МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Исследование фазовой синхронизации однонаправленно и взаимно связанных систем с использованием метода рекуррентных диаграмм

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 2241 группы
направления 09.04.02 Информационные системы и технологии
код и наименование направления (специальности)
института физики
наименование факультета, института, колледжа
Тарасовой Анастасии Александровны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
Профессор кафедры ФОС,
д.ф.-м.н., профессор _____ _____ О.И. Москаленко
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор _____ _____ А.А. Короновский
должность, уч. степень, уч. звание дата, подпись инициалы, фамилия

Саратов 2025 год

Введение

В последнее время современные ученые все чаще изучают феномен хаотической синхронизации и способы ее диагностирования. Интерес к данному явлению обусловлен как фундаментальностью, так и универсальностью в решении практических задач. Синхронизация хаоса активно используется для защиты передаваемой информации в телекоммуникации, для изучения динамики нейронных сетей в биологии и анализа сложных колебательных систем в физике [1,2]. Выделяют несколько типов хаотической синхронизации в связанных динамических системах. Это полная синхронизация, фазовая синхронизация, обобщённая синхронизация и синхронизация с запаздыванием.

Фазовая синхронизация является одним из важнейших режимов в современной теории нелинейных колебаний. Она означает, что происходит захват фаз хаотических сигналов, при этом амплитуды этих сигналов остаются несвязными друг с другом и выглядят хаотическими. В данной работе будет рассмотрено два метода диагностирования фазовой синхронизация: классический [3,4] и современный, основанный на рекуррентном анализе [5].

Рекуррентный анализ является универсальным и эффективным методом для исследования скрытых закономерностей в сложных динамических системах. Благодаря этому он находит широкое применение в большом количестве областей таких как медицина, экономика и искусственный интеллект. Его способность выявлять структуры в многомерных временных рядах позволяет более точно описывать и предсказывать поведение хаотических систем.

Целью данной магистерской работы является исследование фазовой синхронизации в различных типах взаимодействующих хаотических системах и в реальных данных ЭЭГ [6] с применением методов классического и рекуррентного анализа, а также построение количественных показателей для диагностики синхронизации.

Работа состоит из 4 глав: исследуемые динамические системы, фазовая синхронизация, рекуррентный анализ и реальные данные. Последняя глава

включает в себя описание данных и применения к ним метода рекуррентного анализа.

Содержание работы

В первой главе приводятся исследуемые системы.

Были рассмотрены три следующие динамические связанные системы с простой (1), (2) и сложной (3) топологией аттрактора [7,8], а именно:

1) Две взаимно связанные системы Рёсслера

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + \mu(x_2 - x_1),\\
\dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1,\\
\dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c),\\
\dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \mu(x_1 - x_2),\\
\dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2,\\
\dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c).
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ – векторы состояний взаимодействующих систем; a=0.15, p=0.2, c=10, $\omega_1 = 0.99$ и $\omega_2 = 0.95$ – управляющие параметры; μ – параметр связи.

2) Две однонаправленно связанные системы Рёсслера

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1,\\
\dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 + a y_1,\\
\dot{z}_1 &= p + z_1(x_1 - c),\\
\dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \mu(x_1 - x_2),\\
\dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 + a y_2,\\
\dot{z}_2 &= p + z_2(x_2 - c).
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ – векторы состояний взаимодействующих систем; a=0.15, p=0.2, c=10, $\omega_1 = 0.93$ и $\omega_2 = 0.95$ – управляющие параметры; μ – параметр связи.

3) Две однонаправленно связанные системы Лоренца

$$\dot{x}_1 = \sigma(y_1 - x_1),$$

$$\dot{y}_1 = r_1 x_1 - y_1 - x_1 z_1,$$
$$\dot{z}_1 = -b z_1 + x_1 y_1,$$
$$\dot{x}_2 = \sigma(y_2 - x_2) - \mu(x_1 - x_2), \quad (3)$$
$$\dot{y}_2 = r_2 x_2 - y_2 - x_2 z_2,$$
$$\dot{z}_2 = -b z_2 + x_2 y_2,$$

где $\mathbf{x}_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2})$ – векторы состояний взаимодействующих систем;$\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, $r_1 = 40$, $r_2 = 35$ – управляющие параметры; μ – параметр связи.

Решение данных систем уравнений (1)-(3) проводилось численно с использованием метода Рунге-Кутта 4 порядка. Для использования данного метода была написана программа на языке программирования C++.

Во второй главе описывается феномен фазовой синхронизации, вводятся основные понятия, приводятся способы введения фазы для динамических систем различных типов.

