

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и автоматического управления

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
ОПТИМИЗАЦИИ В ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 271 группы

направления 09.04.01 — Информатика и вычислительная техника

факультета КНиИТ

Тимофеевой Надежды Евгеньевны

Научный руководитель

к.ф.-м. н., доцент

И.Е. Тананко

Заведующий кафедры

к.ф.-м. н., доцент

И.Е. Тананко

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Высокопроизводительные вычислительные системы представляют собой сложные системы аппаратно-программных средств, образующих кластеры или суперкомпьютеры. Особенностью таких систем является возможность параллельной обработки больших объемов информации, проведения вычислительных экспериментов с моделями систем различных типов, решение многих задач оптимизации, планирования и проектирования.

Ввиду возрастающей сложности вычислительных систем все труднее прогнозировать показатели их производительности, эффективность взаимодействия аппаратных ресурсов, программного обеспечения (системных программ, компиляторов и т. д.) и организации и управления этими ресурсами. Например, все чаще появляется необходимость определения минимального числа разбиений исходной задачи на подзадачи с дальнейшей параллельной обработкой этих подзадач вычислительной системой.

Одним из путей решения задачи эффективного использования вычислительных систем с параллельной обработкой информации является использование теории и методов анализа систем массового обслуживания с целью построения и дальнейшего анализа математических моделей дискретных стохастических систем.

Цель магистерской работы – исследование возможности распараллеливания известных алгоритмов нахождения глобального минимума многоэкстремальной целевой функции многих переменных с явными и неявными ограничениями, а также разработка компьютерной программы математической модели вычислительной системы с параллельной обработкой информации и определение минимального числа подзадач задачи определения глобального минимума функции многих переменных.

Поставленная цель определила **следующие задачи:**

- адаптации для выполнения на параллельных и распределённых вычислительных системах алгоритма условной оптимизации комплексным

методом Бокса многоэкстремальных целевых функций (ЦФ) многих переменных при наличии явных и неявных ограничений;

- изучения возможности распараллеливания алгоритма нахождения глобального минимума многоэкстремальной ЦФ многих переменных с явными ограничениями (ограничениями типа равенств), основанного на стохастическом методе имитации отжига;
- изучения возможности распараллеливания алгоритма нахождения глобального минимума многоэкстремальной ЦФ многих переменных с ограничениями типа равенств, основанного на использовании генетических алгоритмов (ГА);
- разработка математической модели вычислительной системы с параллельной обработкой информации;
- разработка программы для анализа модели вычислительной системы с параллельной обработкой информации;
- разработка программы для решения задачи оптимизации методом имитации отжига. Эта программа предназначена для определения параметров системы массового обслуживания – модели вычислительной системы;
- проведение вычислительных экспериментов с системой массового обслуживания.

Методологические основы. Для анализа результатов использовались методы статистической обработки данных, такие как сравнение средних значений времени выполнения и анализ зависимостей надёжности от количества узлов. Это позволило сделать выводы о статистической значимости полученных результатов.

Теоретическая значимость магистерской работы. Применение параллельных вычислений в задачах оптимизации, предоставляя новые методы и подходы, которые могут быть использованы для разработки более эффективных и надёжных алгоритмов. Результаты исследования вносят

значительный вклад в развитие теории и методологии параллельных вычислений в области оптимизации.

Практическая значимость магистерской работы заключается в разработке и исследовании методов и алгоритмов для решения задач оптимизации с использованием высокопроизводительных вычислительных систем. Основные достижения и их значимость включают: математическая модель высокопроизводительной вычислительной системы; алгоритмы и программы для анализа системы массового обслуживания.

Структура и объем работы. Магистерская работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и цифрового носителя в качестве приложения. Общий объем работы — 67 страниц, из них 58 страницы — основное содержание, включая 27 рисунков и 5 таблиц, список использованных источников информации — 26 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Распараллеливание алгоритмов нахождения глобального минимума многоэкстремальной целевой функции» посвящен возможностям распараллеливания комплексного метода оптимизации Бокса.

