

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

кафедра математического анализа

**ЭЛЕКТРОННЫЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ КУРС
«ПРИМЕНЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПЛАНИМЕТРИИ»**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 3 курса 322 группы

направления **44.04.01 – Педагогическое образование**

механико-математического факультета

Сотниковой Ольги Николаевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м. н, доцент

В.Г.Тимофеев

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н.,
доцент

Е.В.Разумовская

Саратов 2025

1. Общая характеристика работы

Магистерская диссертация посвящена разработке, теоретическому обоснованию и апробации электронного образовательного курса «Применение комплексных чисел в планиметрии» для учащихся 10–11 классов, изучающих математику на профильном и углублённом уровнях. Работа выполнена на кафедре математического анализа СГУ имени Н.Г. Чернышевского и ориентирована на потребности современной школы, в которой усиливается внимание к вариативным формам организации учебного процесса и к использованию электронных образовательных ресурсов.

Актуальность исследования определяется тем, что математическое образование в старших классах находится в ситуации постоянного обновления содержания и технологий обучения в соответствии с требованиями ФГОС. Одной из ключевых задач становится формирование у школьников целостного математического мировоззрения, умения видеть связи между различными разделами математики и применять единый аппарат для решения задач разного типа. В условиях профильного обучения особое значение приобретают методы, позволяющие одновременно углублять содержание и развивать исследовательские и аналитические навыки учащихся.

Аппарат комплексных чисел в этом контексте представляет собой естественный ресурс для интеграции алгебры и геометрии. Исторически комплексные числа возникли как средство расширения множества действительных чисел для решения алгебраических уравнений, однако именно их геометрическая интерпретация (комплексная плоскость) открыла широкие возможности для применения в планиметрии. Несмотря на это, в базовом школьном курсе комплексные числа либо не рассматриваются вовсе, либо изучаются фрагментарно и преимущественно как объект алгебры, без систематического выхода на их геометрическое использование.

Актуальность усиливается запросами профильной и олимпиадной подготовки по математике. Анализ задач регионального и заключительного

этапов Всероссийской олимпиады, а также тематических сборников показывает, что метод комплексных чисел широко применяется для решения задач о треугольнике, окружностях, геометрических местах точек и преобразованиях плоскости. При этом значительная часть школьников, даже обучающихся в профильных классах, не владеет этим методом, что снижает их конкурентоспособность в олимпиадных и конкурсных испытаниях.

Объект исследования – процесс обучения геометрии, в частности планиметрии, учащихся 10–11 классов в условиях профильного и углублённого изучения математики.

Предмет исследования – методика применения комплексных чисел как алгебраического и геометрического инструмента для решения планиметрических задач в старшей школе, включающая отбор содержания, построение системы задач, проектирование и реализацию электронного образовательного курса, а также организацию учебной деятельности учащихся при его использовании.

Цель исследования – разработать, теоретически обосновать и апробировать методику обучения старшеклассников применению комплексных чисел при решении планиметрических задач на основе специально созданного электронного курса, обеспечивающего формирование устойчивых умений, развитие математического мышления и повышение мотивации к изучению математики.

В соответствии с целью сформулированы задачи исследования:

- проанализировать научную, математическую и учебно-методическую литературу по проблеме применения комплексных чисел в геометрии и в школьной планиметрии;
- выявить, классифицировать и систематизировать типы планиметрических задач (преимущественно о треугольниках), наиболее релевантные для использования метода комплексных чисел и доступные для учащихся 10–11 классов;

- выделить и описать теоретический минимум по комплексным числам, включающий алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы, модуль и аргумент, основные операции и их геометрическую интерпретацию, необходимый и достаточный для решения выбранного класса задач;
- разработать систему упражнений и задач по планиметрии, решаемых методом комплексных чисел, выстроенную по принципу нарастающей сложности (базовый, средний и повышенный уровни), снабжённую подробными образцами решений и методическими комментариями для учителя;
- спроектировать структуру и реализовать электронный образовательный курс, включающий теоретический материал, иллюстрации, интерактивные задания, средства самоконтроля и материалы для педагогического сопровождения;
- провести педагогический эксперимент по апробации курса в условиях реального учебного процесса (в профильном лицее и гимназии), оценить его эффективность с помощью тестирования и анкетирования и сформулировать практические рекомендации для учителей математики.

Выбор методов исследования обусловлен характером поставленных задач. Теоретический анализ литературы позволил выделить общенаучные и специально методические основания включения комплексных чисел в школьную геометрию и выявить существующие подходы. Сопоставительный анализ традиционных геометрических, координатных, векторных и комплексных методов решения задач о треугольниках обеспечил аргументацию преимуществ и ограничений каждого из них. Проектирование курса и задачной системы базировалось на принципах научности, доступности, систематичности и учета зон ближайшего развития учащихся. Педагогический эксперимент с последующей статистической и качественной обработкой результатов обеспечил проверку эффективности разработанной методики и позволил выявить её сильные стороны и проблемные места.