В основе концепции фазовой синхронизации лежит понятие мгновенной фазы $\varphi(t)$ хаотического сигнала. Существует несколько способов введения фазы хаотического сигнала [3,4]. Одним из самых распространенных из них является введение фазы как угла поворота в полярной системе координат:

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}, \quad (4)$$

при этом аттрактор системы должен быть фазово-когерентным, т.е. все траектории на плоскости (x, y) должны вращаться вокруг начала координат, не пересекая и не огибая его. О наличии фазовой синхронизации говорят в том случае, когда фазы хаотических сигналов взаимодействующих систем оказываются захваченными, то есть выполняется условие:

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| < \text{const} \quad (5)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ – мгновенные фазы этих систем. Это так называемый классический метод диагностики фазовой синхронизации.

Если аттрактор фазово-некогерентный, то в ряде случаев (как, например, для системы Лоренца) для введения фазы в исследуемые системы, необходимо

перейти к новой системе координат $(z_{1,2}, u_{1,2})$, где $u_{1,2}$ определяется в соответствии с формулой:

$$u_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2} \quad (6)$$

в которой траектории обеих систем вращаются не относительно точки (0, 0), а вокруг точек $(z_{1,2}^0, u_{1,2}^0)$. При этом, формула для введения фазы примет следующий вид:

$$\tan \varphi_{1,2} = \frac{u_{1,2} - u_{1,2}^0}{z_{1,2} - z_{1,2}^0}, \quad (7)$$

При таком переходе диагностика фазовой синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора может осуществляться тем же способом, что и для систем с простой структурой [9,10].

Для исследования фазовой синхронизации в системах (1)-(3) были введены фазы хаотических сигналов с использованием формул (4), (7) в соответствии с топологией аттрактора исследуемой системы и рассмотрены зависимости разности фаз от времени.

Все три исследуемые системы хорошо продемонстрировали переход от асинхронного режима к режиму фазовой синхронизации через перемежаемость. Для двух однонаправленно связанных систем Ресслера были рассмотрены случаи относительно малой и относительной большой расстройки управляющих параметров. Было замечено, что во втором случае переход к перемежаемости сопровождается потерей фазовой когерентности аттрактором ведомой системы, а участки захвата фаз в данном случае оказываются более короткими. Система Лоренца после перехода к новой системе координат (6) также хорошо продемонстрировала те же режимы поведения.

В третьей главе описывается рекуррентный анализ и приводятся результаты его применения к исследуемым системам.

Рекуррентная диаграмма (RP) – это график для визуализации поведения траекторий динамических систем в фазовом пространстве. График повторения подчиняется следующей формуле:

$$R_{i,j}(\varepsilon) = \theta\left(\varepsilon - \left\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\right\|\right), \; i, j = 1, \ldots, N. \quad (8)$$

где N – количество точек, ε — пороговое расстояние, θ(·) – функция Хэвисайда (θ(x)=0 если x<0 и θ(x)=1 в остальных случаях).

Перекрестная рекуррентная диаграмма (CRP) является двумерным расширением RP и введена для анализа зависимостей между двумя различными системами путем сравнения их состояний. Матрица перекрестной рекуррентности определяется следующим образом:

$$CR_{i,j}^{\vec{x},\vec{y}}(\varepsilon) = \theta\left(\varepsilon - \left\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{y_j}\right\|\right),\ i,j = 1,\dots,N. \quad (9)$$

Для того чтобы обнаружить и количественно оценить наличие фазовой синхронизации используется вероятность $p(\varepsilon, \tau)$, рассчитанная по данной формуле:

$$\hat{p}(\varepsilon,\tau) = RR_\tau(\varepsilon) = \frac{1}{N-\tau}\sum_{i=1}^{N-\tau}\theta(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_{i+\tau}\|). \quad (10)$$

Также для анализа фазовой синхронизации связанных систем широко используется коэффициент корреляции вероятности повторения:

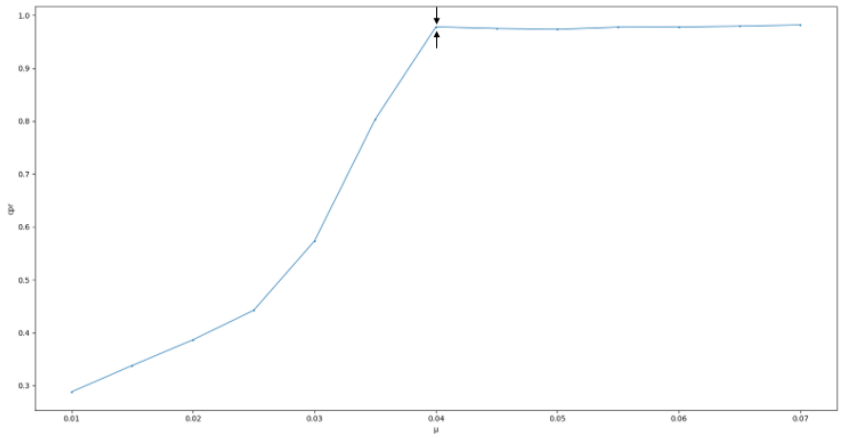
$$CPR = \langle \bar{p}^{\vec{x}}(\tau)\bar{p}^{\vec{y}}(\tau)\rangle, \quad (11)$$

