

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

Математическое моделирование поведения гибких тонких

пластин Кирхгофа

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 237 группы

направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Барышева Дмитрия Андреевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент

Е.Ю. Крылова

Зав. кафедрой
зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Саратов 2026

Введение. Тонкостенные элементы конструкций типа стержней, пластин и оболочек применяются в различных областях техники, поэтому определение напряженно-деформированного состояния таких элементов имеет большое прикладное значение. Многие задачи статики, колебаний и устойчивости тонкостенных конструкций были решены еще до создания математической теории упругости. Пластины и оболочки представляют собой трехмерные тела, один из размеров которых много меньше двух других, что позволяет рассматривать их как двумерные тела, обладающие тем не менее значительной несущей способностью. Решение краевых задач для пластин и оболочек на основе трехмерных уравнений теории упругости представляет значительные трудности, поэтому для расчета такого рода конструкций строятся двумерные модели, учитывающие специфику (особенности) их геометрии и напряженно-деформированного состояния. Построение таких моделей и разработка методов решения соответствующих краевых задач составляют содержание самостоятельного раздела механики твердого деформируемого тела — теории пластин и оболочек.

Существуют различные методы редукции трехмерной задачи теории упругости к двумерной. Редукция трехмерной задачи к двумерной позволяет не только существенно упростить математическую задачу, уменьшая число независимых переменных на единицу, но и учесть особенности распределения напряжений и деформаций в тонких телах — пластинах и оболочках. При сведении трехмерной задачи теории упругости к двумерной задаче (теории пластин и оболочек) модели строятся либо на основе кинематических и силовых гипотез, либо с использованием разложений решений трехмерной теории упругости по некоторой полной системе функций.

Классические теории стержней основаны на гипотезе плоских сечений, теории пластин — на гипотезах Кирхгофа, теории оболочек — на гипотезах Кирхгофа — Лява. Впервые подход к построению теории пластин и оболочек, основанный на кинематических и силовых гипотезах, предложен в работах Г. Кирхгофа и развит в работах А. Лява. Теория пластин и оболочек, основанная на

гипотезах Кирхгофа — Лява, известна как классическая теория тонких пластин и оболочек. В классических теориях используются линейные аппроксимации перемещений по поперечной координате и не учитываются упругие поперечные взаимодействия волокон. Большой вклад в развитие классической теории тонких оболочек, разработку методов решения соответствующих начально-краевых задач и решение прикладных задач внесли советские ученые.

Классическая теория Кирхгофа для линейного изгиба пластин точна только для задач с малыми прогибами ($w \leq 0,2$ толщины), пренебрегая деформациями срединной поверхности и соответствующими мембранными напряжениями. По мере увеличения внешней силы поперечный прогиб может стать относительно большим ($w \geq 0,3$ толщины). В этом случае следует учитывать растяжение срединной поверхности пластины, и, соответственно, мембранные усилия, возникающие из-за этого растяжения, играют роль в восприятии поперечных нагрузок. Обобщение на случай больших деформаций было впервые предложено фон Карманом в основополагающей работе, где нелинейные члены сохраняются в кинематических соотношениях, чтобы учесть значительно больший прогиб пластины (w сравним с толщиной пластины или больше, но остаётся малым по отношению к другим размерам пластины)

Многие статьи и монографии посвящены аналитическим и численным методам решения задач о пластинах, таким как метод Навье, метод Леви, метод конечных элементов, метод Рэлея — Ритца и метод граничных элементов. Однако следует подчеркнуть, что аналитические решения могут быть применены только к определённому классу задач о пластинах. Численные решения обычно используются для задачи со сложной геометрией, условиями нагружения или граничными условиями. В недавнем обзоре Аврейцевича и др. представлены преимущества и недостатки широкого спектра различных подходов, основанных на методах типа Фурье, методах Бубнова — Галёркина (МБГ), методах Канторовича — Власова (МКВ), вариационных итерационных методах (ВИМ), а также методе Вайндинера (МВ) и методе Аграновского — Баглая — Смирнова (МАБС). Численные решения были сравнены с решениями, полученными

различными комбинациями упомянутых методов, решениями, полученными МКР второго порядка точности, и методом конечных элементов с использованием треугольных и четырёхугольных конечных элементов. Основываясь на результатах, представленных в, представляется, что модификации МБГ могут быть применены к широкому кругу задач о пластинах. Усовершенствования включают МКВ, ВИМ, МАБС и их комбинации. Обработка модификаций возможна, особенно с использованием современных вычислительных средств, доступных в настоящее время.