Научная новизна работы состоит в том, что предложена целостная методическая модель включения метода комплексных чисел в школьную планиметрию, охватывающая три взаимосвязанных компонента: теоретический минимум, задачную систему и электронную форму реализации курса. Уточнена и адаптирована к школьному уровню система понятий и фактов по комплексным числам, используемых при изучении замечательных точек треугольника, окружностей, расстояний и геометрических мест точек. Разработана трёхуровневая система задач, позволяющая постепенно формировать у учащихся уверенность при работе с комплексным аппаратом и проводить дифференциацию обучения в зависимости от уровня подготовки. На основе анализа ошибок и анкетирования выделены характерные трудности школьников при освоении темы и показано, как электронная форма курса и поэтапное введение материала способствуют их преодолению.

Теоретическая значимость исследования заключается в развитии методики обучения комплексным числам как средству решения планиметрических задач, в уточнении условий, при которых использование комплексного аппарата способствует формированию межпредметных связей алгебры и геометрии и развитию доказательного стиля мышления.

Практическая значимость работы выражается в создании готового к использованию электронного курса «Применение комплексных чисел в планиметрии», системы задач трёх уровней сложности и методических рекомендаций по их включению в учебный процесс. Материалы магистерской работы могут применяться в профильных и элективных курсах, при подготовке к олимпиадам и экзаменам, а также в системе повышения квалификации и подготовки будущих учителей математики.

2. Структура и объём работы

Магистерская работа состоит из введения, трёх разделов, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Основной текст изложен на 81 странице машинописного текста, содержит таблицы, рисунки,

образцы задач и фрагменты разработанных электронных материалов. Список литературы включает 29 наименований отечественных и зарубежных источников. В приложениях представлены задания для самостоятельного решения и методические рекомендации по обучению планиметрии с элементами комплексного анализа.

Первый раздел «Теоретические основы комплексных чисел и их геометрической интерпретации» включает исторический обзор развития понятия комплексного числа: от первых упоминаний «мнимых» величин в работах Дж. Кардано и Р. Декарта до формирования концепции комплексной плоскости в трудах К. Весселя, Ж.-Р. Аргана и К. Ф. Гаусса. Показано, что переход от чисто алгебраического понимания комплексных чисел к их геометрической трактовке стал ключевым моментом, открывшим возможность использовать их как универсальный язык для описания преобразований плоскости. Систематически излагаются алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа, операции сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, а также даётся геометрическая интерпретация этих операций на комплексной плоскости. Отдельный подраздел посвящён изображению кривых и областей (окружностей, кругов, колец, секторов) в комплексной плоскости с использованием модулей и аргументов.

Второй раздел «Метод комплексных чисел в задачах о треугольниках» содержит переход от общих понятий комплексных чисел к их применению в планиметрии. На комплексной плоскости вершинам треугольника А, В, С ставятся в соответствие комплексные числа a , b , c , после чего выводятся формулы для координат центроида, ортоцентра, инцентра, центра описанной и вписанной окружностей, точек Эйлера и других замечательных точек. Показано, как с помощью комплексной записи удобно описывать прямую Эйлера, окружность девяти точек, отношения между центрами окружностей и замечательными точками. Для каждой формулы приводятся примеры задач,

демонстрирующие переход от геометрического формулирования к алгебраическому доказательству на языке комплексных чисел.

Третий раздел «Практическое применение комплексных чисел в школьном курсе математики» посвящен разработке и описанию трёхуровневой системы задач и педагогической апробации методики. В подразделах 3.1–3.3 представлены задачи базового, среднего и повышенного уровней сложности, подобранные таким образом, чтобы обеспечить постепенный переход от отработки базовых операций с комплексными числами к решению сложных задач о треугольниках и геометрических конфигурациях. Здесь же описана структура электронного курса: выделены модули, описаны виды заданий (текстовые, интерактивные, с автоматической проверкой), формы обратной связи и контроля.

В этом разделе подробно освещается педагогический эксперимент, проведённый в ГАОУ СО ФТЛ №1 и МАОУ «Гимназия №2» города Саратова. Приводятся данные о количестве участников (82 и 54 учащихся соответственно), об организации занятий, содержании контрольных и тренировочных работ. Включены сравнительные таблицы и диаграммы, демонстрирующие динамику успешности решения задач разных уровней сложности в двух учебных коллективах. Анкетирование позволило выявить стартовый уровень знакомства школьников с комплексными числами и оценить изменение их отношения к теме после прохождения курса.

