

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и  
автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ БЕСПРОВОДНОЙ СЕНСОРНОЙ  
СЕТИ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 481 группы  
направления 27.03.03 — Системный анализ и управление  
факультета КНиИТ  
Буряченко Алексея Вадимовича

Научный руководитель  
доцент, к. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

Е. П. Станкевич

Заведующий кафедрой  
к. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

И. Е. Тананко

Саратов 2025

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность исследования** моделей беспроводных сенсорных сетей обусловлена необходимостью эффективного управления и обработки больших объёмов данных, получаемых от множества распределённых сенсорных узлов. Структурная и функциональная специфика таких систем требует разработки новых эффективных моделей и методов для решения задач анализа, синтеза и оптимизации.

Примеры приложений беспроводных сенсорных сетей включают задачи локализации, где необходимо определить местоположение объекта на основе данных от нескольких датчиков, или задачи обработки зашумленных измерений, когда одно и то же свойство измеряется несколькими датчиками, а затем данные объединяются для повышения точности и устранения шума. В обоих случаях успешное выполнение задачи зависит от того, насколько быстро и эффективно требование сможет получить данные от необходимого количества датчиков.

Объединение данных и планирование для WSN были тщательно изучены многими англоязычными и русскоязычными авторами [1–3]. Однако было проделано мало работы над расписанием передачи данных с датчиков, которые поддерживают объединение данных. Расписание передачи данных с датчиков влияет на время, необходимое клиенту для получения достаточного количества данных от различных датчиков, чтобы иметь возможность применить алгоритм объединения. Таким образом, актуальной является задача, связанная с построением математических моделей беспроводных сенсорных сетей и разработкой методов анализа и оптимизации данных систем обслуживания.

**Целью данной бакалаврской работы** является изучение и исследование математических моделей беспроводных сенсорных сетей. Поставленная цель определила следующие задачи:

1. Изучение математических методов для анализа и оптимизации модели беспроводной сенсорной сети.
2. Разработка программы для анализа модели беспроводной сенсорной сети.
3. Проведение экспериментов с программой.

**Методологические основы исследования** беспроводных сенсорных

сетей массового обслуживания представлены в работах К.И. Володина, Н. Karl, Б.Я. Лихтциндера, М. Mitci, R.V, Hogg, D.L. Hall, F. Zhao.

**Теоретическая значимость бакалаврской работы.** Рассмотренная тандемная сеть массового обслуживания расширяет круг задач, решаемых в теории массового обслуживания, поскольку позволяет рассмотреть особенности структуры и функционирования беспроводных сетей массового обслуживания.

**Практическая значимость бакалаврской работы.** Представленные в работе результаты могут быть применены для математического моделирования беспроводных сенсорных сетей и других систем, которые можно смоделировать с помощью тандемных сетей массового обслуживания с групповым обслуживанием, для решения задач анализа, оптимизации и синтеза указанных систем.

**Структура и объём работы.** Бакалаврская работа состоит из введения, 6 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объём работы – 50 страниц, из них 43 страницы – основное содержание, включая 10 рисунков и 2 таблицы, список использованных источников – 23 наименования.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Первый раздел «Описание модели»** посвящён описанию модели тандемной сети массового обслуживания, которая будет использована для математического моделирования беспроводной сенсорной сети.

Рассматривается тандемная сеть, состоящая из систем массового обслуживания  $0, \dots, s - 1$ , в которой есть  $s$  классов требований, помеченных как  $0, \dots, s - 1$ . В сеть поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\lambda$  и класса  $0$ . Существует  $s$  независимых процессов группового обслуживания с экспоненциальными интенсивностями  $\mu_0, \dots, \mu_{s-1}$ . Процесс обслуживания  $i, i = 0, \dots, s - 1$ , при интенсивности  $\mu_i$  реализован таким образом, что все требования классов  $0, \dots, i$  одновременно получают обслуживание (но не требования класса  $i + 1, \dots, s - 1$ ). Требования классов  $0, \dots, s - 2$ , получающие обслуживание, повышают свой класс на 1 и остаются в сети. Требования класса  $s - 1$ , получающие обслуживание, покидают сеть.