Определение характеристик напряженно-деформированного состояния одновременно удовлетворяющим уравнениям и граничным условиям на контуре пластинки, представляет трудную задачу, точное решение которой можно получить только в частных случаях.

Одним из приближенных методов определения функций прогибов пластинок произвольной формы является метод Бубнова–Галеркина.

Целью бакалаврской работы является вывод уравнений равновесия упругой прямоугольной пластины в геометрически нелинейной постановке на основе теории Кирхгофа.

Задачами выполняемой работы являются:

- 1) подготовка и реализация алгоритма определения НДС пластины на основе метода Бубнова-Галеркина;
- 2) проведение расчетов прогиба шарнирно опертой по контуру пластины.

Структура и объём работы. Магистерская работа состоит из введения, четырех глав, заключения и содержит 62 страницы. Список использованных источников включает 20 наименований.

В первом разделе «Применение принципа возможных перемещений. Вариационное уравнение равновесия» на основе применения принципа возможных перемещений получены вариационные уравнения равновесия и обобщенные граничные условия упругой прямоугольной пластины по теории ф.Кармана по классической модели Кирхгоффа.

Во втором разделе «Метод Бубнова-Галеркина для определения НДС пластины» описаны основные шаги алгоритма получения численного решения задачи изгиба на основе метода Бубнова-Галеркина для определения прогиба и тангенциальных перемещений срединной плоскости пластины.

В третьем разделе «Реализация алгоритм численного моделирования методом Бубнова-Галеркина» показано применение тригонометрических базисных функций метода Бубнова-Галеркина при реализации численного расчета напряженно-деформированного состояния шарнирно опертой и жестко заделанной по краям пластины.

В четвертом разделе «Численное моделирование при различных способах закрепления краев прямоугольных пластин под действием распределенной нагрузки постоянной интенсивности» описаны результаты численного моделирования при различных способах закрепления краев квадратной и прямоугольной пластин под действием распределенной нагрузки постоянной интенсивности.

Систему разрешающих уравнений для определения перемещения упругой пластины в нелинейной постановке ф.Кармана на основе теории Кирхгоффа можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi \partial \eta} + \beta^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \\ & + \frac{1+\nu}{2} \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \\ & \frac{1+\nu}{2} \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} + \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial W}{\partial \eta} \left(\frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \right) \\ & + \frac{1+\nu}{2} \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi\eta}^4 W - \frac{12}{\beta^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \alpha^2 \beta^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + \alpha^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \left(\nu \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \alpha^2 \beta^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{\nu}{2} \beta^2 \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 \right) \right. \\ \left. + (1 - \nu) \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \left(\alpha^2 \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \alpha^2 \beta^2 \frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) \right] - Q = 0, \\ \nabla_{\xi\eta}^4 W = \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^4 W}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \alpha^4 \frac{\partial^4 W}{\partial \eta^4}. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения: $\alpha = \frac{a}{b}$ – отношение сторон пластины, $\beta = \frac{h}{a}$ – параметр тонкостенности, h - толщина пластины, $Q = \frac{qa^4}{Dh}$ - интенсивность поперечной нагрузки.

Граничные условия для пластины записываются в соответствие со способами закрепления краев.

Для численного решения записанной краевой задачи был использован метод Бубнова-Галеркина.

При шарнирном опирании контура пластины базисные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \xi = 0, \xi = 1 \quad V = 0 \quad W = 0 \quad M_x = 0, \\ \eta = 0, \eta = 1 \quad U = 0 \quad W = 0 \quad M_y = 0. \end{aligned}$$

выбраны в виде

$$\begin{aligned} U(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M U_{n,m} \cos(\pi n \xi) \sin(\pi m \eta), \\ V(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M V_{n,m} \sin(\pi n \xi) \cos(\pi m \eta), \\ W(\xi, \eta) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M W_{n,m} \sin(\pi n \xi) \sin(\pi m \eta). \end{aligned}$$

Основная сложность расчета связана с необходимостью вычисления весовых коэффициентов из системы нелинейных алгебраических уравнений,

полученных интегрированием невязки. Даже при относительно небольших значениях N и M задача является трудоемкой.

