

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Методы диагностики и анализа режима обобщенной синхронизации в
однонаправленно и взаимно связанных системах с различной
топологией аттрактора**

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 2241 группы
направления 09.04.02 Информационные системы и технологии
код и наименование направления (специальности)

института физики

наименование факультета, института, колледжа

Бучко Данилы Константиновича

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
Профессор кафедры ФОС,

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

О.И. Москаленко

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. степень, уч. звание

дата, подпись

А.А. Короновский

инициалы, фамилия

Саратов 2025 год

Введение. Популярность исследований, связанных с обобщенной синхронизацией хаотических систем, подтверждается существованием большого количества научных работ, посвященных этой тематике, например, изучению электронных генераторов, биологических процессов и финансовых временных рядов [1]. В данной магистерской работе проанализированы однонаправленно связанные генераторы на туннельном диоде [2] и однонаправленно связанные системы Лоренца [1,3], характеризующиеся принципиально разной топологией аттрактора. Для изучения режима обобщенной синхронизации поставлена задача численного моделирования ансамблей этих систем с последующим применением методов обнаружения режимов синхронизации: использованы классический и модифицированный методы вспомогательной системы [3,4], построение временных реализаций, рекуррентных диаграмм и рекуррентный анализ сигналов взаимодействующих систем [5,6]. Рекуррентный анализ был применен как для исследования модельных систем, так и для данных, полученных с помощью электроэнцефалографии [7], что позволило сравнить эффективность данного метода для изучения динамики базовых моделей и реальных биологических данных.

Структура работы. Основная часть состоит из введения, трех глав и заключения. В первой главе приведены теоретические сведения о режиме обобщенной синхронизации, приведены уравнения для исследуемых систем, подробно рассмотрены классический и модифицированный методы вспомогательной системы и их применение к исследуемым системам. Во второй главе проведено исследование обобщенной синхронизации при помощи рекуррентного анализа, введены метрики SPR и JPR, проведено построение рекуррентных диаграмм и расчет вышеуказанных характеристик для модельных систем. В третьей главе метод рекуррентного анализа применен к данным ЭЭГ человека.

Основное содержание работы. Для иллюстрации возможных различий в результатах исследований были выбраны системы с различной топологией

аттрактора. Генераторы на туннельном диоде [2] имеют простую топологию аттрактора и описываются системами уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= \omega_d^2(hx_d + y_d - z_d), \\ \dot{y}_d &= -x_d, \\ \dot{z}_d &= \frac{x_d - f(z_d)}{\mu},\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= \omega_r^2(h(x_r - \varepsilon(y_d - y_r)) + y_r - z_r), \\ \dot{y}_r &= -x_r + \varepsilon(y_d - y_r), \\ \dot{z}_r &= \frac{x_r - f(z_r)}{\mu},\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}_{d,r} = (x_{d,r}, y_{d,r}, z_{d,r})$ – векторы состояний взаимодействующих систем. В качестве безразмерной характеристики нелинейного элемента $f(\xi)$ использовалась зависимость $f(\xi) = -\xi + 0,002sh(5\xi - 7,5) + 2,9$. Управляющие параметры были выбраны следующими: $\omega_d = 0,96$, $\omega_r = 1,02$, $h = 0,2$, $\mu = 0,1$.

Системы Лоренца [1,3] обладают сложной топологией аттрактора и определяются системами уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_d &= \sigma(y_d - x_d), \\ \dot{y}_d &= r_d x_d - y_d - x_d z_d, \\ \dot{z}_d &= -b z_d + x_d y_d,\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_r &= \sigma(y_r - x_r) + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= r_r x_r - y_r - x_r z_r, \\ \dot{z}_r &= -b z_r + x_r y_r,\end{aligned}$$

где $\mathbf{x}_{d,r} = (x_{d,r}, y_{d,r}, z_{d,r})$ – векторы состояний взаимодействующих систем, ε – параметр связи. Выбраны следующие значения управляющих параметров: $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r_1 = 37$, $r_2 = 35$.