Для отображения динамики функционирования тандемной сети массового обслуживания используется марковская цепь  $X$  с непрерывным време-

нем и пространством состояний  $\mathbb{N}_0^s$ , в котором  $n \in \mathbb{N}_0^s$  представляет состояние, в котором в системе находятся  $n_i$  требований класса  $i$ ,  $i = 0, \dots, s-1$ . Исходящие переходы из состояния  $n$  следующие. Для каждого  $0 \leq i \leq s-1$  происходит переход от  $n$  к  $U_i(n)$  с интенсивностью  $\mu_i$ , где  $U_i(n) = 0, n_0, \dots, n_{i-1}, n_i + n_{i+1}, n_{i+2}, \dots, n_{s-1}$  для  $i = 0, \dots, s-2$  и  $U_{s-1}(n) = 0, n_0, \dots, n_{s-2}$ . Кроме того, с интенсивностью  $\lambda$  происходит переход от  $n$  к  $n + e_0$ , где  $e_0 = (1, 0, \dots, 0)$  длиной  $s$ .

Для удобства обозначения вводятся функции  $S_i : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^s \rightarrow \mathbb{Z}^s$  при  $i = 0, \dots, s-1$ . Эти функции можно определить как  $S_i(x, n) = (n_1, \dots, n_i, x, n_{i+1} - x, n_{i+2}, \dots, n_{s-1})$  при  $i = 0, \dots, s-2$  и  $S_{s-1}(x, n) = (n_1, \dots, n_{s-2}, x)$ .

**Второй раздел «Анализ тандемной сети массового обслуживания»** посвящён уравнениям равновесия марковской цепи  $X$ , выводу стационарного распределения вероятностей состояний тандемной сети и формул для нахождения стационарных характеристик этой сети.

Причина введения  $S_i$  заключается в том, что  $S_i(x, n)$  предоставляет удобное средство для описания состояний с переходами в  $n$ . Действительно, игнорируя на данный момент граничные условия и учитывая  $n \in \mathbb{Z}^s$  при  $n_0 = 0$ , имеем  $U_i(S_i(x, n)) = n$  для всех  $0 \leq i \leq s-1$  и всех  $x \in \mathbb{Z}$ . Другими словами, для всех  $0 \leq i \leq s-1$  и  $x \in \mathbb{Z}$ ,  $S_i(x, n)$  отображает переход в  $n$  с интенсивностью  $\mu_i$ .

Пусть  $k = \min\{i | n_i > 0, 0 \leq i \leq s-1\}$ . Как уже было замечено в предыдущем разделе,  $U_i(n) = n$  при  $0 \leq i \leq k-1$ . Кроме того,  $S_i(x, n) = n$  при  $0 \leq i \leq k-2$  и  $0 \leq x \leq n_{i+1}$ . Также  $S_{k-1}(0, n) = n$ . Наконец, при  $n_0 = 0$  уравнение равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} \pi(n) \left( \lambda + \sum_{i=k}^{s-1} \mu_i \right) &= \sum_{x=1}^{n_k} \mu_{k-1} \pi(S_{k-1}(x, n)) + \\ &+ \sum_{i=k}^{s-2} \sum_{x=0}^{n_{i+1}} \mu_i \pi(S_i(x, n)) + \sum_{x=0}^{\infty} \mu_{s-1} \pi(S_{s-1}(x, n)). \end{aligned}$$

Для случая  $n_0 > 0$  легко проверить, что уравнение равновесия имеет следующий вид:

$$\pi(n) \left( \lambda + \sum_{i=k}^{s-1} \mu_i \right) = \lambda \pi(n - e_0).$$

Далее было определено стационарное распределение вероятностей состояний цепи Маркова  $X$  [4]:

$$\pi(n) = \prod_{i=0}^{s-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \bar{\mu}_i} \right)^{n_i} \prod_{i=0}^{s-1} \frac{\bar{\mu}_i}{\lambda + \bar{\mu}_i},$$

где  $n_i \geq 0$  при  $0 \leq i \leq s - 1$ .

Тут и далее используются значения  $\bar{\mu}_i = \sum_{k=i}^{s-1} \mu_k$ .

