

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Исследование поведения изгибной составляющей теории Кирхгофа-

Лява при действии ударной нагрузки на торец цилиндрической оболочки

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 01.03.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Бондарева Владислава Романовича

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Зав. кафедрой

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Саратов 2026

Введение. Проблема динамического нагружения тонкостенных конструкций является одной из ключевых в современной механике деформируемого твёрдого тела. Цилиндрические оболочки широко применяются в авиакосмической, нефтегазовой и энергетической промышленности, а ударные нагрузки на их торцы представляют серьёзную угрозу для эксплуатационной надёжности сооружений. Исследование их поведения в таких условиях критически важно для обеспечения безопасности, долговечности и оптимизации проектных решений. Актуальность темы обусловлена необходимостью разработки эффективных методов анализа нестационарных процессов в цилиндрических оболочках.

Фундаментальные основы математического описания напряжённо-деформированного состояния упругих оболочек были заложены в классических трудах Г. Кирхгофа и А. Лява, которые сформулировали двумерную теорию, построенную на системе непротиворечивых кинематических и статических гипотез. Эта теория, получившая название теории Кирхгофа – Лява, впоследствии послужила отправной точкой для многочисленных уточнений и обобщений. Существенный вклад в развитие динамической теории оболочек и, в частности, в построение уточнённых моделей, учитывающих деформации поперечного сдвига и инерцию вращения нормальных элементов, внесли выдающиеся отечественные и зарубежные механики: В.В. Новожилов, А.Л. Гольденвейзер, С.П. Тимошенко. Их работы позволили расширить границы применимости классических подходов и сформировали теоретический базис для исследования высокочастотных и коротковолновых динамических процессов. Вопросы распространения волн в цилиндрических оболочках, включая анализ дисперсионных свойств и краевых эффектов, нашли отражение в исследованиях Ю.Н. Работнова, Л.И. Слепьяна и ряда других учёных, чьи результаты создали предпосылки для решения практически важных задач о нестационарном деформировании.

Целью работы является исследование поведения изгибающей составляющей в рамках теории Кирхгофа–Лява при действии ударной нагрузки на торец цилиндрической оболочки, разработка аналитических методов её описания.

В соответствии с целью поставлены следующие **задачи**:

1. анализ существующих исследований в области динамического изгиба оболочек;
2. формулировка модели на основе уравнений теории Кирхгофа–Лява;
3. разработка метода решения краевой задачи при ударном нагружении торца с применением преобразования Лапласа;
4. численное решение задачи в программном пакете Ansys;
5. сравнение численного решения с полученным аналитическим решением.

Объектом исследования выступает тонкостенная цилиндрическая оболочка, выполненная из линейно-упругого изотропного материала, геометрические и физико-механические характеристики которой соответствуют области применимости гипотез Кирхгофа – Лява. Предмет исследования — изгибающая составляющая напряжённо-деформированного состояния оболочки, возникающая вследствие ударного нагружения её торца.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка литературы.

В первом разделе «Основные положения и определения теории оболочек Кирхгофа–Лява» изложены основные определения теории оболочек и понятия теории Кирхгофа–Лява. Вводится определение оболочки как тела, ограниченного двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми – толщина оболочки – полагается пренебрежимо малым по сравнению с другими характерными размерами, в частности с минимальным радиусом кривизны срединной поверхности. Под срединной поверхностью понимается геометрическое место точек, равноудалённых от лицевых поверхностей оболочки. Принимаются следующие гипотезы: материал оболочки является

линейно-упругим и изотропным; нормали к срединной поверхности остаются прямыми и нормальными к ней после деформирования; толщина оболочки h мала по сравнению с радиусом кривизны R ; нормальные напряжения поперёк толщины оболочки пренебрежимо малы. Благодаря этим гипотезам теория Кирхгофа-Лява устанавливает различные механические соотношения. Задаются перемещения точек срединной поверхности, выводятся выражения для деформаций срединной поверхности, а именно для мембранных деформаций и изменения кривизн и кручения. Вводятся усилия – статические эквиваленты напряжений. Они разделяются на мембранные усилия (растягивающие/сжимающие и сдвигающие) и поперечные силы. Вводятся моменты: изгибающий и крутящий. Выводятся уравнения равновесия (движения) – дифференциальные уравнения, связывающие усилия, моменты и внешнюю нагрузку.

Во втором разделе «Постановка задачи о нагружении оболочки» поставлена задача о напряжённо-деформированном состоянии в цилиндрической оболочке, вызванном ударной нагрузкой на торец оболочки. Постановка состоит из построения криволинейной системы координат (рисунок 1), а также введения граничных и начальных условий. К срединной поверхности рассматриваемой оболочки привязывается система координат (α, θ, z) , где α – длина дуги вдоль образующей, θ – угол в окружном направлении, z – координата внешней нормали к срединной поверхности.

