

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Исследование погранслоя в окрестности фронта волны расширения

в вязкоупругих оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Биль Данилы Дмитриевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент

Н.С. Анофрикова

Зав. кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Саратов 2026

Введение. В последние десятилетия возрос интерес к динамике волн в вязкоупругих оболочках, применяемых в авиации и машиностроении. Работа посвящена задаче о распространении нестационарных волн в тонкостенной вязкоупругой оболочке при ударном воздействии на торце.

Актуальность темы обусловлена широким применением вязкоупругих материалов в современных конструкциях, работающих в условиях динамических нагрузок. При ударных воздействиях в таких телах возникают сложные волновые процессы, для описания которых точные трехмерные решения найти не представляется возможным, что требует применения приближенных методов, в том числе – асимптотических.

Проведен анализ литературы по теории оболочек и асимптотических методов. Теоретическую базу составили труды В.В Новожилова [1, 2], А.Л. Гольденвейзера [3]. Вопросы общей теории упругости, необходимые для понимания физической стороны деформирования материалов, рассмотрены в работе [4], где изложены базовые законы механики сплошной среды

Ключевое значения для исследований, проведенных в настоящей работе, имеют асимптотические подходы, разработанные Л.Ю. Коссовичем, для случая упругих оболочек [5] и адаптированные Н.С. Анофриковой на случай вязкоупругих оболочек [6].

Анализ изученной литературы подтверждает развитость асимптотического подхода в случае упругих оболочек и возможность распространение данного подхода на случай вязкоупругих тел.

Целью бакалаврской работы является исследование погранслоя в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругих оболочках нулевой гауссовой кривизны при ударном воздействии тангенциального типа на торце.

В связи с поставленной целью можно сформулировать следующие **задачи:**

1) изучить основные виды уравнений состояния, используемые в линейной вязкоупругости;

2) произвести постановку краевой задачи о распространении нестационарных волн в вязкоупругой тонкостенной оболочке при приложении к ее торцу ударного продольного воздействия тангенциального типа;

3) с помощью асимптотического метода получить уравнения погранслоя в окрестности фронта волны расширения для оболочек вращения нулевой гауссовой кривизны;

4) решить краевую задачу для цилиндрической оболочки;

5) провести анализ полученных результатов.

Структура и объём работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех разделов, заключения и содержит 43 страницы. Список использованных источников включает 20 наименований.

Раздел 1 Математические модели линейной вязкоупругости.

Раздел 2 Постановка задачи.

Раздел 3 Асимптотический метод построения уравнений погранслоя.

Раздел 4 Решение краевой задачи для цилиндрической оболочки.

Основное содержание работы. Работа посвящена исследованию процесса распространения нестационарных продольных волн в тонкой полубесконечной вязкоупругой оболочке, подверженной ударному воздействию на ее торец, с помощью асимптотических методов.

Первый раздел посвящен обзору определяющих уравнений, используемых в литературе для описания вязкоупругих свойств материалов.

Рассмотрены два подхода к описанию определяющих соотношений: интегральный и дифференциальный.

Интегральный подход базируется на принципе суперпозиции Больцано и считается более общим [7]. Он учитывает всю предысторию нагружения материала путем свертки текущих скоростей изменения состояния с соответствующими ядерными функциями. В зависимости от типа

воздействия, деформация выражается через историю изменения напряжений с использованием функции ползучести, а напряжение – через историю деформаций с помощью функции релаксации.

Дифференциальный подход опирается на механические аналоги, составленные из упругих и вязких элементов.

Главным преимуществом дифференциального подхода является его математическая простота и физическая наглядность. Среди классических моделей вязкоупругого поведения выделяют модели Максвелла, Кельвина-Фойгта и стандартного вязкоупругого тела [8].

Поскольку модель стандартного вязкоупругого тела объединяет достоинства предыдущих, включая упругий элемент, соединенный последовательно с элементов Кельвина-Фойгта, и описывает корректно как явление релаксации, так и явление ползучести, присущие вязкоупругому поведению, то для дальнейших исследований была выбрана именно данная модель. И для постановки задачи были записаны трехмерные уравнения состояния в дифференциальной форме, в которых для девиаторных компонент тензоров напряжений и деформаций справедлив закон стандартного вязкоупругого тела, а для шаровых компонент выполняется упругий закон.