В данном разделе рассмотрены три метода, используемых при поиске глобального экстремума и оценим возможность их распараллеливания.

Показаны возможности модифицированного комплексного метода оптимизации Бокса, алгоритма оптимизации, основанного на методе имитации отжига и генетических алгоритмов оптимизации, применяемых при поиске глобальных экстремумов, а также исследование возможности выполнения этих алгоритмах на параллельных вычислительных системах.

Проведены экспериментальные исследования по оценке их эффективности и надёжности в сравнении с исходными алгоритмами.

В процессе работы предложены варианты распараллеливания комплексного метода оптимизации Бокса, алгоритма оптимизации, основанного на методе имитации отжига и генетического алгоритма оптимизации. Проведены

экспериментальные исследования по оценке их эффективности и надёжности в сравнении с исходными алгоритмами.

В результате исследования для комплексного метода оптимизации Бокса определено оптимальное число узлов вычислительной системы с точки зрения требуемой точности вычислений и стабильности результатов. При этом время выполнения программы оказалось в несколько раз меньше, чем на одной ЭВМ, а надёжность нахождения глобального экстремума значительно выше за счёт одновременного исследования целевой функции в нескольких областях факторного пространства.

Для алгоритма оптимизации, основанного на методе имитации отжига определены зависимости надёжности нахождения глобального минимума от количества узлов параллельной вычислительной системы. Показано, что распараллеленный вариант алгоритма имитации отжига, использующий схему Больцмановского тушения, позволяет за небольшое время надёжно находить область глобального минимума.

Для параллельного варианта классического генетического алгоритма оптимизации найдены зависимости надёжности и времени нахождения глобального минимума от количества узлов параллельной вычислительной системы. Определены оптимальные параметры алгоритма, обеспечивающие достаточно быструю сходимость.

Метод имитации отжига, реализованный по схеме тушения, работает быстрее комплексного метода Бокса даже при последовательном запуске. Использование параллельного алгоритма оптимизации методом имитации отжига позволяет найти глобальный минимум функции за незначительное время, в отличие от параллельной версии модифицированного комплексного метода Бокса, но при этом точность последнего выше. В то же время генетические алгоритмы имеют достаточно возможностей для их использования на параллельных вычислительных системах.

Второй раздел «Математическая модель вычислительной системы»

посвящен описанию основных элементов и их функций высокопроизводительной вычислительной системы с параллельной обработкой информации, а также описанию ее математической модели.

В подразделе 2.1 представлено описание алгоритма метода анализа системы массового обслуживания – модели вычислительной системы.

Общая структурная схема системы массового обслуживания с делением и слиянием требований представлена на рисунке 1, где треугольником, к которому подходит стрелка из источника, обозначена точка разделения требования; кружками – приборы системы обслуживания; треугольником, из которого выходит стрелка в источник, обозначена точка ожидания и слияния фрагментов требования.

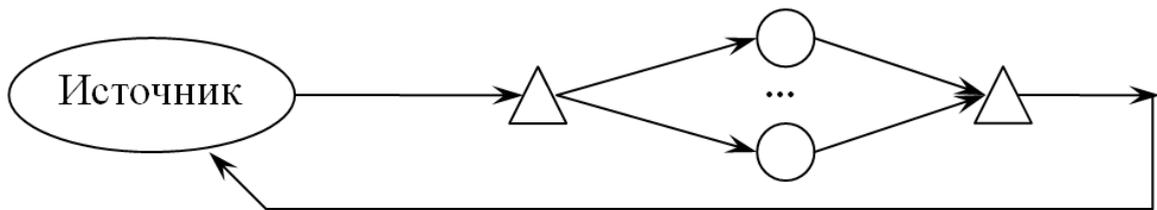


Рисунок 1 – Структурная схема СМО

Выбор непрерывной равномерно распределенной случайной величины в качестве параметра длительности обслуживания фрагмента обусловлен, как правило, небольшим диапазоном времени выполнения родственных подзадач вычислительной машиной, функционирующей в неизменной окружающей среде. Поэтому моменты завершения выполнения подзадач внутри интервала времени считаем равновероятными.

