

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теории функций и стохастического анализа

**МИНИМИЗАЦИЯ ОБЪЕМА СОБСТВЕННЫХ СРЕДСТВ  
СТРАХОВЩИКА**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 412 группы

направления 01.03.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Иванова Романа Александровича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.    доцент

\_\_\_\_\_

В. Р. Шебалдин

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

\_\_\_\_\_

С. П. Сидоров

Саратов 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
----------------	---

## ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается проблема минимизации риска страховой компании путём оптимального выбора объёма страховых взносов клиентов, рискованной премии и распределения суммарного риска.

**Актуальность** Минимизация суммарного риска является актуальной проблемой, поскольку с ростом рисков и неопределённости в мире страховые компании и организации должны учитывать различные виды рисков и оптимально выбирать объём страховых взносов клиентов.

**Целью** данной работы является исследование проблемы минимизации риска страховой компании, которая заключается в оптимальном выборе страховых взносов. Для достижения поставленной цели в работе необходимо решить следующие **задачи**:

- изучить основные понятия теории рисков и теории полезности и оптимизацию полезности для различных типов распределения рисков;
- исследовать проблему оптимизации объёма страховых взносов клиентов и собственных средств страховщика;
- провести вычислительный эксперимент с применением моделей из теории оптимизации.

### Структура бакалаврской работы

Работа состоит из четырёх разделов, введения и заключения.

В первом разделе даны основные понятия теории рисков и методы моделирования случайных величин, описаны основы теории полезности, методы построения функций полезности, рассмотрены основные типы функций полезности, применяемых в страховании.

Во втором разделе рассмотрена проблема оптимизации объёма страховых взносов клиентов.

В третьем разделе рассмотрена минимизация объёма собственных средств страховщика.

В четвёртом разделе рассмотрена оптимизация полезности для различных типов распределения рисков.

## Основное содержание работы

*Риск* называется совокупностью вероятностей возможного ущерба и его величин в некоторой стохастической ситуации.

*Рисковый процесс* — процесс изменения капитала страховой компании. Для удобства рассматривают такие модели изменения капитала, в которых моменты поступления выплат детерминированы, но величины страховых выплат являются случайными. Суть статической модели страхования состоит в том, что все договора имеют одинаковый срок действия, портфель полисов, проданных клиентам, считается сформированным единовременно, новые клиенты не появятся в течение всего периода страхования, а также каждый полис считается оплаченным в начале периода.

*Суммарный ущерб*  $X = X_1 + \dots + X_n$ , где  $n$  — численность группы клиентов,  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) — неотрицательные независимые случайные величины рисков отдельных клиентов.

*Рисковая ситуация* — тройка  $(S, D, F(x))$ , где  $F(x)$  — распределение суммарного риска,  $S$  — объём собственных средств,  $D$  — суммарный взнос.

Проблема минимизации риска заключается в оптимальном выборе страховых взносов, рисковой премии и распределения суммарного риска. Для определения оптимального суммарного взноса используются модели из теории оптимизации, использующие функцию полезности.

## Функция полезности

Основной результат, лежащий в основе линейной теории полезности, утверждает, что следствием аксиом теории полезности будет существование скалярной функции  $u(y)$  на  $B$ , называемой функцией полезности лица, принимающего решение (ЛПР), такой, что для каждой пары выигрышей выполнено:  $Y_1 \succ (\sim) Y_2$  тогда и только тогда, когда  $E[u(Y_1)] > (=) E[u(Y_2)]$ , т. е. функционал полезности ЛПР имеет вид:

$$U[Y] = E[u(Y)] \quad \text{или} \quad U[Y] = \int_B u(y) dF(y).$$

Процедура экспериментального построения функции полезности состоит в следующем: ИПР (принимающий решения индивидум) оценивает для

себя денежные эквиваленты  $y_i$  нескольких простых выигрышей  $Y_i$ , называемых лотереями, каждая из которых имеет два возможных значения  $z_{1i}, z_{2i}$  с заданными вероятностями  $\alpha_i, 1 - \alpha_i$ , причём  $z_{1i}, z_{2i}$  выбираются среди уже полученных эквивалентов  $y_1, \dots, y_{i-1}$ .