Для решения задачи определения весовых коэффициентов был выбран пакет Wolfram Mathematica. К основным возможностям пакета следует отнести возможность как символьных, так и численных вычислений, понятный код, алгоритмическая производительность.

Непосредственное проведение расчетов в символьном виде для определения НДС пластины оказалось существенно время затратным. Так на расчет для одной моды $N = M = 1$ уходит более нескольких минут. Поэтому использована идея предварительного расчета вспомогательных интегралов и сохранение их в память ПК и дальнейшее их использование уже непосредственно для определения искомых компонент вектора перемещения точке срединной плоскости пластины.

Эти интегралы для базисных функций

$$\phi_i = \cos(m_i \pi \xi) \sin(n_i \pi \eta),$$

$$\chi_i = \sin(m_i \pi \xi) \cos(n_i \pi \eta),$$

$$\psi_i = \sin(m_i \pi \xi) \sin(n_i \pi \eta).$$

определяются формулами:

в первом уравнении представлено квадратичное слагаемое

$$\frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}.$$

При после умножения на базисную функцию и интегрирования имеем:

$$\int \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = (\pi n_j)(\pi m_k)(\pi n_k) ICCS(m_i, m_k, m_j) ICCS(n_j, n_k, n_i).$$

Здесь обозначено

$$ICCS(a, b, c) = \int \cos(a \pi *) \cos(b \pi *) \sin(c \pi *) d*.$$

В формуле выше и далее * обозначает один из аргументов ξ или η .

Во втором уравнении представлено слагаемое:

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}$$

Аналогично приходим:

$$\int \chi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = (\pi m_j)(\pi m_k)(\pi n_k) ICCS(m_j, m_k, m_i) ICCS(n_i, n_k, n_j).$$

В третьем уравнении представлены как квадратичные слагаемые, так кубические. Рассмотрим сначала квадратичные:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial V}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial U}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial V}{\partial \eta},$$

$$\int \psi_i \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \frac{\partial \phi_k}{\partial \xi} d\xi d\eta = (\pi m_j)(\pi m_k)^2 ISSS(m_i, m_j, m_k) ISSS(n_j, n_i, n_k).$$

Здесь обозначено

$$ISSS(a, b, c) = \int \sin(a \pi *) \sin(b \pi *) \sin(c \pi *) d*.$$

У следующих слагаемых меняется лишь множитель перед произведением ISS ISS :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial V}{\partial \eta} \sim (\pi n_j)(\pi m_k)^2,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial U}{\partial \xi} \sim (\pi m_j)(\pi n_k)^2,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial V}{\partial \eta} \sim (\pi n_j)(\pi n_k)^2.$$

Для квадратичных слагаемых вида

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial U}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial V}{\partial \xi}$$

приходим к соотношениям:

$$\int \psi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = \pi^3 n_j m_k n_k ICCS(m_j, m_k, m_i) ICCS(n_j, n_k, n_i),$$

$$\int \psi_i \frac{\partial \chi_j}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = \pi^3 m_j m_k n_k ICCS(m_j, m_k, m_i) ICCS(n_j, n_k, n_i).$$

Далее имеем следующую группу слагаемых в первых двух уравнениях:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial W}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{\partial W}{\partial \eta}.$$

Так для первой из записанных компонент имеем:

$$\int \phi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = -(\pi m_j)(\pi m_k)^2 ICCS(m_i, m_j, m_k) ISSS(n_i, n_j, n_k).$$

Для компоненты $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial W}{\partial \xi}$ множитель меняется:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial W}{\partial \xi} \sim -(\pi m_j)(\pi n_k)^2.$$

А для оставшихся компонент меняется не только множитель, но и произведение $ICS ISS$:

$$\int \chi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial \xi^2} d\xi d\eta = -(\pi n_j)(\pi m_k)^2 ISSS(m_i, m_j, m_k) ICCS(n_i, n_j, n_k).$$

Для компоненты $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial W}{\partial \eta}$ также множитель меняется:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{\partial W}{\partial \eta} \sim -(\pi n_j)(\pi n_k)^2.$$