Функция распределения и функция плотности распределения этой случайной величины соответственно имеют вид

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x \geq b, \end{cases}$$

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases}$$

где a и b – параметры функции распределения, $0 < a < b$. График функции плотности распределения случайной величины X показан на рисунке 2.

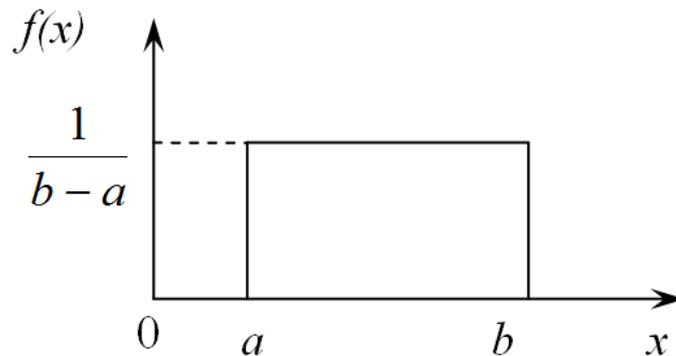


Рисунок 2 – График функции плотности распределения случайной величины

Третий раздел «Алгоритм вычисления оценки вероятности нахождения точки глобального минимума многоэкстремальной функции» посвящен разработке алгоритма для анализа системы массового обслуживания с делением и слиянием требований.

Пусть задана вероятность того, что полученная в результате выполнения алгоритма точка, действительно является точкой глобального минимума многоэкстремальной функции.

Необходимо определить минимальное число N решений, среди которых найдется хотя бы одно, являющееся решением задачи поиска глобального минимума многоэкстремальной функции.

Был разработан следующий алгоритм нахождения числа N .

Алгоритм нахождения числа N .

1. Определяем целевую функцию, например,

$$f(x) = 5x^4 - x^3 - 16x^2 + 5x + 12 + 4 \sin(25x).$$

2. Устанавливаем область определения функции границами отрезка $[A, B]$.

3. Определяем требуемую вероятность P получения точки глобального минимума целевой функции, например, $P = 0,95$.
4. Устанавливаем текущую «температуру» T_k в максимальное значение, шаг изменения «температуры» Γ в пределах $0,01$.
5. Для получения априорной вероятности достижения точки глобального минимума алгоритмом имитации отжига с заданными параметрами, определим:
 - $\Delta = 0,05$ – полуинтервал, в котором находится точка глобального минимума,
 - Tr – точка глобального минимума функции. В случае функции, заданной в п.1 алгоритма, $Tr = -1,3179$,
 - n – число прогонов алгоритма имитации отжига, $n = 100000$,
 - k – число достижений точки глобального минимума, $k = 0$.
6. n раз выполнить алгоритм имитации отжига. Тогда перейти на пункт 7.
 - 6.1. Случайным образом выбираем начальную точку x из интервала $[A, B]$. вычисляем значение функции в этой точке.
 - 6.2. Случайным образом определяем новую точку на основании текущей точки и в пределах интервала $[A, B]$.
Если значение функции в новой точке меньше, чем в текущей точке, то переходим в новую точку и находим точку локального минимума функции. В противном случае, остаемся в текущей точке.
Уменьшаем температуру на величину Γ .
 - 6.3. Если Γ больше 0 , то переходим на п. 6.2. В противном случае, выполняем п. 6.4.
 - 6.4. Если полученная точка функции принадлежит интервалу

$$[Tr - \Delta, Tr + \Delta],$$
 то $k = k + 1$. Перейти к пункту 6.1.
7. Оценка вероятности нахождения точки глобального минимума

определяется из отношения k/n .