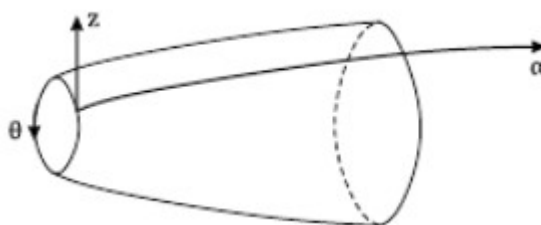


Рисунок 1 - криволинейная система координат

Оболочка считается полубесконечной из предположения о том, что волны, возникающие при нагрузке, не достигают противоположного края оболочки. На

торце оболочки задаётся продольное воздействие изгибающего типа. Оно записывается в виде:

$$\sigma_{11} = IzH(t), \quad v_3 = 0, \quad \text{для } \alpha = 0.$$

Рассматриваются значения времени, которые соответствуют расстоянию, пройденному передним фронтом волны, соизмеримому с характерным значением радиусов кривизны. Предполагается, что оболочка в начальный момент времени находится в состоянии равновесия.

Третий раздел «Решение для изгибной составляющей теории Кирхгофа-Лява в случае цилиндрической оболочки» посвящена разработке аналитического метода решения сформулированной задачи. Уравнения изгибной составляющей записываются в осесимметричном случае относительно следующих двумерных компонент: T_i – продольные усилия, N_i – перерезывающие силы, G_i – изгибающие моменты, u – тангенциальное перемещение, w – нормальное перемещение или прогиб срединной поверхности, ε_i – тангенциальные деформации, \varkappa_i – компоненты изгибной деформации. Вводится малый параметр $\varepsilon = \frac{h}{R}$, а так же безразмерные переменные

$$\xi = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \xi_0, \quad \xi_0 = \frac{\alpha}{R},$$

$$\tau_0 = \frac{c_3 t}{R}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

и безразмерные усилия T_i^* , моменты G_i^* , перерезывающие силы N_i^* и перемещения u^*, w^* :

$$u = h\varepsilon^{-\frac{1}{2}}u^*, \quad w = h\varepsilon^{-1}w^*,$$

$$T_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \varepsilon T_i^*, \quad G_i = \frac{2Eh^2}{1-\nu^2} G_i^*, \quad N_i = \frac{2Eh}{1-\nu^2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} N_i^*.$$

С помощью введённых переменных записываются разрешающие уравнения в перемещениях, а также уравнения состояния. Граничные условия на торце оболочки переписываются в следующем виде:

$$G_1 = \frac{2}{3} h^3 I H(t), w = 0.$$

В связи с видом оболочки уравнения упрощаются: так как расстояние от оси вращения постоянно для цилиндрической оболочки, то из уравнений пропадают члены, содержащие производную от функции $B(\alpha)$ – расстояние от срединной поверхности оболочки до оси вращения. Так же из уравнений пропадут члены, содержащие в знаменателе радиус кривизны $R_1 \rightarrow \infty$. В конечном итоге разрешающие уравнения примут следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} - \frac{\nu}{R_2} \frac{\partial w^*}{\partial \xi} = 0,$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial^4 w^*}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial \tau_0^2} + \frac{1}{R_2^2} w^* - \frac{\nu}{R_2} \frac{\partial u^*}{\partial \xi} = 0.$$

Уравнения состояния запишутся в следующем виде:

$$T_1 = \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\nu}{R_2} w^*,$$

$$T_2 = \nu \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{1}{R_2} w^*,$$

$$G_1 = -\frac{1}{3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2}, G_2 = -\frac{\nu}{3} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \xi^2}.$$

В будущем принимается, что $R_2 = R$, где R – радиус оболочки.

К полученной системе уравнений применяется интегральное преобразование Лапласа по временной переменной с учётом начальных условий. В итоге получается система двух дифференциальных уравнений четвёртого порядка. Данная система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^L}{d\xi^2} - \frac{\nu}{R} \frac{dw^L}{d\xi} = 0 \\ \frac{1}{3} \frac{d^4 w^L}{d\xi^4} + \left(s^2 + \frac{1}{R^2}\right) w^L - \frac{\nu}{R} \frac{du^L}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

Решения для такой системы уравнений представляются в следующем виде:

$$u^L = U(\xi_0) \exp\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\xi_0} p(\xi_0) d\xi_0\right),$$

$$w^L = W(\xi_0) \exp\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\xi_0} p(\xi_0) d\xi_0\right),$$

где U, W – функции интенсивности. Эти функции раскладываются в ряд по малому параметру $\varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