Узнав значение эквивалента  $y_i \in [a, b]$ , т. е. детерминированной суммы, получение которой для него эквивалентно участию в лотерее  $Y_i$ , мы можем приравнять полезность  $u(y_i)$  к ожидаемой полезности  $E_u(Y_i) = \alpha_i u(z_{1i}) + (1 - \alpha_i)u(z_{2i})$  и таким образом получить точку  $(y_i, E_u(Y_i))$  графика функции  $u(y)$ . Продолжая, будем иметь табулировку функции  $u(y)$  в наборе точек  $\{y_i\}$  отрезка  $[a, b]$ .

Следующий этап заключается в построении  $u(y)$  на всём множестве  $B$  возможных значений выигрышей. Принципиальный момент здесь состоит в выборе подходящего достаточно узкого класса функций полезности, предпочтительно заданного параметрически. Такой класс определяется:

1. во-первых, на основе качественной информации о склонностях ИПР;
2. во-вторых, на основе имеющегося в теории полезности достаточно обширного арсенала «стандартных» функций полезности с известными свойствами.

Сформулируем несколько рекомендаций применительно к выбору функций полезности, когда ЛПР является страховая компания. В этом случае в качестве выигрыша  $Y$  естественно рассматривать остаточный капитал  $S + D - X$  к концу страхового периода:

1. на всём множестве  $B$  возможных доходов  $u(y)$  должна быть вогнутой возрастающей функцией;
2. в области отрицательных доходов  $y < 0$  функция  $u(y)$  быстро убывает с увеличением  $|y|$ ;
3. в области больших положительных значений  $y$  темп роста  $u(y)$  существенно падает;
4. неприятие риска  $r(x)$  не возрастает с ростом  $x$ , если специально не оговорено свойство особой, возрастающей осторожности при увеличении размера денежного фонда компании.

## Проблема оптимизации объёма страховых взносов

Участники страховой сделки — страховщик и страхователи — для того, чтобы сделка состоялась, должны прийти к взаимоприемлемому решению о величине взносов. При этом страховщика, принимающего суммарный риск, интересует прежде всего суммарный взнос  $D$ , а каждого отдельного клиента — величина его индивидуального взноса  $d_i$ . Пусть известны функции полезности компании  $u_0(y)$  и  $u_i(y)$ , где  $i = 1, \dots, n$  — функции полезности клиентов. Компания согласится на страхование клиентов, если для неё ожидаемая полезность после совершения сделки будет по крайней мере не меньше, чем без неё:

$$E[u_0(w + D - X)] \geq u_0(w).$$

Обозначим через  $D_*$  нижнюю грань тех  $D \geq 0$ , для которых это неравенство выполнено. Иными словами,  $D_*$  — наименьший суммарный взнос, при котором страхование этой группы ещё не становится невыгодным для страховщика. В случае возрастающей непрерывной  $u_0(y)$  взнос  $D_*$  есть единственный корень уравнения

$$E[u_0(w + D - X)] = u_0(w)$$

на  $[0, +\infty)$ .

Аналогично,  $i$ -й клиент пойдёт на страхование только в том случае, если полезность от капитала, остающегося после сделки со страховщиком, будет для него не меньше ожидаемой полезности от рискованной ситуации без сделки:

$$u_i(w_i - d_i) \geq E[u_i(w_i - X_i)],$$

где  $w_i$  — начальный капитал клиента. Пусть  $d_i^*$  — верхняя грань решений этого неравенства, или максимальная сумма, которую клиент может заплатить за страхование своего риска. Тогда, если

$$D^* \leq \sum_{i=1}^n d_i^*,$$

то страхование считается возможным, и задача сводится к выбору конкретного набора взносов  $d^0 = (d_1^0, \dots, d_n^0)$  из множества допустимых

$$A = \{d \in \mathbb{R}^n : D^* \leq \sum_{i=1}^n d_i, d_i \leq d_i^*, i = 1, \dots, n\},$$

который бы устроил всех  $n+1$  участников сделки. Исходя из того, что каждый из  $n+1$  участников стремится максимизировать свою полезность, приходим к следующей многокритериальной задаче максимизации:

$$\begin{cases} J_0(d) \equiv E[u_0(w + \sum_{i=1}^n d_i - X)] \rightarrow \max, \\ J_i(d) \equiv u_i(w_i - d_i) \rightarrow \max, \quad i = 1, \dots, n, \\ d = (d_1, \dots, d_n) \in A. \end{cases}$$