8. Найти такое N , при котором $P < 1 - (1 - k/n)^N$.

Четвертый раздел «Пример использования программ и проведение вычислительных экспериментов» посвящен разработке программы для анализа системы массового обслуживания с делением и слиянием требований.

Приведены результаты исследований.

1. Исследование зависимости числа N и вероятности P_m получения глобального минимума функции при гарантированной вероятности 0,95.

Таблица 1 Исследование зависимости числа N и вероятности P_m

| P_m | N |
|-------|-----|
| 0,5 | 5 |
| 0,6 | 4 |
| 0,7 | 3 |
| 0,8 | 2 |
| 0,9 | 2 |
| 0,95 | 2 |

Следовательно, даже при достаточно низкой вероятности P_m , необходимо небольшое число процессоров для решения задачи оптимизации с вероятностью, не ниже 0,95.

2. Определим минимальное число N , которое с вероятностью, не ниже 0,95, обеспечивает отыскание точки глобального минимума функции $g(x) = 5x^4 - x^3 - 16x^2 + 5x + 12 + 4\sin(25x)$, используя метод отжига.

Все параметры совпадают с параметрами алгоритма. Результат программы представлен на рисунке 3.

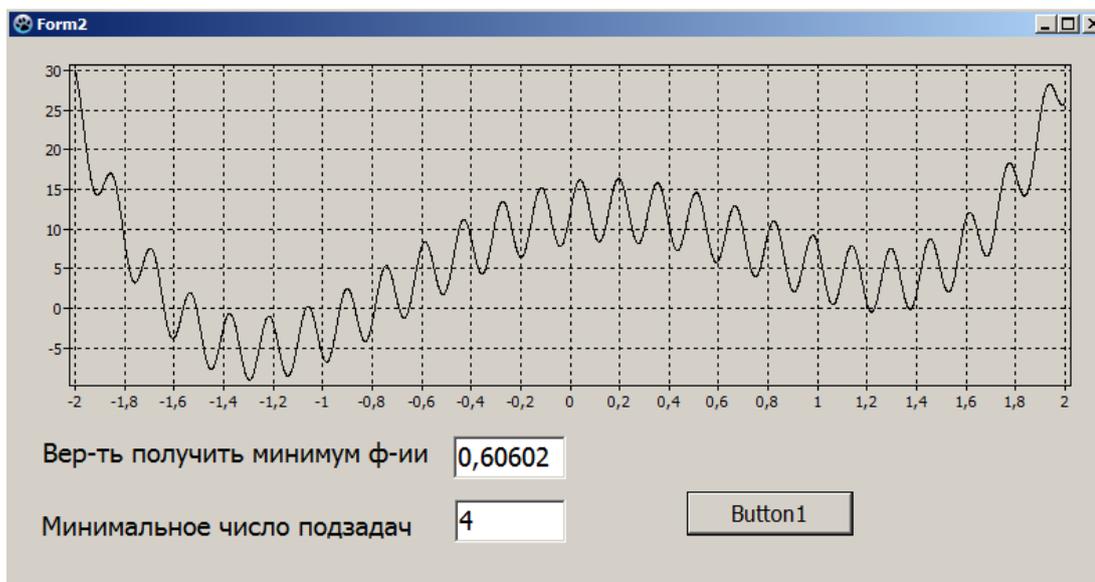


Рисунок 3 – Результат выполнения программы

Число локальных точек в данном примере увеличено более чем в полтора раза. Вероятность получения глобального минимума функции при этом уменьшилась до 0,6. Следовательно, минимальное число решаемых задач необходимо увеличить до 4.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы предложены варианты распараллеливания комплексного метода оптимизации Бокса, алгоритма оптимизации, основанного на методе имитации отжига и генетического алгоритма оптимизации. Проведены экспериментальные исследования по оценке их эффективности и надёжности в сравнении с исходными алгоритмами.

