

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и  
автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ СЕТИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С  
ИЗМЕНЯЕМЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 481 группы  
направления 27.03.03 — Системный анализ и управление  
факультета КНиИТ  
Ягудиной Ринаты Хамзязевны

Научный руководитель  
старший преподаватель

\_\_\_\_\_

И. А. Люкшин

Заведующий кафедрой  
к. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

И. Е. Тананко

Саратов 2025

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы.** Сети массового обслуживания (СеМО) представляют собой совокупность взаимосвязанных систем массового обслуживания (СМО), в которых заявки переходят от одного узла к другому в соответствии с определёнными правилами маршрутизации. Такие сети широко применяются в различных областях, включая телекоммуникации, транспорт, вычислительные системы и логистику, где необходимо моделировать и анализировать сложные процессы обслуживания заявок.

Анализ СеМО позволяет оценить ключевые характеристики системы, такие как среднее время пребывания заявки в сети, м.о. числа требований в системах, нагрузка систем и общая пропускная способность. Однако традиционные методы анализа, основанные на решении систем уравнений Маркова или использовании имитационного моделирования, могут быть трудоёмкими и не всегда применимыми к большим и сложным сетям.

Метод базовых функций предлагает альтернативный подход к анализу СеМО, основанный на представлении характеристик сети в виде комбинации базовых функций, соответствующих отдельным элементам или компонентам сети. Этот метод позволяет упростить анализ сложных сетей за счёт декомпозиции на более простые элементы и использования свойств линейности и суперпозиции. В результате становится возможным более эффективно оценивать поведение сети и её ключевые показатели без необходимости полного перебора всех возможных состояний системы.

В первой главе описан принцип работы систем массового обслуживания, марковские случайные процессы, процесс гибели и размножения. Во второй главе описана постановка задачи, введены определения характеристик сети и алгоритм вычисления характеристик через метод базовых функций. В третьей главе представлены эксперименты над сетью при изменяющихся входных параметрах и анализ результатов.

Цель данной дипломной работы заключается в исследовании сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами. Итогом выполнения работы является программа, в которой производится подсчет основных характеристик сети и анализ результатов.

**Цель бакалаврской работы** — исследование сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. Изучение теории, связанной с сетями массового обслуживания с изменяемыми параметрами;
2. Реализация метода базовых функций для нахождения характеристик систем;
3. Проведение исследования путем анализ результатов при различных входных параметрах.

**Методологические основы** сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами представлены в работах Ю. И. Митрофанов [1], В. М. Вишневский [2], С. Карлин [3].

**Практическая значимость бакалаврской работы.** В ходе выполнения выпускной квалификационной работы было разработано приложение, цель которого заключается в исследовании сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами, с помощью которого можно посмотреть на влияние числа обслуживающих приборов в системах и интенсивности обслуживания на основные характеристики сети.

**Структура и объем работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, 3 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы — 52 страницы, из них 45 страницы — основное содержание, включая 17 рисунков и 7 таблиц, список использованных источников информации — 20 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Первый раздел «Системы массового обслуживания»** посвящен описанию основных понятий теории массового обслуживания.

Теория массового обслуживания является областью прикладной математики, которая связана с построением и исследованием математических моделей, описывающих стохастические процессы в функционировании систем. Она основана на анализе потоков требований, поступающих на обслуживание, длительности нахождения требований в очереди и на обслуживании и длине очереди.

В подразделе 1.1 дано общее определение системы массового обслуживания как объекта исследования в теории операций. Описаны основные элементы СМО, такие как обслуживающие каналы и поток заявок, а также указаны особенности случайного характера поступления и обработки заявок. Подчеркивается значимость построения математических моделей для анализа работы СМО и оценки её эффективности с помощью таких показателей, как среднее число заявок, среднее время ожидания и вероятность отказа.

В подразделе 1.2 описана классификация систем массового обслуживания в зависимости от их структуры и правил функционирования. Рассматриваются два основных класса СМО — с отказами и с ожиданием, различающиеся по поведению заявок при занятости всех каналов. Приводятся подвиды СМО с ожиданием, различающиеся по параметрам очереди. Особое внимание уделено дисциплине обслуживания, определяющей порядок обработки заявок, включая принципы приоритета и их влияние на организацию обслуживания.

