocarev, Shiguo Lian. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. – 398 p.
6. Кузнецов С.П. Динамический хаос / С.П. Кузнецов. – М.: Физматлит, 2001. – 295 с.
7. **Strogatz S.H.** Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering / S.H. Strogatz. – 3rd ed. – New York: Chapman and Hall/CRC, 2024. – 616 p.
8. Gintis H. The Bounds of Reason: Game Theory and the Unification of the Behavioral Sciences / H. Gintis. – Revised edition. – Princeton: Princeton University Press, 2014. – 264 p.
9. Бейдер Д. Чистый Python. Тонкости программирования для профи / Д. Бейдер. – СПб.: Питер, 2018. – 288 с.