Из закона Литтла очевидно, что математическое ожидание длительности пребывания требований в сети с  $s$  классами требований будет равно

$$\mathbb{E}[W] = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{\bar{\mu}_i}.$$

Из формулы стационарного распределения легко получаем, что математическое ожидание продолжительности периода занятости сети равно

$$\mathbb{E}[T] = \lambda^{-1} \left( \left( \prod_{i=0}^{s-1} \frac{\bar{\mu}_i}{\lambda + \bar{\mu}_i} \right)^{-1} - 1 \right).$$

**Третий раздел «Сеть с оптимальным распределением интенсивности обслуживания»** посвящён нахождению распределения интенсивностей обслуживания, при котором математическое ожидание длительности пребывания требований в сети принимает минимальное значение, и условия, приближающие такое оптимальное распределение интенсивностей обслуживания. Также в этом разделе будут рассмотрены формулы для нахождения стационарных характеристик оптимальной сети и будет рассмотрено расстояние Хеллингера.

Подраздел 3.1 содержит понятие оптимальности сети с точки зрения математического ожидания времени пребывания требований в сети.

В сети с  $\mu_i = 0$  при  $0 \leq i < s - 1$  и  $\mu_{s-1} = \mu$  математическое ожидание времени пребывания требований в сети минимально среди всех сетей, обладающих свойством  $\mu_1 + \dots + \mu_{s-1} = \mu$ .

Тогда оптимальное распределение интенсивностей обслуживания:

$$\mu_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq i < s - 1, \\ \mu, & i = s - 1. \end{cases}$$

С учётом введённых обозначений, при  $n_i \geq 0, 0 \leq i \leq s - 1$ , стационарное распределение сети при оптимальной интенсивности обслуживания равно [4]

$$\pi^C(n) = \frac{\mu^s}{(\lambda + \mu)^s} \prod_{i=0}^{s-1} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^{n_i}, n \neq 0.$$

Тогда математическое ожидание времени пребывания требований в оптимальной сети

$$\mathbb{E}[W^C] = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{\bar{\mu}_i} = \sum_{i=0}^{s-1} \frac{1}{\mu} = \frac{s}{\mu}.$$

И математическое ожидание длительности периода занятости сети с оптимальной интенсивностью обслуживания

$$\mathbb{E}[T^C] = \lambda^{-1} \left( \left( \prod_{i=0}^{s-1} \frac{\bar{\mu}_i}{\lambda + \bar{\mu}_i} \right)^{-1} - 1 \right) = \lambda^{-1} \left( \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{-s} - 1 \right).$$

Подраздел 3.2 посвящён расстоянию Хеллингера. Оно используется для количественной оценки сходства между двумя распределениями вероятностей [5–6]. Расстояние Хеллингера принимает значения от 0 до 1, где 0 – это абсолютное совпадение. В данном случае оно используется для оценки разницы между распределениями вероятностей состояний исходной и оптимальной сети и вычисляется по следующей формуле

$$H(\pi, \pi^C) = \left( 1 - \prod_{i=0}^{s-1} \frac{\sqrt{\mu \bar{\mu}_i}}{\sqrt{(\lambda + \mu)(\lambda + \bar{\mu}_i)} - \lambda} \right)^{1/2}.$$

Далее в этом подразделе рассматриваются условия, приближающие значения расстояния Хеллингера к 0.

**В четвёртом разделе «Моделирование беспроводных сенсорных сетей»** описывается моделирование задачи сбора фиксированного числа наблюдений датчиков из беспроводной сенсорной сети тандемной сетью

массового обслуживания, представленной в первом разделе.

В разделе рассматриваются два вида расписания передачи данных с датчиков: децентрализованное и централизованное. Для каждого расписания определяются распределения интенсивностей обслуживания, формулы для вычисления основных стационарных характеристик сети [4, 7–9]. В конце раздела расписания сравниваются с помощью расстояния Хеллингера.

**Пятый раздел «Описание алгоритма и программы для анализа модели беспроводной сенсорной сети»** посвящён описанию алгоритма для анализа беспроводных сенсорных сетей с помощью тандемных сетей массового обслуживания и программы на языке программирования Python, в которой реализован этот алгоритм.

