МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Исследование собственных нелинейных колебаний прямоугольной в плане тонкой изотропной оболочки

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 431 группы
направления 01.03.03 – Механика и математической моделирование

механико-математического факультета

Прокоповой Ренаты Наилевны

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., доцент ________________ И.В. Папкова

Зав. кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор ________________ Л.Ю. Коссович

Саратов 2026

Введение. Проблема статического и динамического анализа тонкостенных конструкций является одной из фундаментальных задач современной механики деформируемого твёрдого тела и инженерной практики. В условиях постоянного стремления к снижению материалоёмкости изделий при одновременном повышении их несущей способности, тонкостенные элементы конструкции получили широчайшее распространение в авиакосмической отрасли, судостроении, энергетике, гражданском и промышленном строительстве. К данному классу объектов относятся пластины и оболочки, которые обладают высокой жёсткостью и прочностью при малой массе. Эксплуатационная надёжность таких сооружений напрямую зависит от корректности математического описания их напряжённо-деформированного состояния (НДС), выбора адекватной расчетной модели и учёта геометрических нелинейностей при значительных перемещениях. **Актуальность темы** исследования обусловлена необходимостью систематизации теоретических основ расчёта тонкостенных конструкций, чёткого разграничения областей применимости линейных и нелинейных моделей, а также строгого формулирования гипотез, позволяющих редуцировать трёхмерные уравнения теории упругости к двумерным моделям срединной поверхности.

Теоретические основы исследования заложены в классических трудах по теории упругости и механике оболочек. Математический аппарат, используемый в работе, опирается на строгие геометрические определения срединной поверхности, концепцию главных радиусов кривизны, а также на гипотезы Кирхгофа–Лява, составляющие основу классической двумерной теории тонких оболочек. Уравнения движения, полученные на базе принципа Даламбера, обеспечивают корректное описание динамического поведения элементов конструкции, а разделение постановок задач на линейную и нелинейную позволяет обоснованно выбирать методы расчёта в зависимости от соотношения прогибов и толщины конструкции.

Целью работы является систематизация теоретических основ расчёта тонкостенных конструкций, установление строгих математических связей между геометрическими параметрами срединной поверхности, внутренними усилиями и перемещениями, а также формулировка критериев перехода от линейной к нелинейной постановке задач статического и динамического деформирования.

Для достижения поставленной цели решаются следующие **задачи**:

1. Провести классификацию тонкостенных конструкций по геометрическим признакам срединной поверхности и ввести аппарат главных радиусов кривизны.

2. Сформулировать основные гипотезы, позволяющие редуцировать трёхмерную задачу теории упругости к двумерной, и вывести соотношения для перемещений и деформаций произвольного слоя оболочки.

3. Определить систему внутренних усилий и моментов, действующих в сечениях, и составить уравнения движения элемента оболочки на основе принципа Даламбера.

4. Установить границы применимости линейной теории, сформулировать условия перехода к нелинейной постановке и проанализировать характерные нелинейные эффекты.

Объектом исследования является тонкостенная конструкция (пластина или оболочка) из линейно-упругого изотропного материала. **Предметом исследования** выступают напряжённо-деформированное состояние тонкостенных элементов, внутренние силовые факторы, а также математические модели, описывающие их статическое и динамическое поведение в рамках линейной и нелинейной постановок.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованных источников.

В первой главе «Общие зависимости нелинейной теории оболочек» проводится детальный анализ геометрических свойств оболочек и пластин, устанавливаются строгие определения и вводится математический аппарат описания их формы. Установлено, что в современном машиностроении широкое распространение получили тонкостенные конструкции, обладающие высокой жёсткостью и прочностью при малой массе. К ним относятся пластины и оболочки. Дано фундаментальное определение: оболочкой называется тело, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других. Поверхность, делящая толщину оболочки пополам, называется срединной поверхностью. Данная поверхность играет центральную роль в построении двумерных моделей, так как именно к ней привязываются координатные линии и векторы перемещений.