За исключением немногочисленных вырожденных случаев, решения такой задачи в привычном смысле точки  $d^*$ , доставляющей максимум на  $A$  одновременно по всем  $n+1$  критериям, не существует. Один из наиболее распространённых подходов — нахождение Парето-оптимальных точек. Точка  $d \in A$  называется Парето-оптимальной, если не существует  $d' \in A$  такого, что  $J_i(d') \geq J_i(d)$ ,  $i = 0, \dots, n$ , и хотя бы одно из этих неравенств выполняется строго.

Далее используется метод, который определяет  $d^0$  максимизацией свёртки критериев с заданными положительными весами:

$$\sum_{i=0}^n k_i J_i(d) \rightarrow \max, \quad d \in A,$$

где  $k_i > 0$ ,  $\sum_{i=0}^n k_i = 1$ .

### Минимизация объёма собственных средств страховщика

В реальности страховщик не может выбирать компоненты рискованной ситуации  $(w, D, F(x))$  произвольно по своему усмотрению. Предполагается, что они зависят от некоторого параметра  $a$ , который доступен управлению страховщика и может варьироваться в заданной области  $a \in A$ .

Рассмотрим задачу определения минимальной величины собственных

средств страховщика, гарантирующей требуемую вероятность неразорения  $\beta$ , если задано распределение  $F(x)$  суммарного риска, величина взносов  $D$  и вероятность неразорения  $\beta$ . Ограничение на вероятность неразорения означает:

$$P\{w + D \geq X\} \geq \beta.$$

Обозначим через  $x_\beta$  квантиль порядка  $\beta$  распределения  $F(x)$ . Тогда из неравенства выше получаем множество допустимых значений собственного капитала:  $w \geq x_\beta - D$ . Поэтому минимальный капитал:

$$w^* = x_\beta - D.$$

Если взнос рассчитывается по формуле среднего значения, то  $D = (1 + \alpha)E[X] = (1 + \alpha)M$  с заданным коэффициентом нагрузки  $\alpha > 0$ , и тогда:

$$w^*(\alpha) = x_\beta - (1 + \alpha)E[X].$$

Видно, что  $w^*$  растёт с увеличением квантиля  $x_\beta$ , который, в свою очередь, возрастает с ростом надёжности  $\beta$ . Увеличение  $\alpha$  приводит к увеличению взноса  $D$  и уменьшению необходимого капитала  $w^*$ . Возможна ситуация, когда при некотором  $\alpha$  значение  $w^*$  отрицательно: это означает, что в данной схеме страхования даже собранных взносов  $D$  более чем достаточно для достижения требуемой надёжности  $\beta$ , и остаток, равный  $|w^*|$ , целиком находится в распоряжении страховой компании.

Финальный гарантированный капитал при этом равен:

$$C(\alpha) = w^*(\alpha) + D(\alpha) = x_\beta = \text{const},$$

то есть не зависит от выбора  $\alpha$ .

### Оптимизация полезности

Если считать критерием оптимальности ожидаемую полезность остаточного капитала  $Eu(w + D_d - X_d)$ , где функция полезности страховщика экспоненциальна,  $u(y) = -\exp(-cy)$  (здесь  $c > 0$  — заданный показатель неприятия риска), то на этот раз управляемым параметром будет сама це-

на полиса (взнос клиента)  $d$ , которая может варьироваться страховщиком на множестве  $[d^-, d^+]$ .

Рассматриваемая задача:

$$J(d) \equiv -E\{\exp -c[w + n(d)d - X_d]\} \rightarrow \max, \quad d \in [d^-, d^+].$$

Оптимальное  $d^*$  не будет зависеть от начального капитала  $w$ , поскольку в максимизируемой экспоненциальной полезности  $J(d)$  от  $w$  зависит только множитель  $\exp(-cw) > 0$ .