Введенные выше интегралы вычисляются аналитически и определяются формулами:

$$IS(m, n, p)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (S(m+n-p) + S(m-n+p) + S(-m+n+p) - S(m+n+p)),$$

$$S(r) = \frac{2}{r}, \text{ для нечетных } r, \text{ иначе } 0$$

$$ICCS(m, n, p)$$

$$= \frac{1}{4\pi} (S(m+n+p) + S(m-n-p) + S(m+n-p) + S(m-n+p)),$$

$$ICSS(m, n, p) = \frac{1}{4} (\delta_{m-n+p,0} + \delta_{m-n-p,0} - \delta_{m+n+p,0} - \delta_{m+n-p,0}).$$

Наибольшие вычислительные сложности представляют собой кубический слагаемые

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2, \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2, \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} \frac{\partial W}{\partial \eta} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Эти слагаемые приводят к интегралам вида:

$$I_c(i, j, k, l) = \int_0^1 \sin(m_i \pi *) \sin(m_j \pi *) \cos(m_k \pi *) \cos(m_l \pi *) d*,$$

$$I_s(i, j, k, l) = \int_0^1 \sin(m_i \pi *) \sin(m_j \pi *) \sin(m_k \pi *) \sin(m_l \pi *) d*.$$

Каждый из этих интегралов вычисляется с использованием известных тригонометрических формулы для суммы и разности косинусов. Поэтому получаем формулы:

$$I_c(i, j, k, l) = \frac{1}{4} (CO(i - j, k - l) + CO(i - j, k + l) - CO(i + j, k - l) - CO(i + j, k + l)),$$

$$I_s = \frac{1}{8} (\delta_{m_i - m_k, m_j - m_l} + \delta_{m_i + m_k, m_j + m_l} - \delta_{m_i - m_k, m_j + m_l} - \delta_{m_i + m_k, m_j - m_l}).$$

CO – функция, учитывающая нулевую моду косинуса при интегрировании.

Приведем итоговые выражения вычисления коэффициентов метода Бубнова-Галеркина для кубических слагаемых:

$$\int \psi_i \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi} d\xi d\eta = -\pi^4 m_j^2 m_k m_l I_c(i, j, k, l) I_s(i, j, k, l),$$

$$\int \psi_i \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_l}{\partial \xi} d\xi d\eta = -\pi^4 n_j^2 m_k m_l I_c(i, j, k, l) I_s(i, j, k, l),$$

$$\int \psi_i \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi^2} \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_l}{\partial \eta} d\xi d\eta = -\pi^4 m_j^2 n_k n_l I_s(i, j, k, l) I_c(i, j, k, l),$$

$$\int \psi_i \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \eta^2} \frac{\partial \psi_k}{\partial \eta} \frac{\partial \psi_l}{\partial \eta} d\xi d\eta = -\pi^4 n_j^2 n_k n_l I_s(i, j, k, l) I_c(i, j, k, l),$$

$$\int \psi_i \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi} \frac{\partial \psi_l}{\partial \eta} d\xi d\eta = \pi^4 m_j n_j m_k n_l I_c(i, l, j, k) I_c(i, k, j, l).$$

После вычисления введенных коэффициентов в основном блоке организован гибкий «прозрачный» код определения вектора невязок и минимизации его нормы, методом Ньютона с начальным приближением, заданным на основе решения линейной задачи.

```

PlateSolver[a_, b_, h_, q0_] := Module[{qbar, Q, initial, posW11, sol, R, resnorm, J, delta},
  qbar = 12 (1 - ν²) q0 / (Ee h³);
  Q = Table[LoadW[i, qbar], {i, Nmodes}];

  initial = ConstantArray[0.0, N dof];
  posW11 = 2 Nmodes + idx[{1, 1}];
  initial[[posW11]] = 4 qbar / Pi^6 / (1 / a^2 + 1 / b^2)^2;

  sol = initial;
  Print["Newton start"];
  Do[
    R = Residual[sol, a, b, h, Q];
    resnorm = Norm[R];
    Print["Iter = ", iter, " residual = ", ScientificForm[resnorm]];
    Print["1,1 mode Wcoef = ", sol[[2 Nmodes + 1]]];

    If[resnorm < NewtonTolerance, Break[]];
    J = JacobianM[sol, a, b, h];
    delta = LinearSolve[J + RegParam IdentityMatrix[N dof], -R, Method -> "Krylov"];
    sol += delta;
  , {iter, 1, NewtonMaxIterations}
  ];
  Print["Newton done"];
  <|"Solution" -> sol|>
]

```

Рисунок 1 – Фрагмент кода программы

Предварительные символьные вычисления первой моды были использованы для тестирования и контроля вычислений.