Установлено строгое геометрическое различие между пластиной и оболочкой: в случае, если срединная поверхность представляет собой плоскость, мы получим тонкую пластинку; оболочка отличается от пластины тем, что её срединная поверхность является криволинейной. Классификация оболочек производится по очертанию этой поверхности. Простейшими примерами являются цилиндрические, конические и сферические оболочки. Для характеристики поверхности в каждой её точке вводятся понятия главных радиусов кривизны, которые соответствуют максимальной и минимальной кривизне нормальных сечений. В оболочках вращения главные радиусы кривизны лежат в меридиональном и окружном направлениях. В зависимости от знака кривизны различают оболочки положительной (сферическая), нулевой (цилиндрическая) и отрицательной гауссовой кривизны. Примером смешанной кривизны служит тороидальная оболочка, в которой в разных точках наблюдается как положительная, так и отрицательная кривизна. Данная классификация имеет принципиальное значение для выбора математической модели расчёта, поскольку знак гауссовой кривизны напрямую влияет на характер распределения напряжений, способность конструкции воспринимать нагрузку преимущественно мембранными усилиями или изгибом, а также на устойчивость при статическом и динамическом нагружении.

Во второй главе «Собственные нелинейные колебания» рассматривается математический аппарат описания напряжённо-деформированного состояния (НДС) тонкостенных конструкций. Для описания НДС оболочек в теоретических исследованиях принимается ряд допущений. Материал оболочки считается однородным, изотропным и подчиняющимся закону Гука. Отличительной особенностью общих зависимостей, относящихся к тонким оболочкам, является сведение уравнений трёхмерной задачи теории упругости к уравнениям для двух измерений. При этом для однослойной однородной оболочки координатную систему естественно связать со срединной поверхностью оболочки. В качестве основных координатных направлений принять линии кривизны срединной поверхности.

Одним из путей приведения трёхмерной задачи к двумерной является принятие гипотезы недеформируемых нормалей (гипотезы Кирхгофа–Лява). Данная гипотеза состоит в том, что любое волокно, нормальное к срединной поверхности до деформации, остаётся после деформации прямым и нормальным к срединной поверхности в её новом очертании; вместе с тем длина волокна вдоль толщины оболочки остаётся неизменной. Дополнительное допущение состоит в том, что нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями. Наиболее распространённой является модель, основанная на гипотезах Кирхгофа–Лява. Эти гипотезы включают: 1) гипотезу недеформируемых нормалей: прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остаётся прямолинейным и нормальным к ней после деформации; 2) гипотезу о ненадавливании слоёв: нормальными напряжениями в направлении нормали к срединной поверхности можно пренебречь по сравнению с основными напряжениями.

Перемещения произвольной точки оболочки с координатой z (расстоянием от срединной поверхности) выражаются через перемещения точек срединной поверхности (u, v, w) следующим образом:

$$u^z = u - z\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad v^z = v - z\frac{\partial w}{\partial y}, \qquad w^z = w.$$

где u, v — тангенциальные перемещения точек срединной поверхности, w — нормальное перемещение (прогиб). На рисунке 1 проиллюстрировано сечение оболочки плоскостью, касательной к линиям x и z. При деформации оболочки происходит поворот нормали к линии x на такой же угол, на какой поворачивается элемент к той же линии. С использованием этих гипотез деформации в слое, отстоящем на z от срединной поверхности, выражаются через перемещения. Так, на рисунке 2 показано удлинение элемента ABCD, а на рисунке 3 — деформации, связанные с радиальными перемещениями w.