Принцип нулевой полезности и эквивалентной полезности

Для экспоненциальной функции полезности  $u(y) = -e^{-\gamma y}$  принцип нулевой полезности формулируется условием:

$$E[u(C(\alpha) - X)] = u(w_0),$$

из которого следует:

$$w^*(\alpha) = \frac{1}{\gamma} \ln E[e^{\gamma X}] - D(\alpha).$$

Принцип эквивалентной полезности даёт аналогичный результат. Это означает, что оба принципа в случае экспоненциальной функции полезности совпадают.

**Роль коэффициента нагрузки  $\alpha$ :** он управляет перераспределением нагрузки между взносами клиентов и собственными средствами страховщика при фиксированной надёжности  $\beta$ . Рост  $\alpha$  снижает требуемый собственный капитал, не изменяя при этом ожидаемой полезности, поскольку гарантированный капитал  $C(\alpha) = x_\beta$  остаётся постоянным.

## Описание вычислительного эксперимента

Решены задачи определения параметров страховых систем: задача определения взаимоприемлемой величины взноса и задача минимизации собственных средств страховой компании, обеспечивающего заданную вероятность неразорения. Для решения поставленных оптимизационных задач были использованы следующие библиотеки Python:

1. *Numpy* — эта библиотека ускоряет работу с многомерными массивами и матрицами, а также позволяет вычислять много высокоуровневых математических функций при работе с массивами данных.
2. *Matplotlib* — библиотека для визуализации данных.

## Задача на определение взаимоприемлемой величины взноса

Рассматривается однородная группа клиентов  $n = 10$ , риск  $X_i$  каждого из клиентов распределён по экспоненциальному закону:

$$P\{X_i \leq x\} = 1 - e^{-2x}, \quad x \geq 0.$$

Компания и клиенты имеют, соответственно, начальные капиталы  $w = 2$  и  $w_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , квадратичные функции полезности:

$$u_0(y) = -\frac{y^2}{30} + y, \quad u_1(y) = -\frac{y^2}{10} + y.$$

Требуется выяснить, выполнено ли здесь условие возможности страхования, и если да, то определить взаимоприемлемую величину взноса  $d_0$ , считая компанию равноправной с клиентами в сделке. В случае однородной группы условие возможности страхования выглядит следующим образом:  $d_* \leq d^*$ , где  $d_* = D_*/n$ ,  $D_*$  есть нижняя грань неравенства  $E[u_0(w + D - X)] \geq u_0(w)$ , в свою очередь  $d^*$  является верхней гранью неравенства  $u_1(w_1 - d) \geq E[u_1(w_1 - X_1)]$ .

Воспользовавшись методом Парето-оптимальных точек, приходим к следующему решению задачи:

$$\sum_{i=0}^2 k_i J_i(d) \rightarrow \max, \quad d \in A,$$

где  $k_i = \frac{1}{n+1}$ .

Программа на языке *Python* принимает на вход количество клиентов, начальное состояние компании, начальное состояние клиента. В результате выполнения программы получим, что страхование возможно и интервал взносов, удовлетворяющих как клиенту, так и компании, имеет вид:  $[0.05; 5.0]$ . Следующим этапом задачи является нахождение оптимального взноса  $d_0$ . После расчёта программы получим  $d_0 = 1.6$ .

### **Задача на минимизацию собственных средств страховой компании**

Рассматриваются страховщики I и II с группами из  $n_1 = 1000$  и  $n_2 = 4000$  клиентов, для каждого из которых:

1. вероятность страхового случая  $p = 0.1$ ;
2. размер страховых выплат детерминирован и равен  $m = 50$ .

Принятый на страховом рынке коэффициент нагрузки  $\alpha = 10$ . Какой собственный капитал должна иметь каждая из компаний для обеспечения надёжности  $\beta = 0.99$ ? В обоих случаях  $n$  и  $p$  таковы, что удовлетворяют условию нормальной аппроксимации. Поэтому для распределения суммарного риска можно использовать формулу

$$F(x) = \Phi_{M,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x - nrp}{\sqrt{nrpq}}\right),$$

где  $M = nM_1 = n \cdot 5$ ,  $\sigma = \sqrt{n} \sigma_1 = \sqrt{n} \sqrt{pq} \cdot m = \sqrt{n} \cdot 15$ . Тогда решение будет иметь вид:

$$w_* = x_N^\beta \sigma - \alpha M = x_N^\beta \sqrt{n} \sigma_1 - \alpha n M_1.$$

В результате получим, что собственный капитал для компании I равен 603.48, а собственный капитал для компании II равен 206.98. При этих значениях точки  $n_1 = 1000$  и  $n_2 = 4000$  лежат по разные стороны от точки максимума функции  $w_*(n_1) = 1216$  (Рис. 1). Поэтому при увеличении числа клиентов  $n_1$  компания I вынуждена увеличивать собственный капитал  $w^*(n_1)$ , в то время как при возрастании  $n_2$  компания II может позволить себе сокращение объёма собственных средств.

