

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

кафедра математического анализа

**ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС «ИСПОЛЬЗОВАНИЕ  
СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ С ПАРАМЕТРАМИ»**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

Студента(ки) 3 курса 322 группы

направления **44.04.01 – Педагогическое образование**

механико-математического факультета

**Квитка Аллы Андреевны**

Научный руководитель  
доцент, к.ф.-м. н, доцент

Л.В. Сахно

Заведующий кафедрой  
зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,  
доцент

Е.В.Разумовская

Саратов 2025

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы исследования**

Задачи с параметрами относятся к существенной и важной части содержания современного математического образования. Они играют большую роль в формировании и развитии у учащихся логического мышления, а также математической культуры. Умение решать такие задания считается признаком высокого уровня знаний математики. Недостаточно простого применения «зазубренных» формул, необходимо понимание учениками закономерностей, наличие у них навыка анализа конкретного случая на основе общих свойств объекта, системности и последовательности.

К моменту завершения обучения, ученики владеют как правило стандартными способами решения задач с параметрами. Они пользуются известными алгоритмами решения, а в случае неудачи, считая проблему неразрешимой, не пытаются продолжить поиск ответа. Это свидетельствует о том, что учащиеся не в полной мере владеют полученными знаниями и исследовательскими умениями.

Решение задач с параметрами требует от учащихся нестандартного мышления. Отметим, что знание дополнительных методов и приемов решения задач способствует развитию логического и нового, нешаблонного мышления.

Развитие исследовательских навыков в процессе решения задач с параметром способствует достижению следующих целей: сформировать умение самостоятельно находить недостающую информацию в образовательных ресурсах, выделять несколько вариантов решения задачи и находить самый рациональный, а также устанавливать причинно-следственные связи.

В учебных программах многих стран, включая Россию, задачи с параметрами присутствуют как в школьной программе, так и в программах высшего образования. Они могут включать в себя различные типы задач, где параметры представляются числами, функциями или условиями задачи.

В педагогике разработаны методические подходы к преподаванию задач с параметрами. Учителя используют различные методы и стратегии, чтобы помочь учащимся понять суть задачи, найти соответствующие параметры и разработать алгоритмы решения.

Примером может послужить учебно-методическое пособие Власова А.А. и Барышенский Д.С. [1], с помощью которого можно начинать изучение методов решения задач с параметром даже с 5-6 классов.

М.Г. Гунашева в статье [2] отмечает: «Компьютеризация и внедрение современных информационных технологий требуют математической грамотности человека на каждом рабочем месте».

Также представляет интерес статья Кашицыной Юлии Николаевны, кандидата педагогических наук, доцента кафедры общеобразовательных дисциплин ГБОУ ВО МО «Академия социального управления», на тему «Методика обучения решению задач с параметрами с использованием программы «GEOGEBRA»» [3], которая показывает актуальность применения современных технологий в преподавания данной темы.

Однако степень разработанности данного направления может быть дополнительно развита и усовершенствована в будущем, особенно с учетом быстрого развития информационных технологий и возможностей компьютерного моделирования.

Задача с параметром даёт возможность участнику Единого государственного экзамена (ЕГЭ), претендующему на поступление в вуз с высокими требованиями к уровню математической подготовки, показать умение верно проводить рассуждения, проверки, преобразования. Поэтому за задачу берутся в основном выпускники с высоким уровнем подготовки. Выполнение задания является одним из характерных признаков наиболее сильной группы участников. Навыки, необходимые для правильного выполнения данного задания, формируются в течение многих лет обучения математике.

Далее рассмотрим статистику выполнения задания с параметром в ЕГЭ по годам. По данным ФИПИ [4], лишь малый процент выпускников приступают к решению таких задач, и процент их верного решения невысок, но в соответствии с рисунком 1, с рисунком 2 замечен рост количества школьников, которые выполняют данное задание, что иллюстрирует тенденцию роста математической культуры выпускников школ, позволяющей довести до конца решение данной задачи высокого уровня сложности. При этом остается большой потенциал роста результатов этой задачи, для чего требуется систематическое формирование соответствующих умений начиная с основной

школы. Не следует пропускать изучение простейших задач с параметром как при изучении линейной и квадратичной функций.

| Год                        | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 |
|----------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Средний процент выполнения | 3    | 1    | 0,5  | 1,2  | 4,2  | 2,4  | 2    | 5,8  | 6,7  | 5,2  |