Вид решения подставляется в систему уравнений с учётом разложения функций интенсивности, после чего записывается асимптотический вид полученной системы. Нулевой определитель полученной системы даёт следующее уравнение относительно функции p :

$$\frac{1}{3} p^4 + s^2 + \frac{1 - \nu^2}{R^2} = 0.$$

Решение следующего уравнения даёт четыре корня, но для последующих выкладок необходимо выбрать только те корни, которые обеспечат затухание процесса при удалении от торца, на который прикладывалась нагрузка, вглубь оболочки, так как было принято предположение о том, что волны, возникшие при ударе, не достигают противоположного торца оболочки. Учитывая это корни решения будут иметь следующий вид:

$$p_{1,2} = (-1 \pm i)\gamma \left(s^2 + \frac{1 - \nu^2}{R_2^2}\right)^{\frac{1}{4}}, \gamma = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{2^{\frac{1}{2}}}$$

Из системы дифференциальных уравнений получается система, связывающая нулевое и первое приближение функций интенсивности. При условии, что первое приближение функций U и W известно, находится нулевое приближение функции W .

Общее решение для изображения прогиба записывается в следующем виде:

$$w^L = \frac{1}{\sqrt{B}} (C_1 \cos(\varphi\xi) + C_2 \sin(\varphi\xi)) e^{-\varphi\xi},$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы, $\varphi(s) = \gamma \left(s^2 + \frac{1-\nu^2}{R_2^2} \right)^{\frac{1}{4}}$. Это решение позволяет отыскать выражение для отображения изгибающего момента G_1^L и определить из граничных условий системы выражения для C_1 и C_2 .

Отображение изображения производится с использованием специальных функций $D_{m,c}$ и $D_{m,s}$.

Искомое выражение для оригинала изгибающего момента в главном приближении записывается в следующем виде:

$$G_1 = I \sqrt{\frac{B(0)}{B(\xi_0)}} D_{1,c}(\gamma\xi_0, \tau_0).$$

В четвёртом разделе «Построение численного решения в программной системе Ansys» планируется построение численного решения поставленной задачи для цилиндрической оболочки в программной системе Ansys. Для этого в программной среде Ansys будет построена адекватная геометрическая модель полубесконечной цилиндрической оболочки, обладающая характеристиками, соответствующими исходным теоретическим предположениям. Модель будет дискретизирована подходящим типом оболочечных конечных элементов, позволяющим корректно воспроизводить как мембранные, так и изгибные составляющие деформирования. Материалу будут присвоены значения модуля

упругости, коэффициента Пуассона и плотности, отвечающие линейно-упругому изотропному поведению. Особое внимание будет уделено заданию начальных условий (нулевые перемещения и скорости в начальный момент времени) и граничных условий на торце, которые должны максимально точно воспроизводить внезапно приложенное распределение нормальных напряжений, линейно меняющихся по толщине и постоянных в окружном направлении, а также условие отсутствия прогиба торца.

Пятый раздел «Сравнение результатов численного и аналитического решений» будет посвящена детальному сопоставлению данных, полученных численным путём в среде Ansys, с аналитическим решением, выведенным в третьей главе. Будут построены совмещённые графики эпюр и временных развёрток, проанализированы расхождения, оценена погрешность, обусловленная как численной дискретизацией, так и сделанными асимптотическими упрощениями. Результаты сравнения позволят сделать выводы о границах применимости построенной аналитической теории и о степени её практической пригодности для инженерных оценок.

Заключение. В ходе выполнения данной работы было проведено исследование, направленное на решение задачи для изгибной составляющей теории Кирхгофа – Лява в случае воздействия ударной торцевой нагрузки на оболочку вращения, а также проведено сравнение численного решения для поставленной задачи с аналитическим решением.

В рамках работы решены следующие задачи:

1. Проведён анализ существующих исследований в области динамического изгиба оболочек.
2. Сформулирована модель на основе уравнений теории Кирхгофа – Лява с акцентом на изгибную составляющую с условиями, соответствующими ударному воздействию.
3. Разработан метод решения поставленной модели с использованием преобразования Лапласа.

Построено общее решение для изображения прогиба в виде затухающих тригонометрических функций с произвольными константами, определяемыми из граничных условий. Получено аналитическое выражение для изображения изгибающего момента G_1^L . Обращение преобразования Лапласа выполнено с использованием специальных функций $D_{m,c}$ и $D_{m,s}$, что позволило записать оригинал изгибающего момента в главном приближении в явном аналитическом виде.

Таким образом, полученные аналитические результаты вносят вклад в развитие нестационарной динамики тонкостенных конструкций и создают основу для дальнейших исследований волновых процессов в оболочечных системах с учётом более сложных граничных условий, нелинейных эффектов и геометрических несовершенств.