Во втором разделе произведена постановка трехмерной задачи о распространении нестационарных продольных волн в полубесконечной тонкостенной вязкоупругой оболочке, вызванных приложением к торцу ударного продольного воздействия тангенциального типа.

Введена триортогональная криволинейная система координат, связанная с линиями кривизны срединной поверхности оболочки.

Система исходных трехмерных уравнений состояния дополнена уравнениями движения в напряжениях и перемещениях и соотношениями Коши, связывающими компоненты тензора деформаций с компонентами вектора перемещения.

Предполагалось, что лицевые поверхности оболочки свободны от напряжений. И что в начальный момент времени к торцу оболочки, находящейся в состоянии покоя, приложено ударное воздействие, моделируемое единичной функцией Хевисайда.

Таким образом, к полученной системе трехмерных уравнений добавлены граничные условия на торце и лицевых поверхностях, начальные условия покоя.

Поскольку поставленная задача в трехмерной постановке не имеет точного аналитического решения, то к исследованию построенной модели было предложено применить приближенные асимптотические методы.

Приведена схема применимости различных составляющих на примере нормального продольного усилия.

Согласно последней, решение задачи при рассматриваемом типе воздействия может быть представлено как наложение следующих составляющих:

- гиперболический погранслоя в окрестности фронта волны расширения,
- квазистатическая квазисимметричная задача,
- параболический погранслоя в окрестности квазифронта,
- тангенциальное длинноволновое приближение,
- наложение двумерной составляющей и квазистатического погранслоя.

Третий раздел посвящен выводу асимптотически оптимальных уравнений погранслоя в окрестности фронта волны расширения в вязкоупругих оболочках вращения нулевой гауссовой кривизны.

Для этого осуществлен переход от 15 уравнений относительно 15 неизвестных функций (компонент тензоров напряжений и деформаций, компонент вектора перемещения) к системе 9 уравнений относительно 9 неизвестных функций (компонент тензоров напряжений, компонент вектора перемещения), путем исключения компонент тензора деформаций с помощью соотношений Коши.

Далее был осуществлен переход к уравнениям, описывающим напряженно-деформированное состояние оболочки вращения нулевой гауссовой кривизны.

В полученных уравнениях все неизвестные функции были разложены ряды по окружной координате, что позволило перейти к задаче в двумерной форме.

В двумерных уравнениях были введены безразмерные характеристические переменные, связанные с рассматриваемой областью, а также учитывающие величину исследуемой области, имеющую порядок квадрата относительной полутолщины оболочки.

Далее произведено обезразмеривание параметров материала и введены асимптотики напряженного состояния, соответствующие рассматриваемой области [6].

С целью получения выражений для компонент тензора напряжений через компоненты вектора перемещений в уравнениях состояния искомые функции были дополнительно разложены в ряды по малому геометрическому параметру – параметру относительной полутолщины оболочки.

Подстановка последних в уравнения движения с учетом выбранной точности – порядка относительной полутолщины оболочки, позволяет получить асимптотически оптимальные двумерные уравнения для асимптотически главных и асимптотически второстепенных компонент напряженно-деформированного состояния, описывающие поведение решения задачи в окрестности фронта волны расширения с учетом выбранной точности.

Полученные уравнения могут быть использованы при моделировании решения в окрестности фронта волны расширения в оболочках нулевой гауссовой кривизны.

Четвертый раздел посвящен постановке и решению задачи для цилиндрической оболочки в случае нагрузки, симметричной относительно окружной координаты.

Полученные в третьем разделе уравнения для асимптотически главных компонент записаны для случая цилиндрической оболочки. Приведены соответствующие начальные и граничные условия.

Осуществлен переход к безразмерным переменным и безразмерным функциям, введены безразмерные величины для параметров материала.

Кроме того, были введены специальные функции, позволившие от из поставленной задачи получить одно разрешающее волновое уравнение относительно продольного перемещения.

