МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

кафедра математического анализа

ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС «ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ФАКТЫ ГЕОМЕТРИИ»

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322группы

направление 44.04.01 - Педагогическое образование

механико – математического факультета

Пелиховой Ольги Вячеславовны

Научный руководитель:
доцент к. ф.-м.н., доцент _______________ В.Г. Тимофеев

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент________________ Е.В. Разумовская

Саратов 2025

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

В эпоху стремительных социальных изменений система школьного образования ставит перед собой новые, обусловленные современными условиями, цели и задачи. Сегодня трудно представить наше будущее спустя несколько лет, а школа призвана готовить учеников к жизни именно в тех условиях, которые даже сложно предсказать. В этой связи приоритетом становится формирование у школьников ключевых личностных качеств:

- универсализма;
- инициативности;
- способности к инновационному мышлению;
- умения находить решения в нестандартных ситуациях;
- навыка принятия самостоятельных решений.

Создание соответствующей образовательной среды отвечает как общественным запросам, так и интересам учащихся.

Каждый человек наделён интеллектуальным и творческим потенциалом, хотя его выраженность варьируется. Однако на практике наблюдается тревожная тенденция: по мере взросления у многих школьников снижается способность к креативному мышлению. Педагогический опыт показывает, что большинство учащихся избегают проявлений самостоятельности в учёбе, испытывают тревогу при столкновении с нестандартными задачами, требующими творческого подхода, предпочитают структурированную информацию и алгоритмы, допускающие однозначные решения.

Среди школьных дисциплин особый потенциал для преодоления этих проблем имеет геометрия. Этот предмет формирует логическую и эвристическую культуру, развивает математическую интуицию и пространственное воображение, помогает преодолеть шаблонность мышления, учит работать с нетривиальными идеями. Кроме того, геометрия занимает важное место в системе аттестации, так как входит в число популярных предметов по выбору на экзаменах в 9-м и 11-м классах, а также представлена в заданиях ЕГЭ по математике;

С переходом к профильному обучению требования к геометрической подготовке старшеклассников продолжают расти. В контексте предпрофильной подготовки учащихся 9 х классов элективный курс по геометрии становится особенно востребованным. Он способствует формированию математической компетентности и общекультурной эрудиции.

В школьном курсе геометрии рассматриваются важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но невозможно включить все известные утверждения и соотношения, которые накопило человечество за многие годы, в школьный учебник геометрии.

В действительности многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не входят в основной курс геометрии. Многие из них сейчас выглядят малоинтересными, несовершенными и встречаются сейчас только в энциклопедиях. Однако некоторые из них продолжают жить и по сей день.

Разработанный электронный образовательный курс «Замечательные теоремы и факты геометрии» включает как углубленное изучение тем базового курса геометрии, так и тем, выходящих за рамки общеобразовательных программ.

Цель работы

Цель работы состоит в том, чтобы способствовать развитию логического мышления и эвристической культуры учащихся, их общекультурной компетентности, развитию их интеллектуальных и креативных способностей.

Практическая значимость работы

Разработанный электронный образовательный курс позволяет усовершенствовать учебный процесс, что приведёт к повышению результативности обучения, формированию общекультурных и профессиональных компетенций учеников.

Научная новизна работы

Научная новизна работы заключается в дополнении и уточнении значимости применения электронных образовательных курсов в процессе современного образования. В работе представлен дидактический материал трех уровней сложности: базовый, повышенный и высокий. На базовом уровне разработано пять вариантов, каждый из которых содержит по семь заданий; на повышенном уровне — пять вариантов по пять заданий; на высоком уровне — пять вариантов по четыре задания. К первому варианту каждого уровня прилагается подробное решение, а для остальных вариантов предусмотрены ключи.

Основное содержание работы.

Работа состоит из введения, шести разделов и заключения.

Разделы включают в себя теоремы геометрии, не входящие в школьный курс, либо изучаемые ознакомительно.

1 Теорема Чевы и Менелая

Теорема названа в честь древнегреческого учёного Менелая (I в. н.э.), которая была им доказана. Долгое время её называли «теоремой о секущих».