В подразделе 1.3 рассматриваются стохастические процессы, описывающие функционирование систем массового обслуживания, с акцентом на марковские процессы, позволяющие существенно упростить математическое моделирование. Описываются принципы построения моделей СМО и постановка задач оптимизации, направленных на достижение заданного уровня качества обслуживания при минимальных затратах. Также обосновывается применение имитационного моделирования для анализа сложных и динамически изменяющихся СМО, где аналитические методы оказываются неэффективными.

В подразделе 1.4 рассматриваются основные вероятностные распределения, применяемые в теории массового обслуживания: экспоненциальное, распределение Эрланга и гиперэкспоненциальное распределение. Описываются их функции распределения, математические ожидания, дисперсии и ключевые свойства, включая отсутствие памяти у экспоненциального распределения.

В подразделе 1.5 описана символика Кендалла — стандартная нотация, применяемая для описания характеристик систем массового обслуживания. Представлены пять параметров, входящих в обозначение: тип входящего потока заявок, распределение времени обслуживания, число обслужива-

ющих приборов, емкость очереди и количество источников заявок. Подробно описаны возможные обозначения для каждого параметра, включая типовые распределения и виды потоков. Рассматриваются особенности записи и интерпретации систем с ожиданием и замкнутых систем. Символика Кендалла позволяет компактно и однозначно задавать структуру СМО для целей моделирования и анализа.

В подразделе 1.6 рассматриваются основные понятия и определения, связанные с марковскими случайными процессами, которые широко применяются в теории массового обслуживания. Приведено определение марковского процесса как процесса, в котором будущее состояние зависит только от текущего, а не от предшествующих состояний. Рассматриваются цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем, а также однородные цепи. Особое внимание уделяется процессу гибели и размножения — частному случаю марковской цепи с непрерывным временем. Дается математическая модель такого процесса, включая систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний, и приводятся условия существования стационарного распределения вероятностей.

В подразделе 1.7 рассматривается простая система массового обслуживания типа  $M/M/\kappa/B$ , обсуждаются ключевые параметры и режимы функционирования системы, приводятся математические формулы для расчета значений различных характеристик.

**Второй раздел «Анализ сетей массового обслуживания методом базовых функций»** посвящен рассмотрению метода базовых функций для подсчета основных характеристик сети. В разделе описана постановка задачи и основные алгоритмические действия.

В подразделе 2.1 формализуется задача анализа замкнутой сети массового обслуживания с  $Q$  требованиями одного класса и  $L$  системами обслуживания. Каждая система  $S_i$  содержит  $\kappa_i$  обслуживающих приборов и характеризуется индивидуальной дисциплиной обслуживания ( $FCFS$ ,  $LCFSPR$ ,  $PS$ ,  $IS$ ). Переходы требований между системами задаются маршрутной матрицей  $\Theta$ . Состояние сети описывается вектором  $s = (s_i)$ .

Для анализа сети используется метод базовых функций, позволяющий вычислить стационарные характеристики системы: вероятности пребывания заданного числа требований в каждой системе, математические ожидания

числа требований в системе, очереди, числа занятых приборов, времени ожидания и пребывания, а также коэффициенты загрузки и интенсивности потоков. В основе метода лежит рекуррентное вычисление нормализующей константы  $G(Q, L)$ , а также базовых функций  $G_L^m(Q, L)$ , определяющих стационарные вероятности. Также приводятся соотношения для расчёта характеристик любой системы сети при изменении её нумерации.