Подраздел 5.1 содержит описание блочного алгоритма программы. Основная концепция программы заключается в том, что пользователь вводит параметры сети, такие как интенсивность входящего потока, количество процессов обслуживания, экспоненциальные интенсивности обслуживания этих процессов, а также точность вычислений. Программа по описанным ранее формулам вычисляет стационарные вероятности состояний и характеристики исходной и оптимальной сетей, разницу между характеристиками сетей и расстояние Хеллингера. После этого все рассчитанные значения выводятся в соответствующие текстовые поля.

Также в программе имеется дополнительный функционал, позволяющий исследовать зависимость расстояния Хеллингера от интенсивности входящего потока и математического ожидания периода занятости сети от интенсивности входящего потока с помощью графиков.

Подраздел 5.2 посвящён описанию оконного интерфейса программы. В данном подразделе описываются все текстовые поля для ввода параметров и вывода рассчитанных значений, а также кнопки и привязанный к их нажатию функционал.

Подраздел 5.3 содержит описание проведённых с программой экспериментов и выводы, сделанные из результатов экспериментов. Основные результаты экспериментов приведены в Таблице 1. Для всех трёх экспериментов были выбраны параметры  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $s = 3$ ,  $\lambda = 2$ . Значения интенсивностей обслуживания для каждого из экспериментов указаны во втором столбце таблицы.

Таблица 1 – Данные, полученные в результате проведения трёх экспериментов с основной функцией программы

№	$\mu = (\mu_i)$	$H(\pi, \pi^C)$	$\mathbb{E}[W]$	$\mathbb{E}[W^C]$	$\frac{ \mathbb{E}[W^C] - \mathbb{E}[W] }{\mathbb{E}[W^C]}$	$\mathbb{E}[T]$	$\mathbb{E}[T^C]$	$\frac{ \mathbb{E}[T^C] - \mathbb{E}[T] }{\mathbb{E}[T^C]}$
1	(5,6,7)	0.1352	0.2753	0.1667	0.65	0.3242	0.1859	0.88
2	(8,8,8)	0.1444	0.2292	0.125	0.74	0.2617	0.1357	0.92
3	(1,1,20)	0.011	0.1431	0.1364	0.05	0.1571	0.1491	0.05

Очевидно, что сеть, параметры которой были искусственно приближены к параметрам существующей теоретически тандемной сети массового обслуживания с абсолютно оптимальным распределением интенсивности обслуживания (то есть модель сети в третьем эксперименте), будет считаться более оптимальной с точки зрения математического ожидания времени пребывания требований в сети и математического ожидания периода занятости сети.

По данным, полученным из результатов экспериментов, видно, что существует некоторая корреляция между значением расстояния Хеллингера, разницей между математическими ожиданиями времени пребывания требований и математическими ожиданиями периода занятости в исходной и оптимальной сетях. Все три эти характеристики для сети, приближенной к сети с оптимальным распределением интенсивности обслуживания, по значению меньше, чем для сетей из первого и второго эксперимента.

**Шестой раздел «Анализ модели мобильной станции мониторинга качества воздуха»** посвящён моделированию и анализу мобильной станции мониторинга качества воздуха, производимой компанией ЗАО «Радиян».

В простейшем случае мобильный пост мониторинга атмосферного воздуха состоит из двух ключевых устройств, объединённых в сеть: газоанализаторов Horiba AP5A-370 и Horiba APXA-370. Horiba AP5A-370 предназначен для измерения концентрации диоксида серы ( $SO_2$ ) в атмосферном воздухе. Газоанализатор Horiba APXA-370 предназначен для измерения концентрации нескольких химических веществ одновременно одним датчиком. В данной конкретной модификации вторым газоанализатором измеряется содержание диоксида серы ( $SO_2$ ) и сероводорода ( $H_2S$ ) в атмосферном воздухе.

Данная сеть газоанализаторов может быть смоделирована как тандемная сеть массового обслуживания с групповым обслуживанием, состоящая из

двух систем.

С моделью сети газоанализаторов также была проведена серия экспериментов, результаты которых приведены в Таблице 2.