Формулировка теоремы Менелая: если прямая пересекает стороны или продолжения сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1 и C_1, не совпадающие с вершинами треугольника, то имеет место равенство

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{\overline{A_1C}}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{\overline{B_1A}}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{\overline{C_1B}}} = -1.$$

Многими веками позже к доказательству теоремы Менелая приложил руку итальянский ученый Джованни Чева и вместе с тем вывел свою теорему.

Теорема Чевы звучит следующим образом: Пусть на сторонах BC, CA, AB треугольника ABC или их продолжениях взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1, не совпадающие с вершинами треугольника. Тогда если прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются или попарно параллельны, то

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} \cdot \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} \cdot \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

В разделе приведены доказательства теорем, а также задачи на их применение.

2 Теорема Вариньона

Вариньон вывел очень важную теорему, позволяющую решать сложные геометрические задачи более простыми методами. Он первым обратил внимание на, казалось бы, довольно очевидный факт: середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма. В дальнейшем полученный параллелограмм назвали параллелограммом Вариньона.

Из доказательства теорема выведены следующие следствия:

1. Параллелограмм Вариньона является ромбом тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

а) диагонали равны;

б) бимедианы перпендикулярны.

2. Параллелограмм Вариньона является прямоугольником тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

а) диагонали перпендикулярны

б) бимедианы равны

3. Параллелограмм Вариньона является квадратом тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

а) диагонали равны и перпендикулярны;

б) бимедианы равны и перпендикулярны.

3 Теорема Морлея

Доказательство теоремы о трисектрисах Морлей опубликовал в 1914 году – через 15 лет после того, как нашел его. В 1924 году он изложил это доказательство более подробно и существенно усилил первоначальный результат. Доказательство Морлея весьма элегантно, но в то же время достаточно сложно.

Первые элементарные доказательства теоремы Морлея были получены в 1909 году индусами М. Сатьянараяном и М. Т. Нараньенгаром. В настоящее время известно уже, по крайней мере, несколько десятков доказательств теоремы Морлея. Однако интерес к ней не затухает, и все время появляются новые доказательства, обобщения и варианты этого изящного предложения.

В работе рассмотрены два доказательства вышеуказанной теоремы и приведены для примера задачи на её применение.

4 Теорема Птолемея

Теорема названа по имени Клавдия Птолемея (II век), который использовал её для вывода некоторых соотношений в тригонометрии.

Формулировка теоремы: Произведение диагоналей вписанного четырёх-угольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство теоремы основано на принципе подобия треугольников. Например, для четырёхугольника ABCD, вписанного в окружность, на диагонали AC выбирают точку E так, чтобы угол ABD был равен углу CBE.

Некоторые этапы доказательства:

- Треугольник ABD подобен треугольнику BCE: у этих треугольников по два равных угла: угол ABD равен углу CBE (по построению точки E), угол ADB равен углу ACB (эти углы — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу).

- Треугольник ABE подобен треугольнику BCD: у этих треугольников по два равных угла: угол ABE равен углу DBC (углы ABD и EBC равны по построению, угол DBE — общий), угол BAC равен углу BDC (эти углы — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу).
- Полученные равенства складывают, получая основное равенство теоремы Птолемея, что и требовалось доказать.

5 Теорема Тебо

В 1938 году выдающийся французский математик Виктор Тебо, опубликовал в одном из журналов следующую теорему (без доказательства): опишем около произвольного треугольника ABC окружность, а также и впишем в него окружность. Затем выберем произвольно на стороне BC точку P и рассмотрим две окружности, первая из которых касается отрезков AP и BC и (внутренним образом) описанной окружности, вторая же – отрезков AP и AC и (опять же, внутренним образом) описанной окружности. Тогда центры этих окружностей коллинеарны.

Известно, что первые (полностью вычислительные) доказательства этой теоремы были получены в 1970-ых годах, а первое синтетическое и вовсе появилось лишь в 1986 году. А одно из последних геометрических найдено В.Ю. Протасовым в начале 2000-ых.

Доказательство данной теоремы разделены на несколько подразделов:

5.1 Вспомогательные леммы

Лемма 1. Рассмотрим окружности α и β, касающиеся в точке T. Возьмем прямую, касающуюся окружности β в точке Q и пересекающую окружность α в точках A и B. Пусть QT пересекает окружность α в точке L. Тогда L – середина дуги AB, причем LQ·LT = LA2 = LB2.