Режим обобщенной синхронизации характеризуется существованием

функциональной зависимости $\mathbf{x}_r(t) = F[\mathbf{x}_d(t)]$ между состояниями систем [2,3]. Как процедура поиска, так и сам вид данной функциональной зависимости в большинстве случаев крайне сложные, поэтому для диагностирования режима обобщенной синхронизации существуют специальные методы, одним из которых является метод вспомогательной системы, суть которого сводится к введению в рассмотрение дополнительной вспомогательной системы, идентичной по управляющим параметрам ведомой системе, но стартующей с других начальных условий. При установлении режима обобщенной синхронизации векторы состояний вспомогательной и ведомой систем должны совпадать. Визуальным представлением этого процесса служит зависимость ошибки синхронизации от параметра связи ε , вычисляемая по формуле:

$$s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T - T_0} \int_{T_0}^T \|\mathbf{x}_a(t) - \mathbf{x}_r(t)\| dt, \quad (3)$$

где T_0 – время переходного процесса, T – время наблюдения. Когда ошибка синхронизации обращается в ноль, в системе устанавливается режим обобщенной синхронизации.

Другим методом является модифицированный метод вспомогательной системы, базирующийся на рассмотрении множества ведомых (вспомогательных) систем, также имеющих различные начальные условия, и расчете меры мультистабильности [3,4]:

$$P_{av} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_s(t) dt, \quad (4)$$

где T – рассматриваемый промежуток времени,

$$P_s = \sum_{i=1}^N \frac{n(\mathbf{x}_a^i)}{N(N-1)}, \quad (5)$$

где N – общее количество вспомогательных систем, $n(\mathbf{x}_a^i)$ – количество вспомогательных систем, вектор состояния которых совпадает с $\mathbf{x}_a^i$. В режиме обобщенной синхронизации P_{av} должна стремиться к единице.

Для исследуемых систем (1), (2) произведен расчет обеих характеристик при изменении параметра связи (рисунки 1, 2). Видно, что для генераторов на

туннельном диоде мера мультистабильности приближается к единице для $\varepsilon \geq 0,19$, а ошибка синхронизации обращается в ноль при $\varepsilon = 0.17$.

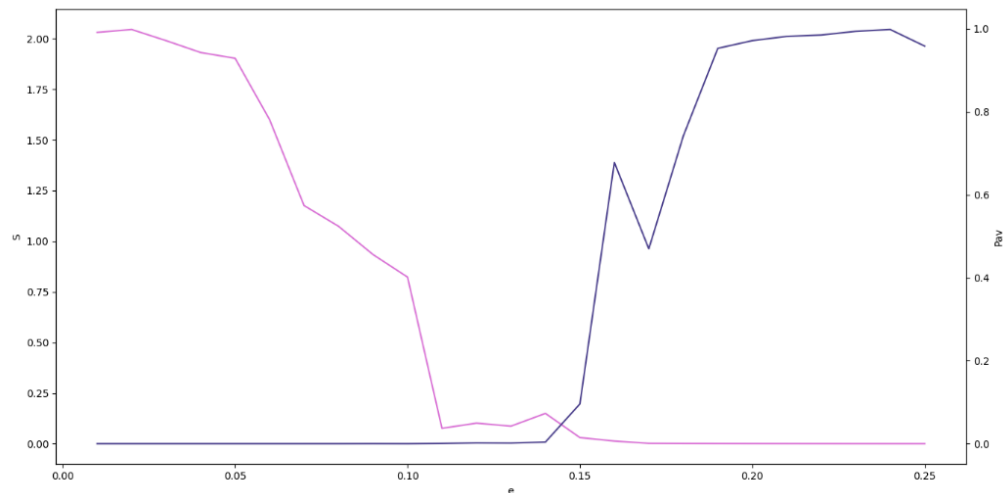


Рисунок 1 – Ошибка синхронизации и мера мультистабильности для ансамбля однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде

Для осцилляторов Лоренца (2) ошибка синхронизации сильно приближается к нулю для $\varepsilon \geq 12$, что является порогом возникновения обобщенной синхронизации, а мера мультистабильности в этот же момент выходит на уровень насыщения.