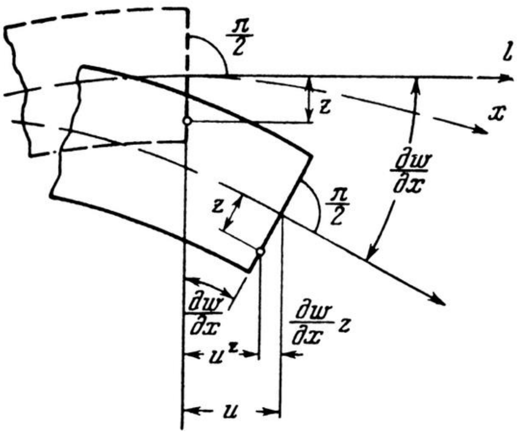

Рисунок 1 - Деформация элемента оболочки по гипотезе Кирхгофа—Лява

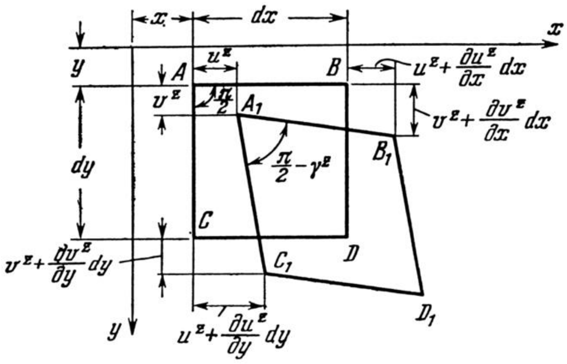

Рисунок 2 - Деформации в слое оболочки, параллельном срединной поверхности

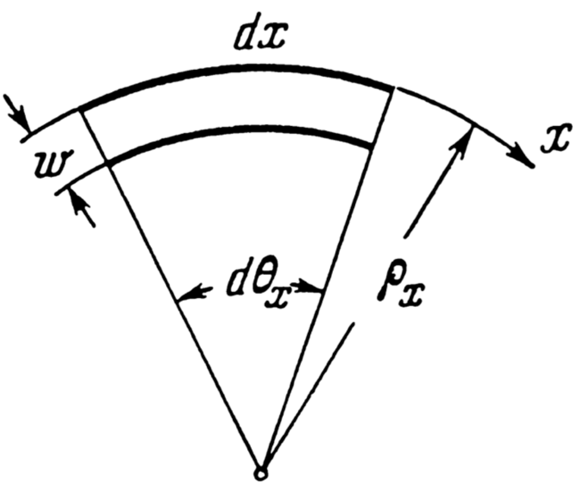

Рисунок 3 - Составляющие деформаций, связанные с радиальными перемещениями

Напряжённое состояние оболочки характеризуется совокупностью усилий и моментов, действующих в её сечениях. К ним относятся:

– Цепные (мембранные) усилия: нормальные усилия N_x, N_y и касательное усилие T, которые являются равнодействующими нормальных и касательных напряжений по толщине.

– Изгибающие и крутящий моменты: M_x, M_y и H, возникающие от линейного распределения нормальных и касательных напряжений по толщине.

– Поперечные силы: Q_x, Q_y, связанные с касательными напряжениями поперечного сдвига.

В статических задачах внутренние силы, действующие на элемент оболочки, уравновешивают внешнюю поперечную нагрузку следующим образом. С одной стороны, равновесие достигается за счёт усилий в срединной поверхности. Если при этом в сечениях оболочки отсутствуют изгибающие и крутящие моменты, то оболочку можно охарактеризовать как безмоментную.

Уравнения моментов относительно касательных к линиям y и x позволяют выразить поперечные силы через прогиб:

$$Q_x = \frac{\partial M_Z}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}.$$

Проводится сравнительный анализ двух подходов к расчёту тонкостенных конструкций. В зависимости от величины прогибов и деформаций различают два типа задач: линейные и нелинейные. Рассматривается метод Бубнова-Галеркина.

Линейная задача. В рамках линейной теории предполагается, что прогибы пластин или оболочек малы по сравнению с их толщиной. При этом деформации и перемещения связаны линейными соотношениями, а внутренние силы определяются в основном изгибом. В этом случае уравнения движения упрощаются, и система ведёт себя как линейная, для которой справедлив принцип суперпозиции. Классическим примером линейных колебаний является движение шарнирно опертой прямоугольной пластины, форма которой описывается произведением тригонометрических функций. Линейная теория тонких пластин применима при условии, что ожидаемые прогибы не превышают толщину конструкции.