Приведенный алгоритм позволил существенно снизить время расчета. Так при $N=M=11$ (3×121) уравнений время предварительно расчета составило 186 сек, а основной итерационный процесс потребовал 243 сек на средне бюджетном ПК ($N=M=5$ – всего 6 сек).

На рисунках 2 – 3 приведены поверхности прогиба и тангенциальных смещений стальной пластины при постоянной поперечной нагрузке.

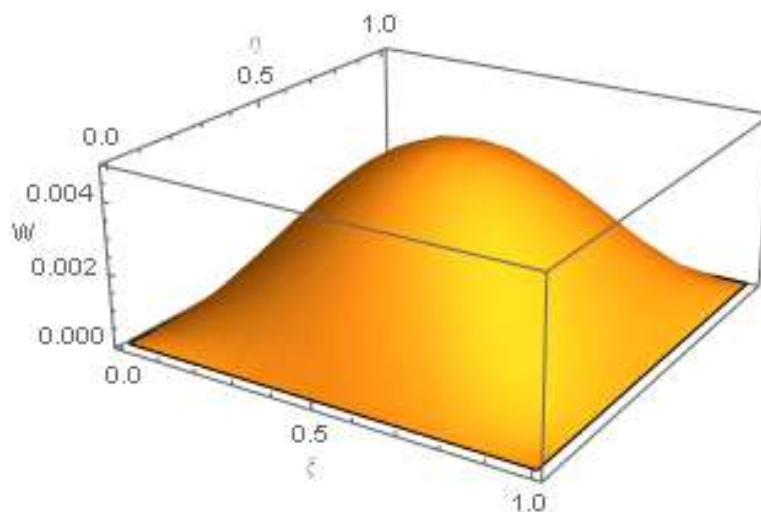
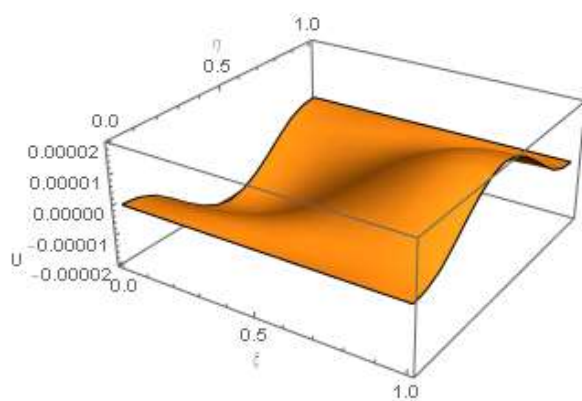
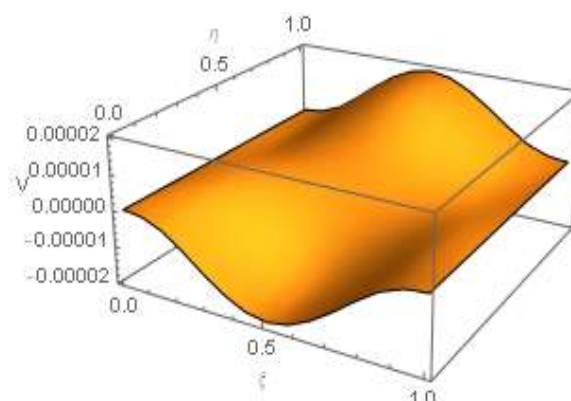


Рисунок 2 – поверхность прогиба и тангенциальных смещений стальной пластины при постоянной поперечной нагрузке.



(а)



(б)

Рисунок 3 – поверхность прогиба и тангенциальных смещений стальной пластины при постоянной поперечной нагрузке.

Заключение. Выполнен вывод уравнений равновесия упругой прямоугольной пластины в геометрической нелинейной постановке на основании теории Кирхгофа. Реализован алгоритм определения НДС пластины на основе метода Бубнова-Галеркина. Выполнены вычислительные эксперименты определения НДС пластины при различных способах закрепления сторон, различной геометрии пластины. Проведен анализ поведения НДС пластины. Изучены возможности пакета Wolfram Mathematica для реализации алгоритма определения НДС пластины на основе метода Бубнова-Галеркина и предложены решения оптимизации вычислений.