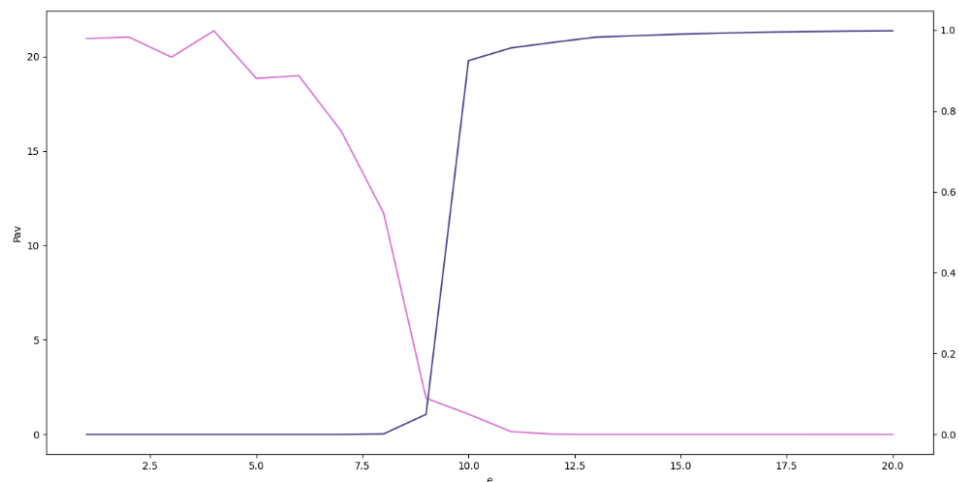


Рисунок 2 – Ошибка синхронизации (построена розовым цветом) и мера мультистабильности (построена фиолетовый цветом) для ансамбля однонаправленно связанных систем Лоренца

Рекуррентный анализ. Для диагностики обобщенной синхронизации

при помощи рекуррентного анализа строятся рекуррентные диаграммы [5], точки для которых рассчитываются по следующей формуле:

$$R_{i,j}^{\epsilon} = \Theta(\epsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|), \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

где N – количество точек, ϵ – пороговое расстояние, $\Theta(\cdot)$ – функция Хэвисайда, $\|\cdot\|$ – означает норму, и рассчитываются количественные характеристики

$$JPR = \max_{\tau} \frac{S(\tau) - RR}{1 - RR} \quad (7)$$

(где $S(\tau) = (\frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \Theta(\epsilon_x^i - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|) \Theta(\epsilon_y^i - \|\mathbf{y}_{i+\tau} - \mathbf{y}_{j+\tau}\|)) / RR$, RR – параметр, который задается в зависимости от специфики исследования, обычно используются достаточно низкие значения, например 1-2%) и

$$SPR = \frac{1 - \langle (\hat{P}_x(\tau) - \hat{P}_y(\tau))^2 \rangle}{\sigma^x \sigma^y} \quad (8)$$

(где $\hat{P}(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} \Theta(\epsilon - \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+\tau}\|)}{N - \tau}$ – вероятность повторения состояния системы через некоторое время наблюдения τ , $\sigma^x \sigma^y$ – произведение стандартных отклонений вероятностей $\hat{P}_x(\tau)$ и $\hat{P}_y(\tau)$). Обе характеристики должны приближаться к единице в режиме обобщенной синхронизации.

На рисунках 3-4 приведены зависимости JPR и SPR от параметра связи для систем (1) и (2), соответственно. Их анализ показывает, что обе характеристики достигают значений, близких к 1, и выходят на насыщение при $\epsilon \geq 0,19$ для однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде и $\epsilon \geq 12$ для однонаправленно связанных систем Лоренца, что свидетельствует о корректном определении порога обобщенной синхронизации при помощи этого метода исследования. SPR имеет более высокие значения для низких значений параметров связи, что обусловлено спецификой расчета данной величины. Стоит отметить, что методы расчета JPR и SPR могут быть успешно применены и к другим системам как с однонаправленной, так и взаимной связью [8]. Полученные результаты подтверждают универсальность и эффективность этих методов для анализа обобщенной синхронизации в различных типах взаимодействующих систем.