В результате исследования для комплексного метода оптимизации Бокса определено оптимальное число узлов вычислительной системы с точки зрения требуемой точности вычислений и стабильности результатов. При этом время выполнения программы оказалось в несколько раз меньше, чем на одной ЭВМ, а надёжность нахождения глобального экстремума значительно выше за счёт одновременного исследования целевой функции в нескольких областях факторного пространства.

Для алгоритма оптимизации, основанного на методе имитации отжига определены зависимости надёжности нахождения глобального минимума от количества узлов параллельной вычислительной системы. Показано, что распараллеленный вариант алгоритма имитации отжига, использующий схему Больцмановского тушения, позволяет за небольшое время надёжно находить область глобального минимума.

Для параллельного варианта классического генетического алгоритма оптимизации найдены зависимости надёжности и времени нахождения глобального минимума от количества узлов параллельной вычислительной системы. Определены оптимальные параметры алгоритма, обеспечивающие достаточно быструю сходимость.

Построена математическая модель высокопроизводительной вычислительной системы. В модели отображаются процессы решения задач оптимизации с использованием методов случайного поиска. Определяется минимальное число подзадач, решение которых обеспечит достижение точки глобального минимума многоэкстремальной функции одной переменной.

Разработаны алгоритмы и программа для анализа системы массового обслуживания с делением и слиянием требований, а также программа, которая определяет минимальное число подзадач, необходимых для получения (с вероятностью, не ниже заданной) точки глобального минимума многоэкстремальной функции.

Показано, что даже при низкой априорной вероятности решения задачи с использованием метода имитации отжига, требуется небольшое количество ресурсов вычислительной системы для получения решения с вероятностью, не ниже заданной.

Результаты магистерской работы могут быть использованы как в теоретических, так и прикладных работах при решении оптимизационных задач в различных технических областях.

Основные источники информации:

- 1 Савин, А. Н. Модификация комплексного метода условной оптимизации Бокса для определения размеров замедляющих систем по заданным электродинамическим характеристикам / А. Н. Савин, Ю. П. Шараевский, Н. Е. Тимофеева // СВЧ-техника и телекоммуникационные технологии: Материалы 15-ой Междун. Крымской конф. (КрыМиКо2005). – Украина. Севастополь: Вебер, 2005. С. 779-780.
- 2 Eroftiev, A.A. Parallel Computing in Application to Global Optimization Problem Solving / A. A. Eroftiev, N. E. Timofeeva, A. N. Savin // Grid and Visualization Systems: MIPRO, 2011 Proceedings of the 34th International Convention .– Zagreb, Croatia: DENONA. – 2011. – P. 185-190.
- 3 Савин, А.Н., Применение алгоритма оптимизации методом имитации отжига на системах параллельных и распределённых вычислений / А.Н.Савин, Тимофеева Н.Е. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. – 2012. – Том 12. вып. 1. – С 110-116.
- 4 Высоцкий, А.В. Исследование эффективности поиска глобального экстремума методом имитации отжига, распараллеленного различными способами / А.В. Высоцкий, А.С. Тараканов, К.И. Шоломов, Н.Е. Тимофеева, А.А. Ерофтиев // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. – 2013. – Том 13. вып. 3. – С 87-95.
- 5 Климов, Г.П. Теория массового обслуживания / Г. П.Климов. – М.: Изд-во Московского университета, 2011. – 312 с.
- 6 Митрофанов, Ю.И. Анализ сетей массового обслуживания: учеб. Пособие / Ю.И.Митрофанов. – Саратов: Научная книга, 2005. – 175 с.
- 7 Назаров, А.А. Теория массового обслуживания: Учеб. пособие / А.А.Назаров, А.Ф.Терпугов. – Томск: Изд-во «НЛТ», 2010. – 228 с.
- 8 Тананко, И. Е. Основы моделирования систем: Учеб. Пособие / И.Е. Тананко. – Саратов: ООО Издательский центр «Наука», 2018. – 116 с.