где $\bar{p}^{\vec{x}}(\tau)$, $\bar{p}^{\vec{y}}(\tau)$ – это вероятности, нормированные к нулевому среднему стандартному значению.

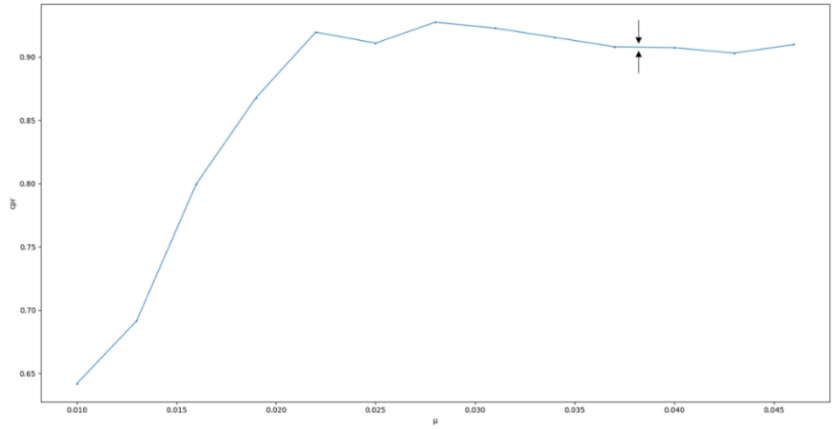
Если взаимодействующие системы находятся в режиме фазовой синхронизации, вероятности повторения будет максимальным и CPR ≈ 1. В случае, когда системы не находятся в режиме фазовой синхронизации максимумы вероятности повторения не возникнут одновременно, наблюдается дрейф и ожидаются низкие значения CPR.

Для того чтобы с использованием рекуррентных диаграмм можно было пронаблюдать возможность диагностирования фазовой синхронизации, были рассчитаны коэффициенты корреляции взаимодействующих систем с использованием формулы (11). Полученные результаты для систем (1)-(3) представлены на рисунке 1. Видно, что для всех систем зависимости качественно аналогичны друг другу: при низких значениях силы связи коэффициент корреляции имеет небольшое значение, а затем с увеличением силы связи выходит на уровень насыщения равный 1, что соответствует порогу фазовой

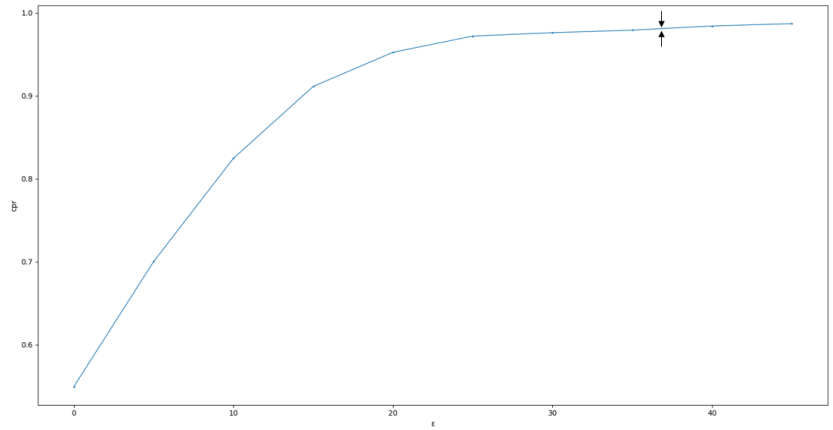
синхронизации. Важно отметить, что результаты, полученные при помощи рекуррентного анализа, для большинства систем находятся в хорошем соответствии с результатами классических методов.



а



б



в

Рисунок 1 – Зависимости коэффициента корреляции от параметра связи μ, полученные для систем (1)-(3), соответственно. Пороги фазовой синхронизации, диагностируемые классическим методом, отмечены стрелками

Четвертая глава посвящена исследованию фазовой синхронизации с использованием рекуррентного анализа в данных ЭЭГ. С этой целью был выбран датасет EEG During Mental Arithmetic Tasks [6], который содержит в себе записи ЭЭГ 36 испытуемых в возрасте от 18 до 27 лет. Записи ЭЭГ регистрировали монополярно с помощью 23-канальной системы по международной схеме 10/20. В наборе данных для каждого испытуемого содержится по две записи. Первая запись проводилась в состоянии покоя, а вторая – во время последовательного вычитания в уме двузначных чисел из четырехзначного.