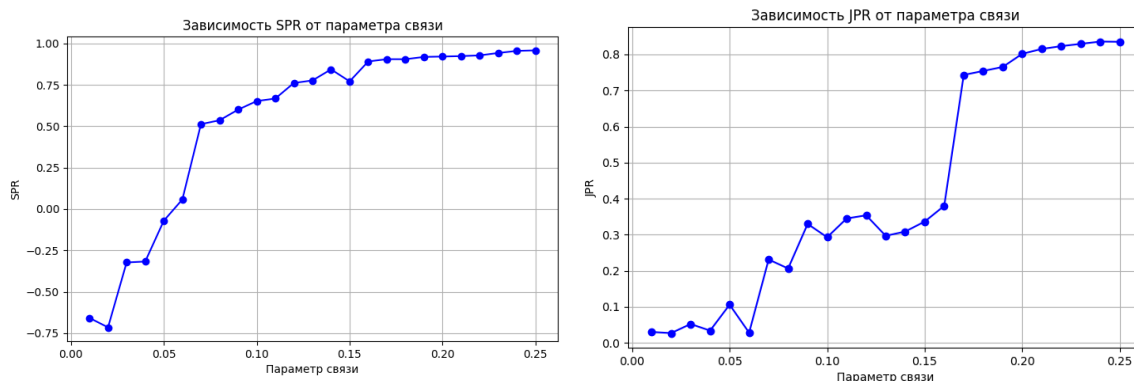


Рисунок 3 – Зависимости SPR и JPR от параметра связи для генераторов на туннельном диоде

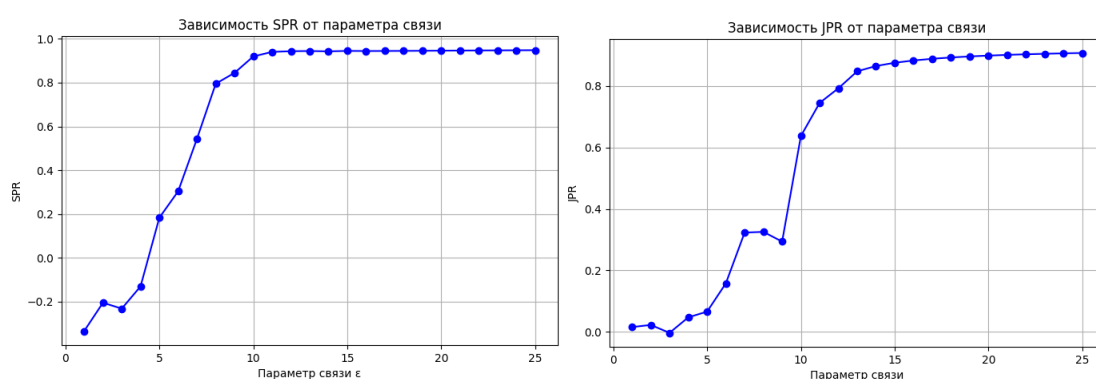


Рисунок 4 – Зависимости SPR и JPR от параметра связи для однонаправленно связанных систем Лоренца

Рекуррентный анализ данных ЭЭГ. Метод рекуррентных диаграмм применен для диагностики обобщенной синхронизации по реальным данным, полученным с помощью электроэнцефалографии (ЭЭГ). Для этого использовался открытый датасет EEG During Mental Arithmetic Tasks [7], который содержит в себе записи электроэнцефалограмм, полученные от 36 здоровых участников эксперимента в возрасте от 18 до 27 лет. Запись ЭЭГ проводилась с использованием 23-канальной системы с размещением электродов согласно международной системе 10-20.