3. Основное содержание и результаты исследования

В ходе исследования был проведён детальный обзор литературы по теории комплексных чисел, методике их преподавания и использованию в школьной геометрии. На основе анализа работ классиков и современных авторов выделены те элементы теории комплексных чисел, которые, с одной стороны, являются достаточно простыми и наглядными для старшеклассников, а с другой – обладают высокой «отдачей» при решении задач о треугольниках и окружностях. На этой основе сформирован

математический минимум, включающий представление комплексных чисел в алгебраической, тригонометрической и показательной формах, понятия модуля и аргумента, геометрическую интерпретацию операций и базовые формулы для расстояний, скалярных произведений и преобразований плоскости.

Особое внимание в работе уделено переходу от чисто аналитического описания комплексных чисел к их геометрической трактовке. Показано, что использование комплексных координат точек треугольника позволяет в единой схеме получать формулы для координат и взаимного расположения множества замечательных точек, а также выражения для длин сторон, радиусов различных окружностей и геометрических мест точек. Для каждого полученного результата приводятся примеры задач, раскрывающих его смысл и демонстрирующих преимущества комплексного метода по сравнению с традиционными синтетическими доказательствами.

Разработанная система задач включает три блока:

- задачи базового уровня, направленные на отработку операций с комплексными числами, переход между формами записи, нахождение модуля и аргумента, изображение точек и простых кривых на комплексной плоскости;
- задачи среднего (повышенного) уровня, посвящённые применению комплексных координат к задачам о треугольнике, многоугольниках, окружностях и геометрических местах точек;
- задачи высокого уровня сложности, ориентированные на олимпиадную подготовку и включающие нестандартные конструкции с окружностью Эйлера, прямой Эйлера и конфигурациями замечательных точек.

Каждая задача снабжена подробным решением либо указанием, что делает курс пригодным как для самостоятельной работы учащихся, так и для использования учителем на уроках и факультативных занятиях. При составлении системы учитывалась необходимость плавного наращивания сложности и возвращения к ключевым идеям в новых контекстах, что

способствует долговременному усвоению материала и формированию гибких умений.

Педагогический эксперимент показал, что после прохождения курса в обеих образовательных учреждениях возросла доля верных решений по задачам всех уровней сложности, при этом более значительный прирост продемонстрировали учащиеся профильного ФТЛ №1, имеющие более высокий исходный уровень подготовки. Стартовая диагностика выявила практически полное отсутствие опыта работы с комплексными числами у большинства школьников, а итоговое тестирование и анкетирование зафиксировали положительную динамику как в освоении содержания, так и в отношении к теме и к геометрии в целом.

Анализ ошибок позволил выделить типичные трудности: формальное владение алгебраическими операциями без понимания геометрического смысла, ошибки при работе с аргументом, затруднения при переходе между формами записи и при интерпретации алгебраических преобразований в геометрическом контексте. В работе предложены способы адресного преодоления этих трудностей: усиление визуализации (схемы, чертежи на комплексной плоскости), включение промежуточных тренировочных заданий, явное проговаривание связей между алгебраическими формулами и геометрическими свойствами.

На основе результатов эксперимента сформулированы методические рекомендации для учителя по включению элементов метода комплексных чисел в профильный курс геометрии: предложены варианты распределения часов (модульное или сквозное включение), способы использования задач курса на разных этапах урока (мотивация, объяснение, закрепление, контроль), формы организации самостоятельной и проектной работы учащихся.

4. Основные выводы и положения, выносимые на защиту

4.1. Обоснована необходимость включения элементов алгебры комплексных чисел и их геометрической интерпретации в профильный курс планиметрии как эффективного средства формирования межпредметных связей алгебры и геометрии, развития аналитического и доказательного мышления старшеклассников.

4.2. Разработан и дидактически обоснован математический минимум по комплексным числам, адаптированный к школьному уровню и достаточный для решения широкого класса планиметрических задач, в первую очередь задач о треугольниках и их замечательных точках.

4.3. Создан электронный образовательный курс «Применение комплексных чисел в планиметрии», включающий теоретический материал, трёхуровневую систему задач, средства контроля и методические комментарии для учителя, пригодный для использования в условиях современной школы.

4.4. Педагогический эксперимент, проведённый в ФТЛ №1 и гимназии №2 города Саратова, показал эффективность разработанного курса: зафиксировано повышение уровня сформированности умений применять комплексные числа для решения геометрических задач, рост успешности выполнения заданий разных уровней сложности и положительное изменение отношения учащихся к теме и к изучению геометрии в целом.

4.5. Сформулированы практические рекомендации по использованию электронного курса в школьной и вузовской практике, предложены направления дальнейшей разработки: расширение банка задач, углубление электронного сопровождения (в том числе с использованием динамических геометрических пакетов) и создание модулей для самостоятельной подготовки к олимпиадам и экзаменам.