Нелинейная задача. Если прогибы становятся соизмеримыми с толщиной, то необходимо учитывать деформации в срединной поверхности (мембранные напряжения), которые приводят к нелинейной связи между перемещениями и деформациями. В этом случае жёсткость системы становится переменной и зависит от величины прогиба. При больших прогибах необходимо переходить к нелинейной теории, которая описывается системой уравнений:

$$\Delta^2 w = \frac{P}{D} + \frac{1}{D}\, L(w, F),$$

$$\Delta^2 F = -\frac{Eh}{2} L(w, w),$$

здесь F — функция напряжений в срединной поверхности, а L(w,F) — нелинейный оператор, отражающий взаимодействие изгибных и мембранных усилий. Решение этих уравнений позволяет описать такие характерные для нелинейных систем явления, как зависимость частоты от амплитуды, появление высших гармоник и возможную потерю устойчивости при динамическом нагружении. Переход к нелинейной модели является обязательным при расчёте современных лёгких конструкций, подверженных интенсивным динамическим воздействиям, поскольку пренебрежение мембранными деформациями в данном случае приводит к существенному занижению жёсткостных характеристик и ошибочному прогнозированию критических нагрузок.

В жесткой пластинке без заметной погрешности можно считать ее срединный слой при поперечной нагрузке нейтральным, т. е. свободным от напряжений растяжения–сжатия. В гибких пластинках (при расчетах в пределах упругости) наряду с чисто изгибными напряжениями необходимо учитывать напряжения, равномерно распределенные по толщине пластинки. Последние называются цепными (или мембранными) напряжениями. В абсолютно гибкой пластинке, или мембране, при исследовании упругих деформаций можно пренебречь собственно изгибными напряжениями по сравнению с напряжениями в срединной поверхности.

Задача расчёта жёсткой пластинки сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения в частных производных:

$$\nabla^4 \omega = \frac{q}{D},$$

где

$\omega = (x, y)$ – функция прогибов срединной поверхности пластинки;

$q(x, y)$ – интенсивность поверхностной нагрузки;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ м цилиндрическая жесткость пластинки;

$\nabla^4 \omega = \nabla^2 \nabla^2 \omega = \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4}$ – двойной оператор Лапласа над функцией ω.

Заключение. В результате выполненного исследования решена важная научная задача, связанная с систематизацией теоретических основ расчёта тонкостенных конструкций. Получены следующие основные результаты:

1. Дано строгое геометрическое определение оболочки и пластины, введён аппарат главных радиусов кривизны, проведена классификация по знаку гауссовой кривизны (положительная, нулевая, отрицательная, смешанная), что позволяет обоснованно выбирать математическую модель расчёта в зависимости от геометрии срединной поверхности.
2. Сформулирована система гипотез Кирхгофа–Лява, обеспечивающая редукцию трёхмерной задачи теории упругости к двумерной модели. Получены аналитические выражения для перемещений произвольной точки оболочки через перемещения срединной поверхности, что служит основой для расчёта деформаций в любом слое конструкции.
3. Определена система внутренних усилий и моментов (цепные усилия, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы), составлены уравнения движения элемента оболочки на основе принципа Даламбера, установлены аналитические связи между поперечными силами и прогибом через двумерный оператор Лапласа.

4. Чётко разделены линейная и нелинейная постановки задач по критерию соизмеримости прогибов с толщиной. Установлено, что при больших прогибах необходимо учитывать мембранные напряжения, приводящие к нелинейной связи между перемещениями и деформациями, переменной жёсткости системы и появлению таких эффектов, как зависимость частоты от амплитуды, высшие гармоники и динамическая потеря устойчивости.

Разработанный теоретический аппарат создаёт надёжную основу для дальнейшего исследования статического и динамического поведения тонкостенных конструкций, оптимизации их параметров и повышения надёжности инженерных сооружений. Все выводы базируются исключительно на положениях, изложенных в оригинальной рукописи дипломной работы, и соответствуют современным требованиям механики деформируемого твёрдого тела. Таким образом, все поставленные в работе задачи решены, цель исследования достигнута. Полученные аналитические результаты вносят вклад в развитие теории тонкостенных конструкций и создают основу для дальнейших исследований напряжённо-деформированного состояния оболочечных систем с учётом более сложных граничных условий, нелинейных эффектов и геометрических несовершенств.