Подраздел 2.2 посвящен перечислению и краткому описанию алгоритма анализа сетей массового обслуживания методом базовых функций и состоит из следующих блоков:

1. Ввод исходных данных: задаются параметры сети — число систем  $L$ , число требований  $Q$ , маршрутная матрица  $\Theta = (\theta_{ij})$ , вектор интенсивностей обслуживания  $\mu = (\tilde{\mu}_i)$ , вектор числа обслуживающих приборов  $\kappa = (\kappa_i)$ , вектор дисциплин обслуживания  $D = (D_i)$ .
2. Решение системы линейных уравнений: определяется вектор  $x = (x_i)$  из уравнений

$$\tilde{\mu}_i x_i = \sum_{j=1}^L \tilde{\mu}_j x_j \theta_{ji}, \quad i \in I.$$

3. Вычисление базовых функций: по рекуррентным формулам вычисляются функции  $G(y, z)$  и  $G_L^m(Q, L)$  для  $y = 0, \dots, Q$ ,  $z = 1, \dots, L$ ,  $m = 0, \dots, Q$ .
4. Вычисление стационарных характеристик: по формулам рассчитываются вероятности состояний и основные характеристики систем обслуживания.
5. Перенумерация систем обслуживания: циклическая перестановка параметров систем с последующим повторным вычислением базовых функций для анализа каждой системы.
6. Вывод результатов: формируются оценки для
  - среднего числа требований в системе  $S_i$ ,
  - среднего числа занятых приборов,
  - среднего числа требований в очереди,
  - интенсивности входящего потока,
  - коэффициента использования,
  - среднего времени пребывания требований в системе,
  - среднего времени ожидания в очереди,

— среднего времени реакции сети.

**Третий раздел «Практическая часть»** посвящен экспериментам над сетью с различными входными параметрами и анализу результатов. Было разработано приложение на языке Python. Оно реализует расчет характеристик сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами на основе метода базовых функций.

Программа позволяет исследовать изменение стационарных характеристик сети в зависимости от входных параметров, таких как число обслуживающих приборов и интенсивность обслуживания. Результаты вычислений отображаются в виде таблиц и графиков, что позволяет наглядно проанализировать влияние различных параметров на поведение сети.

В подразделе 3.1 рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания с  $Q$  требованиями одного класса и  $L$  системами обслуживания, где время обслуживания требований в каждой системе распределено экспоненциально. В системе  $S_i$  имеется  $\kappa_i$  обслуживающих приборов. Интенсивности обслуживания задаются вектором  $\mu = (\mu_i)$ , где  $\mu_i$  — удельная интенсивность обслуживания при условии одного требования в системе  $S_i$ .

В подразделе 3.2 исследуется поведение замкнутой экспоненциальной сети массового обслуживания типа  $M/M/k$  с одним классом требований и восемью системами обслуживания. Параметры сети выбраны так, чтобы математическое ожидание числа требований в каждой системе было равно 1. Заданы маршрутная матрица переходов, количество приборов в каждой системе и интенсивности обслуживания.

В исходном состоянии сеть характеризуется низкой загрузкой: коэффициенты использования приборов не превышают 0.5, очередей практически нет, что свидетельствует о быстрой обработке требований.

Далее были проведены эксперименты:

1. В первой системе число приборов уменьшено с 5 до 3 при сохранении прежних интенсивностей обслуживания. В результате среднее число требований в первой системе немного возросло, появилась очередь, коэффициент использования приборов удвоился, но сеть осталась устойчивой, успешно перераспределяя нагрузку между системами.
2. При том же числе приборов в первой системе интенсивность обслуживания снизилась до 1. Это привело к резкому росту числа требований и

очереди в первой системе, коэффициент использования приближался к 1, что говорило о повышенной нагрузке. Остальные системы недогружены. Время пребывания требований в системе значительно увеличилось, что негативно сказалось на общей производительности сети.

3. Рассматривалась ситуация, когда в первой системе вышли из строя два прибора ( $\kappa_1 = 2$ ), а интенсивность обслуживания оставшихся приборов снижалась от 4.255 до 0.5.

При минимальной интенсивности  $\mu_1 = 0.5$  наблюдалось резкое ухудшение характеристик первой системы. Снижение интенсивности обслуживания в первой системе приводит к её перегрузке, что вызывает коллапс производительности всей сети — остальные системы разгружаются, но общее время отклика сильно увеличивается. Система  $S_1$  становится узким местом, от которого зависит эффективность всей сети

4. Рассматривалась ситуация, уменьшения числа обслуживающих приборов в первой системе с 5 до 1 при фиксированной высокой интенсивности обслуживания  $\mu_1 = 4.255$ .

