МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС «КООРДИНАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322группы

направление 44.04.01 - Педагогическое образование

механико – математического факультета

Кауровой Оксаны Витальевны

Научный руководитель:
доцент к. ф.-м.н., доцент _______________ В.Г. Тимофеев

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент________________ Е.В. Разумовская

Саратов 2025

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Геометрия пространства сложна из-за необходимости представлять трёхмерные объекты и оперировать абстракциями. Классические методы решения стереометрических задач отнимают много времени, что обосновывает поиск вычислительных альтернатив. Одним из перспективных подходов является метод координат, который позволяет преобразовать пространственные фигуры в алгебраические выражения и уравнения. Этот метод обладает рядом преимуществ перед традиционными методами, такими как простота вычислений, возможность автоматизации процесса решения и наглядность представления результатов. При изучении стереометрии в 10 классе ученики знакомятся с координатным методом в пространстве, но из-за нехватки учебного времени осваивают его поверхностно. Программа ограничивается элементарными заданиями, не формируя устойчивых навыков применения метода. Это приводит к тому, что школьники недооценивают его потенциал и редко прибегают к нему на практике, несмотря на то, что метод координат даёт возможность решать геометрические задачи алгебраическими способами, делая процесс более прозрачным и эффективным.

Разработанный электронный образовательный курс «Координатный метод решения стереометрических задач» включает углубленное изучение тем базового курса геометрии.

Цель работы

Цель данной работы состоит в том, чтобы разработать и экспериментально проверить комплекс учебных заданий, направленных на формирование у учащихся умений применять координатный метод при решении стереометрических задач, и обосновать его эффективность для развития пространственного мышления.

Практическая значимость работы

Разработанные в ходе исследования материалы и полученные результаты мог ут быть эффективно применены в школьной практике для совершенствовани я преподавания математики.

Научная новизна работы

Научная новизна магистерской работы состоит в разработке дидактического материала трех уровней сложности: базовый, повышенный и высокий. На базовом уровне разработано пять вариантов, каждый из которых содержит по семь заданий; на повышенном уровне — пять вариантов по шесть заданий; на высоком уровне — пять вариантов по шесть заданий. К первому варианту каждого уровня прилагается подробное решение, а для остальных вариантов предусмотрены ключи.

Основное содержание работы. Данная работа состоит из введения, пяти разделов и заключения.

1 История метода координат

Основоположником аналитической (координатной) геометрии является французский математик и философ Рене Декарт (1596–1650). Им был разработан и впервые применен метод координат, связавший друг с другом геометрические и алгебраические понятия. Книга, обессмертившая имя Рене Декарта, в которой были изложены основы аналитической геометрии, появилась в 1637 г. в голландском городе Лейдене.

Р. Декарт внес в прямоугольную систему координат очень важное усовершенствование, введя правила выбора знаков. Большой вклад в развитие аналитической геометрии внес и другой французский математик — Пьер Ферма (1601–1665), пришедший почти к тем же самым идеям и почти в то же время. Он был математиком-любителем и о своих открытиях сообщал в письмах своим друзьям. Введение системы координат послужило основой для создания Исааком Ньютоном и Готфридом Лейбницем дифференциального и интегрального исчисления.

2 Координаты вектора в пространстве. Линейные операции над векторами в координатах

Метод координат — способ определять положение точки или тела с помощью чисел или других символов. Аналогично координатам вектора на плоскости, вводятся декартовы прямоугольные координаты вектора в пространстве. От произвольной точки О откладывают три некомпланарных попарно взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, то есть $\vec{i} \perp \vec{j}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$, $\vec{k} \perp \vec{i}$, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$.

Базисными векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, отложенными от точки О, определяются три взаимно перпендикулярные направленные прямые, которые называются координатными осями и обозначаются соответственно Ox, Oy и Oz. При этом говорят, что в пространстве задана декартова прямоугольная система координат, которую обозначают Oxyz.

По теореме: любому вектору $\vec{p}$ пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел (x; y; z) такая, что выполняется равенство $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Признак коллинеарности двух векторов в координатах: два нулевых вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ и $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их одноименные координаты $\vec{a} \| \vec{b} = \frac{\vec{a}_1}{\vec{b}_1} = \frac{\vec{a}_2}{\vec{b}_2} = \frac{\vec{a}_3}{\vec{b}_3}$.

Три ненулевых вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ и $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$ компланарны тогда и только тогда, когда существуют такие не равные нулю числа x, y, z, что выполняется векторное равенство $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0$, то есть когда система уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{cases}$ имеет нулевое решение (x; y; z).

2.1 Скалярное произведение векторов в координатах

Определение: Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Определение. Скалярное произведение двух векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Из определения скалярного произведения векторов следует, что угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится с помощью формулы $\cos\varphi = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}|\bullet|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\bullet\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

2.2 Проекции вектора на ось в координатах

Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и левую, если по часовой.