Таблица 2 – Данные, полученные в результате проведения экспериментов с моделью сети газоанализаторов

№	$\lambda$	$\mu = (\mu_i)$	$H(\pi, \pi^C)$	$\mathbb{E}[W]$	$\mathbb{E}[W^C]$	$\frac{ \mathbb{E}[W^C] - \mathbb{E}[W] }{\mathbb{E}[W^C]}$	$\mathbb{E}[T]$	$\mathbb{E}[T^C]$	$\frac{ \mathbb{E}[T^C] - \mathbb{E}[T] }{\mathbb{E}[T^C]}$
1	1	(1,0.5)	0.274	2.667	1.333	1	4.0	1.778	1.25
2	0.6	(1,0.5)	0.242	2.667	1.333	1	3.467	1.6	1.12
3	0.6	(0.3,0.5)	0.115	3.25	2.5	0.3	4.75	3.438	0.38
4	0.6	(0.3,2)	0.0231	0.935	0.87	0.075	1.065	0.983	0.08

Параметры, приближающие абсолютно оптимальное распределение интенсивности обслуживания, делают беспроводную сенсорную сеть газоанализаторов более оптимальной с точки зрения математического ожидания времени пребывания требований в сети и математического ожидания периода занятости сети, то есть перераспределение интенсивности обслуживания таким образом, чтобы распределение было близко к абсолютно оптимальному распределению интенсивности обслуживания, делает сеть газоанализаторов более оптимальной с точки зрения как временных характеристик, так и общего уровня загрузки системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе были получены следующие основные результаты:

- Изучены математические модели беспроводных сенсорных сетей;
- Разработаны алгоритм и программа на языке программирования Python для анализа модели беспроводной сенсорной сети;
- Проведена серия экспериментов с различными параметрами сети, на основе которых были сделаны выводы, подтверждающие корректность рассмотренных в теоретической части работы теорем, лемм и следствий;
- Проведено исследование модели сети газоанализаторов, на основе результатов которого были сделаны выводы об уровне оптимальности рассматриваемой сети и рассмотрены различные варианты изменения сети таким образом, чтобы сделать её более оптимальной.

**Отдельные части бакалаврской работы были представлены на конференции:**

1. Буряченко А. В. Анализ модели беспроводной сети газоанализаторов. – Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: материалы студенческой научной конференции, 16 мая 2025 года, г. Саратов, — в печати.

**Основные источники информации:**

1. Володин, К. И. Информационная система сопровождения разработки встраиваемого программного обеспечения для беспроводных сенсорных сетей / К.И. Володин, А.И. Переходов. // Надёжность и качество сложных систем. — 2015. — №1 (9). — С. 85-90.
2. Karl, H. Protocols and Architectures for Wireless Sensor Networks / H. Karl, A. Willig. — London: John Wiley & Sons, Inc., 2005. — 525 с.
3. Лихтциндер, Б. Я. Беспроводные сенсорные сети. / Б. Я. Лихтциндер, Р. В. Киричек, Е. Д. Федотов, Е. Ю. Голубничая, А. А. Кочуров. — М.: Горячая Линия - Телеком, 2019. — 236 с.
4. Mitici, M. On a tandem queue with batch service and its applications in wireless sensor networks. / M. Mitici, J. Goseling, J. van Ommeren, M. de Graaf, R. J. Boucherie. // Queueing Syst. — 2017. — №87. — С. 81-93.
5. Павский, В. А. Теория массового обслуживания : учебное пособие / В. А. Павский. — Кемерово. : Кемеровский технологический институт пищевой промышленности, 2008. — 116 с.
6. Hogg, R. V. Probability and Statistical Inference. / R. V. Hogg, E. A. Tanis, D. L. Zimmerman. — New York: Macmillan Publishing Co., 1977. — 548 с.
7. Hall, D. L. Distributed Data Fusion for Network-Centric Operations. / D. L. Hall, C. Chong, J. Llinas, M. Liggins. — Boca Raton: CRC Press., 2012. — 498 с.
8. Zhao, F. Wireless Sensor Networks: An Information Processing Approach. / F. Zhao, L. Guibas. — San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, 2004. — 376 с.
9. Siva Ram Murthy, C. Ad Hoc Wireless Networks: Architectures and Protocols. / C. Siva Ram Murthy, B. S. Manoj. — Upper Saddle River: Prentice Hall, 2004. — 880 с.