Возможны два случая расположения окружностей (Рисунок 27). В обоих случаях доказательство проводится аналогично.

Лемма 2. К окружностям с центрами в точках O1 и O2 провели общую внутреннюю касательную A1A2 и общую внешнюю касательную B1B2 (точки A1 и B1 принадлежат окружности с центром O1). На отрезках A1A2 и B1B2 как на диаметрах построили окружности ω1 и ω2. Тогда прямая O1O2 – радикальная ось этих окружностей.

Лемма 3. В условиях предыдущей леммы точка пересечения A1B1 и A2B2 лежит на прямой O1O2.

5.2 Центральная теорема

На стороне BC треугольника ABC выбрали произвольную точку M. Окружность α касается описанной окружности треугольника ABC в точке T, отрезка MB в точке Q, P – точка касания окружности α и прямой AM. Тогда точка I (центр вписанной окружности треугольника ABC) лежит на прямой QP.

5.3 Доказательство теоремы Тебо

Пусть O1 и O2 – центры окружностей, вписанных в криволинейные треугольники AMB и AMC соответственно. По центральной теореме P1, I, Q1 и P2, I, Q2 – лежат на одной прямой. Тогда по *лемме 3* точка I лежит на прямой O1O2. Окружности, рассмотренные в теореме (с центрами O1 и O2) называются окружностями Тебо треугольника ABC.

Покажем, как построить окружность Тебо для данного треугольника ABC и точки M. Проведем через инцентр треугольника ABC прямую, перпендикулярную биссектрисе угла AMB, до пересечения с прямыми AM и BM в точках P и Q. Тогда по центральной теореме точки P и Q лежат на окружности Тебо. Затем проведем перпендикуляр к прямой BC через Q. Точка пересечения этого перпендикуляра с биссектрисой угла AMB будет центром окружности Тебо.

Из построения следует, что если прямая содержащая точки касания окружности с прямыми BC и AM проходит через инцентр, то эта окружность – окружность Тебо. Как и центральная теорема, теорема Тебо также допускает несколько случаев расположения окружностей.

6 Теорема Штейнера-Лемуса

Существует ряд геометрических задач, которые околдовывают каждого, кто по воле случая сталкивается с ними. По-видимому, это было характерно для геометрии даже в древнее время. Стоит только вспомнить три знаменитые задачи древности — удвоение куба, трисекцию угла и квадратуру круга. Попытки решить эти задачи привели к развитию новых ветвей математики.

Одна всегда возбуждавшая интерес теорема может быть сформулирована следующим образом:

Если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник является равнобедренным.

Это с виду простое утверждение не имеет простого классического доказательства. Этот факт тем более удивителен, что заменив слово "биссектрисы" на "медианы" или "высоты", получаем утверждения, доказательства которых элементарны.

Одно из простейших доказательств опирается на следующие две леммы:

Лемма 1.

Если две хорды окружности стягивают различные острые углы с вершинами на этой окружности, то меньшему углу соответствует меньшая хорда.

Лемма 2.

В треугольнике с двумя различными углами меньший угол обладает большей биссектрисой.

Существует также алгебраическое доказательство данной теоремы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Электронный образовательный курс «Замечательные теоремы и факты геометрии» был апробирован среди учеников 8-10 классов МОУ СОШ им. Героя России А.И. Потапова города Шиханы Саратовской области. В результате проведенной работы реализованы следующие задачи:

- изучен и классифицирован теоретический материал по теме, выявлена актуальность применение материала при решении задач, встречающихся в экзаменационных работах предыдущих лет,

- проанализирован уровень преподавания данного материала в рамках школьной программы,

- разработана система задач, дифференцированная по уровню сложности – сложность первого, второго и третьего уровня.

Результаты апробации разработанного электронного образовательного курса «Замечательные теоремы и факты геометрии» проанализированы, систематизированы.

После тестирования курса были внесены корректировки как по методике преподавания теоретического материала, так и по отработке практического применения полученных учениками знаний.

Таким образом данный электронный образовательный курс помогает ученикам освоить и применять при решении задач материал, отсутствующий в стандартных школьных учебниках. Также полученные знания способствуют саморазвитию и более глубокому изучению и пониманию науки геометрии.