2.3 Декартовы прямоугольные координаты точки

Если в пространстве введена прямоугольная система координат Oxyz, то между множеством всех точек в пространстве и множеством всех упорядоченных троек действительных чисел (x; y; z) устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому, если дана тройка чисел (x; y; z), то говорят, что в системе координат Oxyz задана точка (x; y; z). В частности, точка O – началу системы координат – соответствует тройка чисел (0; 0; 0), то есть O (0; 0; 0)

2.4 Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет условиям:

1) $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку .

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Геометрическое свойство векторного произведения. Векторное произведение двух векторов равняется нулевому вектору тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны, т.е. $\vec{a} \times \overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \| \vec{b}$.

2.5 Смешанное произведение векторов

Определение: Если вектор $\vec{a}$ векторно умножить на вектор $\vec{b}$, а полученный вектор скалярно умножить на вектор $\vec{c}$, то получится число, называемое смешанным произведением векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Обозначение: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ или $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Теорема (смешанное произведение в координатной форме):

Пусть заданы три вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ и $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Тогда $\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix}$

3 Решение простейших задач стереометрии в координатах

3.1 Расстояние между двумя точками

Рассмотрим решение простейших задач стереометрии в координатах.

а) Расстояние между двумя точками. Пусть даны две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB}$ имеют координаты имеют координаты: $\overrightarrow{AB}(x_1; y_1; z_1)$, $\overrightarrow{OB}(x_2; y_2; z_2)$. По правилу вычитания векторов, заданных своими координатами, находим (рис.6): $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}(x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_2)$.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ задан координатами начала $A(x_1; y_1; z_1)$ и конца $B(x_2; y_2; z_2)$, то его длина $\overrightarrow{|AB|}$ находится по формуле $\overrightarrow{|AB|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

3.2 Деление отрезка в данном отношении

Деление отрезка в данном отношении. Пусть отрезок AB задан в системе координат Oxyz координатами своих концов $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, точка C $(x; y; z)$ делит отрезок AB в данном отношении λ: $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$.

Имеем (рис.3): $A(x_1; y_1; z_1) \Rightarrow \overrightarrow{OA}(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2) \Rightarrow \overrightarrow{OB}(x_2; y_2; z_2)$, C $(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{OC}(x; y; z)$. Так как $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, то исходя и учитывая получаем $\overrightarrow{OC}$ - $\overrightarrow{OA}$ = λ($\overrightarrow{OB}$ - $\overrightarrow{OC}$) =>(1 + λ)$\overrightarrow{OC}$ = $\overrightarrow{OA}$ + λ$\overrightarrow{OB}$ => $\overrightarrow{OC}$) = $\frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ (при λ≠-1).

В координатах векторное равенство $\overrightarrow{OC}$) = $\frac{\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}}{1+\lambda}$ (при λ≠-1) равносильно системе $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

Формулы $x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$ позволяют находить координаты точки С, делящей отрезок АВ в данном отношении λ (λ≠ -1). В частности, если точка С – середина отрезка АВ (λ = 1), то ее координаты находятся по формулам: $x = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y = \frac{y_1+y_2}{2}$, $z = \frac{z_1+z_2}{2}$.

4 Уравнение прямой в пространстве

4.1 Векторное уравнение прямой

Пусть прямая L задана её точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно через $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$. По правилу треугольника $\vec{r} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}$. Вектор $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$, поэтому $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. Здесь t – скалярный множитель, называемый параметром, который может принимать различные значения в зависимости от положения точки M на прямой. Таким образом, уравнение прямой можно записать в виде: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{s}$. Уравнение: $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{s}$ называется векторным уравнением прямой.

4.2 Параметрические уравнения прямой

Заметим, что $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $t\vec{s} = (tm, tn, tp)$, тогда уравнение $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{s}$ можно записать в виде:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} + tm\vec{i} + tn\vec{j} + tp\vec{k},$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x_0 + tm)\vec{i} + (y_0 + tn)\vec{j} + (z_0 + tp)\vec{k}.$$

Равенство является верным, если коэффициенты перед одинаковыми векторами равны: $\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$ Уравнение называется параметрическим уравнением прямой.

4.3 Канонические уравнения прямой

Пусть $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой L и $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка, лежащая на этой прямой. Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой L, следовательно, $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$ координаты вектора $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ и вектора $\vec{s} = (m, n, p)$ пропорциональны: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$. Уравнения называются каноническими уравнениями прямой в пространстве.

4.4 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В качестве направляющего вектора $\vec{s}$ можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, т.е. $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Поскольку прямая проходит через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, то согласно каноническим уравнениям, получим $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ уравнения прямой, проходящей через две данные точки.

4.5 Общие уравнения прямой

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$ Каждое уравнение этой системы определяет плоскость ($\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$).

5 Основные задачи, связанные с прямой и плоскостью в пространстве

5.1 Уравнение плоскости

Для любой точки M пространства, не принадлежащей плоскости α, условие $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ не выполняется, так как векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ не перпендикулярны. Равенство $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ называют векторным уравнением плоскости α (или уравнением плоскости α в векторной форме).