Эксперимент состоял из двух этапов: 1) фоновая запись ЭЭГ, которая осуществлялась в состоянии покоя перед выполнением задания; 2) запись ЭЭГ во время проведения добровольцами математических вычислений в уме. Для поиска режима обобщенной синхронизации использовались данные ЭЭГ одного из участников эксперимента. Были выбраны пары каналов ЭЭГ из

одной и разных областей мозга и применены методы обнаружения обобщенной синхронизации: расчет количественных характеристик JPR и SPR, которые используются при рекуррентном анализе. Полученные результаты показали низкие значения вероятности JPR как для случая ЭЭГ в состоянии покоя, так и для случая проведения математических вычислений в уме, в то время как вероятности SPR оказались достаточно высокими, что свидетельствует о невозможности использования одной из вышеперечисленных характеристик для диагностики обобщенной синхронизации по данным такого типа. Для того, чтобы понять, какая из характеристик дает сбой, были построены рекуррентные диаграммы для каждого из сигналов и совместные рекуррентные диаграммы для тех же двух сигналов, что подтвердило отсутствие режима обобщенной синхронизации и корректность характеристики JPR. Невозможность использования SPR в данном случае, обусловлено тем, что формула вычисления этой вероятности не учитывает локальные несовпадения рекуррентных диаграмм исследуемых сигналов, из-за чего и получаются значения SPR, близкие к единице.

Заключение. В рамках магистерской работы исследованы однонаправленно связанные генераторы на туннельном диоде с простой топологию аттрактора и однонаправленно связанные системы Лоренца со сложной топологией аттрактора с точки зрения возможности возникновения в них режима обобщенной синхронизации. Для этого применены методы построения временных реализаций и рекуррентных диаграмм, совместных рекуррентных диаграмм, классический метод вспомогательной системы, модифицированный метод вспомогательной системы и рекуррентный анализ.

Показано, что режим обобщенной синхронизации возникает при параметрах связи $\varepsilon \geq 0,19$ и $\varepsilon \geq 12$ для генераторов на туннельном диоде и систем Лоренца, соответственно. Мера мультистабильности принимает свое максимальное значение при параметре связи, соответствующем порогу обобщенной синхронизации систем Лоренца, но выходит на уровень насыщения несколько позже порога наступления обобщенной синхронизации

для генераторов на туннельном диоде. Метрики JPR и SPR, расчет которых основан на построении рекуррентных диаграмм, демонстрируют высокие значения при приближении к порогам обобщенной синхронизации, что согласуется с другими методами.

Также был проведен анализ данных ЭЭГ испытуемого, участвующего в эксперименте, связанном с математическими вычислениями в уме. Расчеты показали низкие значения JPR и высокие SPR, что указывает на противоречие между метриками: SPR предполагает наличие синхронизации, а JPR – ее отсутствие. Построение совместных рекуррентных диаграмм подтвердило отсутствие синхронизации. Такой результат свидетельствует о том, что метрики JPR и SPR могут предоставлять некорректные результаты для некоторых данных, что демонстрирует необходимость комплексного подхода к анализу синхронизации.

Список использованной литературы

1. Пиковский А., Розенблюм М., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. - М.: Техносфера, 2003. - 496 с.
2. Москаленко О. И., Павлов А. С. Граница обобщенной синхронизации в системе двух однонаправленно связанных генераторов на туннельном диоде // Письма в Журнал технической физики. – 2011. – Т. 37. – №. 23. – С. 45-52.
3. Москаленко О. И., Евстифеев Е. В. О существовании мультистабильности вблизи границы обобщенной синхронизации в однонаправленно связанных системах со сложной топологией аттрактора // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. – 2022. – Т. 30. – №. 6. – С. 676-684.
4. Moskalenko O. I. et al. On multistability near the boundary of generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic systems // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. – 2021. – Т. 31. – №. 8. – С. 083106.

5. Marwan N. Et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems //Physics reports. – 2007. – Т. 438. – №. 5-6. – С. 237-329.
6. Romano M. C., Thiel M., Kurths J. Generalized synchronization indices based on recurrence in phase space //AIP Conference Proceedings. – American Institute of Physics, 2004. – Т. 742. – №. 1. – С. 330-336.
7. EEG During Mental Arithmetic Tasks [Электронный ресурс] // PhysioNet. URL: <https://physionet.org/content/eegmat/1.0.0/>
8. Илларионова Е .Д., Москаленко. О. И. Метод рекуррентного анализа для диагностики режима обобщенной синхронизации в различных классах динамических систем // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. – 2025. – Т. 25. – № 3.