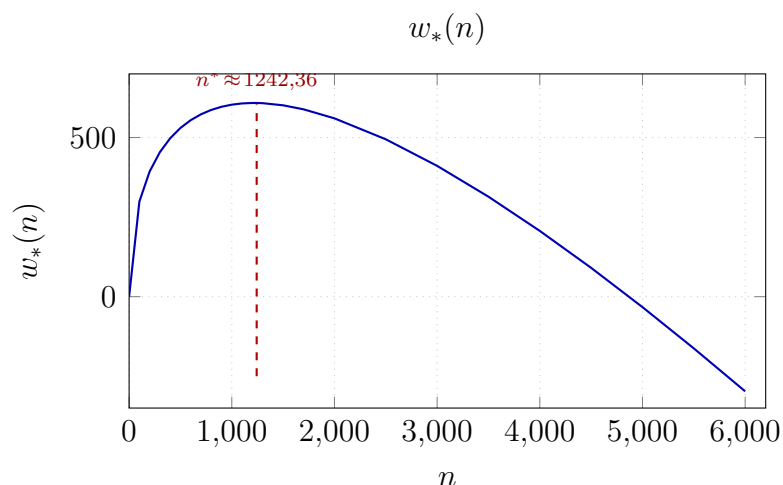


Рисунок 1 – График зависимости капитала от численности группы клиентов

### Вычислительный эксперимент: минимизация $w^*(\alpha)$

#### Постановка эксперимента.

- Портфель:  $n = 100$  независимых договоров.
- Индивидуальный убыток  $X_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ ,  $\lambda = 1/10$  (среднее 10 тыс. руб.).
- Суммарный ущерб  $X \sim \Gamma(100, 0.1)$ .
- $E[X] = 1000$  тыс. руб.,  $\sigma = 100$  тыс. руб.
- Надёжность  $\beta = 0.95$ , квантиль (по ЦПТ):  $x_{0.95} \approx 1164.5$  тыс. руб.
- Коэффициент нагрузки  $\alpha \in [0.00; 0.30]$ .
- Коэффициент неприятия риска  $\gamma = 0.005$ .

#### Таблица результатов.

$\alpha$	$D(\alpha)$ , тыс. руб.	$w^*(\alpha)$ , тыс. руб.	$U(\alpha)$
0,00	1000,0	164,5	-0,536
0,05	1050,0	114,5	-0,536
0,10	1100,0	64,5	-0,536
<b>0,1645</b>	<b>1164,5</b>	<b>0,0</b>	<b>-0,536</b>
0,20	1200,0	-35,5	-0,536
0,25	1250,0	-85,5	-0,536
0,30	1300,0	-135,5	-0,536

Таблица 1 – Зависимость  $D(\alpha)$ ,  $w^*(\alpha)$  и  $U(\alpha)$  от коэффициента нагрузки. Выделена критическая строка  $\alpha^* \approx 0,1645$ , при которой  $w^* = 0$ .

#### Анализ результатов.

- $w^*(\alpha)$  **линейно убывает** с ростом  $\alpha$ : каждый дополнительный процент нагрузки снижает требуемый капитал ровно на  $E[X] = 1000$  тыс. руб.
- При  $\alpha \approx 0.1645$  достигается  $w^* = 0$  — собственные средства не нужны,

взносов клиентов достаточно для обеспечения надёжности  $\beta = 0.95$ .

- При  $\alpha > 0.1645$  взносы избыточны, страховщик имеет гарантированный излишек  $|w^*|$ .
- **Полезность постоянна:**  $U(\alpha) = \text{const} = -0.536$ , поскольку гарантированный капитал  $C(\alpha) = x_\beta = 1164.5$  тыс. руб. не зависит от  $\alpha$ . Это важный результат: рост нагрузки не увеличивает полезность, а лишь снижает требуемый капитал.