Так как вектор $\overrightarrow{M_0M}$ имеет координаты: $\overrightarrow{M_0M}$ $(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$, то векторное уравнение $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$ плоскости принимает в координатной форме вид: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = O$. Уравнение $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = O$ называется уравнением плоскости по точке и вектору нормали.

5.2 Угол между прямой и плоскостью

Определение: Углом между прямой и плоскостью называется любой из смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость.

Обозначим через φ угол между плоскостью Q и прямой L, а через θ – угол между векторами $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{s} = (m, n, p)$, тогда

$\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$, следовательно

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{s}|}{|\vec{n}||\vec{s}|} = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ .$$

Рассмотрим пересечение прямой с плоскостью. Найдём точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$.

Для этого необходимо решить систему уравнений: $\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$

Представим уравнения прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \\ z = z_0 + tp. \end{cases}$

Подставим полученные выражения в уравнение плоскости и выразим параметр: $A(x_0 + tm) + B(y_0 + tn) + C(z_0 + tp) + D = 0$,

$t(Am + Bn + Cp) + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,\ t = -\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}.$

Подставляя найденное значение параметра t в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения с плоскостью.

5.3 Пересечение прямой с плоскостью

Найдём точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ с плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$. Для этого необходимо решить систему уравнений: $\begin{cases}\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},\\ Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$ Представим уравнения прямой в параметрическом виде: $\begin{cases}x=x_0+tm,\\ y=y_0+tn,\\ z=z_0+tp.\end{cases}$ Подставим полученные выражения в уравнение плоскости и выразим параметр: $A(x_0+tm)+B(y_0+tn)+C(z_0+tp)+D=0$,

$t(Am+Bn+Cp)+Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, $\qquad t=-\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$.

Подставляя найденное значение параметра t в параметрические уравнения прямой, получим координаты точки пересечения с плоскостью

5.4 Расстояние от точки до плоскости в координатах

Расстояние от данной точки M_0 до плоскости α равно длине перпендикуляра M_0M_1, опущенного из точки M_0 на плоскость α.

Проведем через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, не лежащую на плоскости α, прямую h, перпендикулярную α. Так как вектор нормали плоскости α является направляющим вектором прямой h, то для поиска координат x_1, y_1, z_1 точки M_1 пересечения прямой h и плоскости α достаточно, чтобы решить систему уравнений относительно параметра t: $\begin{cases}Ax+By+Cz+D=0,\\ x=x_0+At,\\ y=y_0+Bt,\\ z=z_0+Ct.\end{cases}$

Решением этой системы является $t_0=\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A\cdot A+B\cdot B+C\cdot C}=\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{A^2+B^2+C^2}$, что позволяет нам найти искомые координаты точки пересечения прямой h и плоскости α: $d=|M_0M_1|=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}=\sqrt{(At_0)^2+(Bt_0)^2+(Ct_0)^2}=|t_0|=\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Если точка M_0 лежит на плоскости, то

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ и искомое расстояние равно нулю, что также следует из полученной формулы $d = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Расстояние от начала координат O(0; 0;0) до плоскости α равно $\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

5.5 Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

Определение. « Расстояния между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра» [15].

А.А. Прокофьев в статье [17] говорит о том, что для решения задач на нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми можно выделить несколько подходов: метод построения общего перпендикуляра, метод параллельных прямой и плоскости, метод параллельных плоскостей, метод ортогонального проектирования.

Для того, чтобы найти расстояния между двумя скрещивающимися прямыми, воспользуемся утверждением: «расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые».

После изучение пройденного материала ученикам предлагается решить тесты трех уровней сложности: базовый, повышенный и высокий.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После проведения тестирования по теме «Координатный метод решения стереометрических задач» были выделены следующие результаты и проведена соответствующая корректировка тестов базового, среднего и повышенного уровня сложности.

Средневзвешенный показатель успеваемости, усредненное по трем тестам составляет 62%. Он показывает, что с учетом коэффициента сложности заданий, 62% учащихся успешно прошли тестирование. После проведение тестирования была проведена соответствующая корректировка курса для более оптимального изучения.

При апробации пришли к выводу: разработанный курс заданий по теме «Координатный метод решения стереометрических задач», предназначенный для уроков математики, а также элективных курсов по математике, послужит хорошей основой для усвоения данной темы на более глубоком уровне.

После апробации пришли к выводу, что разработанный курс заданий по теме: «Координатный метод решения стереометрических задач», предназначенный для уроков математики, а также элективных курсов по математике, послужит хорошей основой для усвоения данной темы на более глубоком уровне.

Таким образом, практическое значение данной темы заключается в том, что этот электронный образовательный курс могут использовать учащиеся средних общеобразовательных школ, студенты средних специальных учебных заведений, студенты педагогических вузов и преподаватели.