Рисунок 1 — Процент выполнения задания с параметром в ЕГЭ по годам



Рисунок 2 — Графическая иллюстрация динамики выполнения задания с параметром в ЕГЭ по годам

Также задачи с параметром часто встречаются в различных олимпиадах. В качестве примера можно рассмотреть всесибирскую открытую олимпиаду школьников по математике [5]. В отборочном этапе олимпиады в 2023-2024 учебном году для 10 класса присутствовало следующее задание по поиску геометрического места точек  $(x, y)$  координатной плоскости, для которых при

любом значении параметра  $t$  из интервала  $[-1, 1]$  выполнено неравенство

$$t^2 + xt + y \geq 0.$$

В дополнение приведем пример из открытой интернет-олимпиады школьников по математике (ИТМО) [6]. В олимпиаде в 2024-2025 году для 11 класса присутствовало задание по поиску пары чисел  $(p, n)$ , где  $p$ - простое, а  $n$ - целое и при этом  $p^4 + a = n^2 + 5np$ .

Тем самым можно увидеть что задачи с параметрами имеют важное значение в математике и могут иметь будущее как в классическом курсе школьной математики, так и за ее пределами.

### **Цель и задачи работы**

Цель работы – разработать и апробировать методику обучения решению задач с параметрами с использованием свойств функций, направленную на формирование исследовательских умений и углубленного понимания математических закономерностей у учащихся 10–11 классов.

Для достижения поставленной цели были выдвинуты следующие задачи:

- Провести анализ методической литературы по изучаемой тематике;
- Систематизировать типы задач с параметрами, решаемые с применением ключевых свойств функций;
- Разработать классификацию методов решения задач с параметрами на основе применения свойств функций;
- Подобрать и адаптировать комплекс задач с параметрами для каждого из рассматриваемых свойств функций, обеспечивающий постепенное наращивание уровня сложности;
- Экспериментально проверить эффективность предложенной методики в условиях реального образовательного процесса.

### **Практическая значимость работы**

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанный комплекс задач и методические материалы могут быть использованы учителями математики в общеобразовательных школах, лицеях и гимназиях для проведения уроков углубленного изучения математики, организации факультативных занятий и работы математических кружков, подготовки учащихся

к олимпиадам и ЕГЭ профильного уровня, индивидуальной работы с мотивированными учащимися.

### **Научная новизна работы**

В работе предложена комплексная систематизация методов решения задач с параметрами на основе применения свойств функций, где каждое свойство рассматривается как самостоятельный методологический инструмент и разработана классификация, связывающая конкретные типы задач с параметрами с оптимальными свойствами функций для их решения. Также научная новизна данной работы заключается в адаптации сложного математического аппарата высшей школы для доступного изучения в старших классах и демонстрации его эффективности при решении задач с параметрами, это открывает новые возможности для раннего знакомства с высшей математикой и формирования глубокого понимания математических концепций еще в школе.

### **Основное содержание работы**

Структура работы отражает логику исследования и включает введение, десять разделов, заключение, списка использованных источников и приложения. Первый раздел посвящен истории возникновения задач с параметрами. Во втором разделе рассматривается общее математическое содержание темы, основные определения и классификации. Затем каждый из последующих разделов раскрывает отдельное свойство функции, которое часто является полезным при решении задач с параметрами. В заключении приведены результаты апробации данного материала. В приложениях представлены материалы для практического использования, а конкретно тесты и примеры задач по каждому из разделов.

#### **1 История возникновения задач с параметрами**

Проведен исторический обзор: от первых упоминаний задач с параметрами в трудах индийских математиков (Ариабхатта, Брахмагупта) и ал-Хорезми до введения понятия переменной величины Рене Декартом. Показана эволюция методов решения таких задач.

#### **2 Математическое содержание темы**

Даны основные определения (параметр, контрольные точки, решение уравнения с параметром). Представлена классификация задач с параметрами.

ми на четыре типа и основных методов их решения, включая аналитический, графический и метод применения свойств функций.

### **3 Области определения и значения функции**

Рассмотрены методы решения задач с параметром, основанные на анализе области определения и множества значений функций. Предложен алгоритм решения и проиллюстрирован на примерах задач.

### **4 Инвариантность функции**

Исследованы задачи, в которых ключевую роль играет инвариантность функции относительно замены переменной. Разработан алгоритм решения задач на единственность решения с использованием инвариантности. Рассмотрены функциональные уравнения.