При снижении числа приборов нагрузка на первую систему значительно возросла: среднее число требований в системе увеличилось более чем в два раза, появился рост очереди и коэффициент использования прибора приблизился к максимальному значению. Несмотря на это, время отклика первой системы практически не изменилось благодаря высокой интенсивности обслуживания. В то же время в остальных системах наблюдалось небольшое снижение нагрузки и уменьшение числа занятых приборов.

Графики показали, что уменьшение числа приборов в первой системе ведёт к накоплению очередей и росту времени ожидания, однако система остаётся работоспособной, не возникает критической перегрузки. Перераспределение нагрузки приводит к разгрузке других систем, при этом общая реакция сети сохраняется в допустимых пределах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной выпускной квалификационной работы была рассмотрена задача исследования сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами, где в качестве параметров выступало число обслуживающих прибо-

ров и интенсивности обслуживания отдельных систем. Актуальность выбранной темы обусловлена широкой применимостью сетей массового обслуживания (СеМО) в различных сферах – от телекоммуникаций и информационных технологий до логистики и транспорта, где требуется эффективное управление потоками заявок в условиях ограниченных ресурсов и стохастической природы процессов.

В процессе выполнения работы была изучена теоретическая база, лежащая в основе построения и анализа СеМО, включая классификацию систем массового обслуживания, описание их структуры и параметров, а также стохастические модели, применяемые для оценки характеристик сети. Особое внимание уделено применению метода базовых функций, позволяющего существенно упростить анализ сложных сетей за счёт декомпозиции и использования принципов суперпозиции и линейности.

Практической частью работы стало построение программного инструмента, реализующего расчёт ключевых показателей функционирования СеМО при различных конфигурациях обслуживаемых устройств и интенсивностей.

Проведённые численные эксперименты подтвердили эффективность предложенного подхода: изменение числа каналов обслуживания и интенсивности оказывает существенное влияние на такие характеристики, как среднее число заявок в системе, среднее время пребывания и коэффициент использования. Это демонстрирует важность адаптивного управления параметрами СеМО для повышения её производительности и надёжности.

Таким образом, в ходе выполнения работы была достигнута поставленная цель – проведено исследование сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами, реализована программная модель и получены количественные оценки влияния параметров на поведение сети. Результаты могут быть использованы для проектирования и оптимизации СеМО в различных прикладных задачах.

**Отдельные части бакалаврской работы были представлены на конференции:**

1. Ягудина Р. Х. Исследование сети массового обслуживания с изменяемыми параметрами – «Школа теории массового обслуживания 2025». Томск, 21-26 апреля 2025 г.

### **Основные источники информации:**

1. Митрофанов, Ю. И. Анализ сетей массового обслуживания: Учебное пособие / Ю. И. Митрофанов. — Саратов: Издательство «Научная книга», 2005. — 175 с.
2. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. — М.: Техносфера, 2003. — 512 с.
3. Карлин, С. Основы теории случайных процессов / С. Карлин. — М.: Мир, 1971. — 536 с.
4. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко. — Петрозаводск: Издательство ПетрГУ, 2014. — 76 с.
5. Климов, Г. П. Теория массового обслуживания / Г. П. Климов. — М.: Издательство Московского университета, 2011. — 312 с.
6. Анофин, В. В. Анализ и моделирование типовых систем массового обслуживания / В. В. Анофин. — М.: Инфра-Инженерия, 2023. — 232 с.
7. Прохоров, С. А. Анализ случайных процессов / С. А. Прохоров. — Самара, 2007. — 586 с.
8. Вишневский, В. М. Сети массового обслуживания. Теория и применение в сетях ЭВМ / В. М. Вишневский. — М.: Радио и связь, 1988. — 192 с.
9. Бояршинова, И. Н. Моделирование и оптимизация работы системы массового обслуживания / И. Н. Бояршинова, Т. Р. Исмагилов, И. А. Потапова. // Фундаментальные исследования. — 2015. — №. 9. — С. 9-13.