К задаче, записанной в безразмерной форме, было применено интегральное преобразование Лапласа по переменной времени [9] и интегральное преобразование Фурье по продольной переменной [10]. Последовательное применение двух интегральных преобразований позволило перейти от задачи для уравнения в частных производных к задаче для одного обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами относительно изображения продольного перемещения.

Было получено частное решение этой задачи, удовлетворяющее граничным условиям на лицевых поверхностях, записанных в перемещениях.

Свойства погранслоя исследовались на примере нормального продольного усилия. В связи с этим было получено выражение для изображения последнего через найденное решение для изображения продольного перемещения.

Обращение найденного решение проводилось в два этапа.

На первом этапе при обращении интегрального преобразования Фурье функция была разложена по полюсам.

При обращении изображения по Лапласу использован метод прифронтной асимптотики, заключающийся в разложении изображения в

ряд по отрицательным степеням параметра интегрального преобразования Лапласа с последующим почленным обращением слагаемых по таблицам интегральных преобразований.

В результате почленного обращения полученного разложения с помощью таблиц интегральных преобразований Лапласа был получен оригинал решения для безразмерного нормального продольного усилия, выражающийся через функции Бесселя.

Найденное в работе решение сравнивалось с решением аналогичной задачи для упругой оболочки [5], полученным другими исследователями. Выяснилось, что вязкоупругое решение отличается от аналогичного упругого решения наличием экспоненциального убывающего множителя, что говорит о затухающем характере решения при удалении фронта от торца, к которому приложено ударное воздействие.

Кроме того, решение для упругой оболочки может быть получено из найденного в выпускной квалификационной работе решения как частный случай при стремлении времен ползучести и релаксации к бесконечности (упруго-подобный случай), что также подтверждает корректность полученных в работе результатов.

Заключение. При написании бакалаврской работы были изучены различные формы представления уравнений состояния, используемых для описания вязкоупругого поведения материалов.

Поставлена трехмерная задача о распространении нестационарных продольных волн в полубесконечной тонкостенной вязкоупругой оболочке, подверженной ударному продольному воздействию тангенциального типа на торец. Уравнения состояния взяты в дифференциальной форме. В качестве модели, описывающей вязкоупругое поведение материала, выбрана модель стандартного вязкоупругого тела.

Приведена схема применимости различных составляющих на примере нормального продольного усилия.

От полной системы уравнений, включающей 15 уравнений: состояния, уравнения движения и соотношения Коши, осуществлен переход к системе 9 уравнений для оболочек вращения в напряжениях и перемещениях.

С помощью асимптотического метода, основанного на малости геометрического параметра – относительной полутолщины оболочки, были выведены асимптотически оптимальные уравнения, описывающие решение исходной задачи в окрестности фронта волны расширения.

С помощью выведенных уравнений поставлена краевая задача об определении нормального продольного усилия для случая продольной нагрузки ударного типа, симметричной относительно окружной координаты, приложенной на торце цилиндрической оболочки.

Решение поставленной задачи проводилось с помощью последовательного применения интегрального преобразования Лапласа по переменной времени и интегральных синус- и косинус-преобразований Фурье по продольной координате. Это позволило перейти от решения уравнения в частных производных к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно изображения продольного перемещения. А найденное решение задачи в изображениях позволило получить изображение для нормального продольного усилия.

Для обращения интегрального преобразования Фурье подынтегральная функция для обратного преобразования была разложена в ряд по вычтам, а для обращения преобразования Лапласа был использован метод прифронтной асимптотики.

Полученное решение для случая вязкоупругой оболочки отличается от решения аналогичной задачи для упругой оболочки, полученного другими исследователями, наличием экспоненциально убывающего множителя, что говорит о затухающем характере решения при удалении фронта от торца, к которому приложено ударное воздействие.

Кроме того, решение для упругой оболочки может быть получено из найденного как частный случай при стремлении вязкоупругих параметров

материала к бесконечности (что соответствует упругому поведению), что также подтверждает корректность полученных в работе результатов.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования процессов распространения нестационарных волн в конечных и полубесконечных вязкоупругих тонкостенных оболочках