### **5 Периодичность функции**

Изучены методы решения задач с параметрами, основанные на свойствах периодических функций. Приведены примеры задач, где периодичность позволяет существенно упростить решение.

### **6 Монотонность функции**

Систематизированы подходы к решению задач с параметром, использующие свойства монотонных функций. Рассмотрены случаи одинаковой и разной монотонности функций в уравнении или неравенстве. Показана связь монотонности с итерациями функций.

### **7 Ограниченность функции**

Проанализированы задачи, решение которых основано на свойствах ограниченных функций и оценках их множеств значений. Описаны методы оценок, неотрицательности функции, а также методы, связанные с нахождением минимумов и максимумов.

### **8 Непрерывность функции**

Рассмотрено применение свойств непрерывных функций (теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса) к решению задач с параметрами. Показано, как непрерывность используется как вспомогательное свойство при решении сложных задач.

### **9 Дифференцируемость функции**

Исследовано применение аппарата дифференцирования для решения задач с параметрами. Рассмотрены различные аспекты: касательные к кривым,

критические точки и экстремумы, монотонность, наибольшие и наименьшие значения, правило Лопиталя.

## **10 Интегрируемость функции**

Изучено применение интегрального исчисления к задачам с параметрами. Рассмотрены методы нахождения первообразных, вычисления определенных интегралов и их геометрический смысл (площади фигур). Приведены примеры задач с параметрами, решаемые с помощью интегрирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магистерская работа, посвященная применению свойств функции для решения задач с параметром, прошла апробацию в МАОУ «Медико-биологический лицей» с 11 марта по 7 апреля 2025 года, что позволило не только систематизировать теоретические знания, но и проверить их эффективность в реальных педагогических условиях.

Апробация проводилась в МАОУ «МБЛ» в 11 «Б» классе. Класс является профильным с физико-математическим уклоном.

За время изучения учащимися были написаны работы по каждому разделу. Подача материала была построена таким образом, что задания из последующих разделов часто требовали знания из предыдущих, следовательно, у учащихся выстроилась последовательная и неразрывная цепочка в изучении материала.

Лучше всего ученики усвоили базовые понятия - «Области определения и значения» (средняя оценка 4.39) и «Инвариантность» (средняя оценка 4.11), что свидетельствует о хорошем понимании фундаментальных свойств функций. Наибольшие трудности вызвали темы «Ограниченность» (средняя оценка 3.10) и «Периодичность» (3.56), где более трети класса получили оценки «2» и «3». «Дифференцируемость» и «Интегрируемость» показали средние результаты (средняя оценка 3.57-3.81), но с высоким разбросом баллов - от 0 до 18, что указывает на значительный разрыв в подготовке учеников. Низкая явка на работы по «Непрерывности» (47.6%) и «Интегрируемости» (66.7%) может объясняться как сложностью данных тем, так и возможными уважительными причинами пропуска занятий. Поляризация результатов особенно заметна в «Монотонности» - при средней оценке 3.67 есть как отличные результаты (33.3% пятерок), так и много неудач (26.7% двоек). Также можно заметить, что сложные темы имеют самый большой разброс результатов.

Выявлена сильная корреляция между непрерывностью и дифференцируемостью (0.72), что не удивительно, так как в данных темах очень много точек соприкосновения. Присутствует умеренная связь между остальными темами (0.4-0.6).

Таким образом, проведенное исследование вносит существенный вклад в теорию и методику обучения математике и открывает широкие возможности

для дальнейшей работы, направленной на повышение эффективности математического образования и развитие интеллектуального потенциала учащихся.

Перспективные векторы развития данной тематики видятся в следующих направлениях:

- Разработка интерактивных цифровых ресурсов (на платформах GeoGebra, Desmos и др.), позволяющих в динамике исследовать поведение функций и семейств функций в зависимости от параметра. Это наглядно демонстрирует учащимся процессы, которые ранее требовали сложного абстрактного представления;
- Углубленное изучение применения задач с параметрами и функционального подхода в смежных дисциплинах: физике (задачи на оптимизацию, движение), информатике (анализ алгоритмов, сложность вычислений), экономике (моделирование рыночных процессов);
- Более глубокая проработка методик, направленных не только на математический результат, но и на развитие soft skills: умения работать в команде над сложной проблемой, представлять и защищать свое решение, проводить самоанализ и рефлекссию собственной деятельности;
- Внедрение разработанной методики в систему повышения квалификации учителей математики, создание методических кейсов и проведение мастер-классов для распространения успешного педагогического опыта.