### Графическая интерпретация.

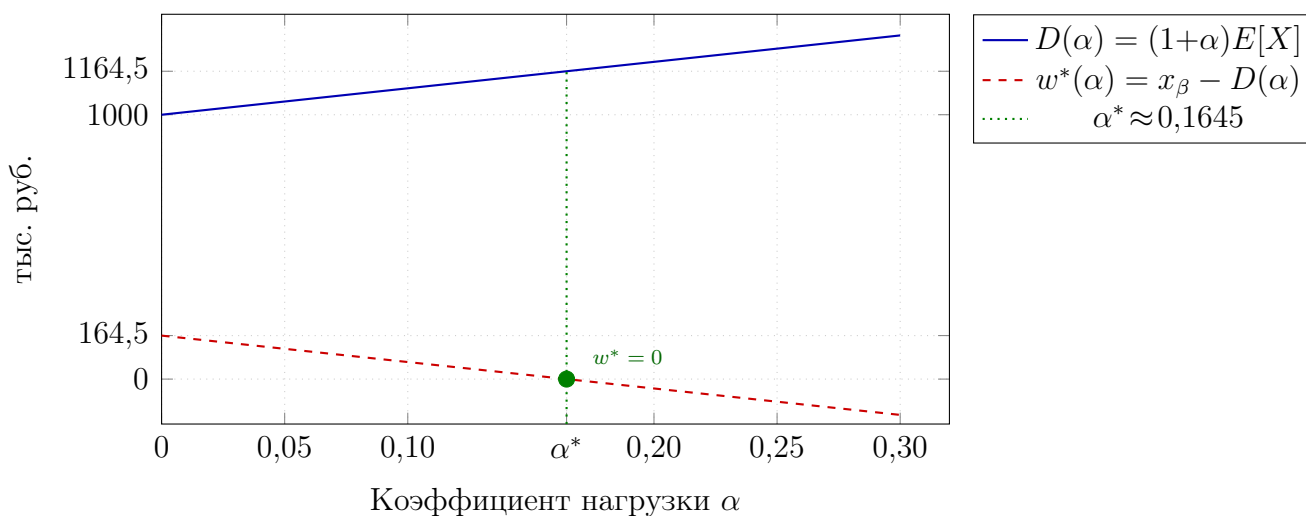


Рисунок 2 – Зависимости  $w^*(\alpha)$  и  $D(\alpha)$  от коэффициента нагрузки. При  $\alpha = \alpha^* \approx 0,1645$  собственные средства не требуются.

## Заключение

В результате проведённого исследования были рассмотрены ключевые аспекты минимизации рисков в страховании, связанные с определением страховых взносов, минимизацией объёма средств страховой компании и оптимизацией полезности для страхователей. Было установлено, что правильное определение страховых взносов является основой для успешной работы страховой компании и обеспечения её финансовой устойчивости.

Изложена аксиоматика теории полезности, принципы выбора функциональных классов полезности на основе функции неприятия риска. Даны рекомендации, которым должна удовлетворять функция полезности для страховщика. Рассмотрены условия возможности страхования. Были продемонстрированы методы решения проблем минимизации объёма средств страховой компании и оптимизации страховых взносов с использованием моделей из теории оптимизации.

В частности, установлены следующие результаты:

- Параметр  $\alpha$  (коэффициент нагрузки) является эффективным инструментом управления собственным капиталом страховщика.
- Минимальный собственный капитал  $w^*(\alpha)$  линейно убывает с ростом  $\alpha$ ; при  $\alpha = \alpha_{\text{крит}} \approx 0.1645$  собственные средства не нужны.
- Теория полезности показывает: при соблюдении нормативного ограничения неразорения полезность не зависит от  $\alpha$ ; выигрыш выражается только в сокращении требований к капиталу.
- Вычислительный эксперимент подтвердил теоретические зависимости.

Таким образом, минимизация рисков в страховании является сложным и многогранным процессом, требующим комплексного подхода к проблеме определения страховых взносов, минимизации объёма средств страховой компании и оптимизации полезности для страхователей.