Для того чтобы исследовать данные ЭЭГ на наличие фазовой синхронизации, были выбраны три канала, соответствующие различным областям мозга: F3 (лобная зона), P3 (теменная зона) и O1 (затылочная зона). Для каждого из этих каналов проводился расчёт коэффициента корреляции вероятностей повторения (CPR) с остальными каналами. Полученные результаты для всех трех каналов в состоянии покоя оказались схожими: значения CPR между большинством каналов принимают достаточно большие значения, что указывает на наличие фазовой синхронизации даже в отсутствии явной активности. При выполнении когнитивной задачи значения CPR остаются на высоком уровне, но заметна фазовая согласованность между лобными и теменными зонами – каналами, активно вовлекаемыми в выполнение арифметических операций, и низкая с каналами, которые относятся к затылочной области.

Таким образом, несмотря на высокую степень синхронизации в обоих состояниях, когнитивная нагрузка приводит к более выраженной функциональной направленности фазовой синхронизации между ключевыми зонами, участвующими в решении задачи.

Заключение

В данной магистерской работе проведено исследование фазовой синхронизации в хаотических системах с различным типом связи и различной топологией аттрактора, а также в реальных данных электроэнцефалографии. Рассмотрены три типа динамических систем (взаимно связанные системы

Рёсслера, однонаправленно связанные системы Рёсслера и однонаправленно связанные системы Лоренца) и два метода диагностики фазовой синхронизации (классический метод захвата фаз и рекуррентный анализ).

Метод захвата фаз позволил хорошо пронаблюдать переход от асинхронного режима к режиму фазовой синхронизации через перемежаемость для всех трех исследуемых динамических систем. Для однонаправленно связанных систем Рёсслера отдельно рассмотрены случаи относительно малой и относительно большой расстройки между взаимодействующими системами, выявлены характерные отличия между ними. Аналогичные результаты получены при помощи рекуррентного анализа. В частности, установлено, что при увеличении параметра связи вероятность повторения между взаимодействующими системами возрастает, а коэффициент корреляции CPR стремится к единице, что однозначно свидетельствует о захвате фаз и установлении синхронного взаимодействия. Иными словами, рекуррентный анализ характеризуется высокой чувствительностью к различным режимам взаимодействия и может быть использован в качестве дополнительного инструмента диагностики фазовой синхронизации.

Рекуррентный анализ применен к реальным данным ЭЭГ для выявления синхронизации между различными областями мозга в состоянии покоя и во время выполнения когнитивной задачи. В состоянии покоя полученные значения CPR показали наличие устойчивой фазовой синхронизации между большинством каналов, тогда как во время выполнения арифметических задач синхронизация наблюдалось только при взаимодействии между лобными и теменными областями мозга.

Полученные результаты подтвердили эффективность рекуррентного анализа для диагностики режимов взаимодействия и демонстрируют универсальность и практическую применимость данного метода для исследования сложных нелинейных сигналов.

Список литературы

1. Boccaletti S., Kurths J., Osipov G., Valladares D.L., Zhou C.S. The synchronization of chaotic system // Physics Reports. 2022.V. 366.P. 1-101.
2. Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление // М.: Техносфера, 2003.
3. Анищенко В.С., Постнов Д.Э., Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // Письмав ЖТФ. 1988. Т. 14. № 6.С.569-573.
4. Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. Phase synchronization of chaotic osillators // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. N. 11.P. 1804-1807.
5. Marwan N. Et al. Recurrence plots for the analysis of complex systems // Physics reports. – 2007. – Т. 438. – №. 5-6. – С. 237-329.
6. EEG During Mental Arithmetic Tasks [Электронный ресурс] // PhysioNet. URL: https://physionet.org/content/eegmat/1.0.0/
7. Кузнецов С.П. Динамический хаос // М.: Физматлит, 2006.
8. Ханадеев В.А., Москаленко О.И., Короновский А.А. Перемежаемость вблизи границы обобщенной синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2021. Т. 85. № 2. С. 265-269.
9. Тарасова А.А.., Москаленко О.И., Исследование перемежаемости вблизи границы фазовой синхронизации в системах со сложной топологией аттрактора // Известия Российской Академии Наук. Серия Физическая. 2023. Т. 87. № 10. С. 1478-1481.
10. Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Osipov G.V. Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving //Physica D.1997. V. 104. N. 4. P. 219-238