

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра математической теории упругости и биомеханики

**Гиперболический погранслой в цилиндрической оболочке при**  
**симметричных торцевых воздействиях**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 237 группы

направления 01.04.03 – Механика и математическое моделирование

механико-математического факультета

Федорова Максима Алексеевича

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Зав. кафедрой

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор

Л.Ю. Коссович

Саратов 2026

**Введение.** Актуальность темы обоснована тем, что тонкостенные конструкции, в частности упругие цилиндрические оболочки, остаются ключевыми элементами современной техники. При эксплуатации они часто подвергаются интенсивным динамическим и ударным нагрузкам. Понимание того, как распространяется ударная волна в материале, критически важно для оценки запаса прочности конструкции. При данных видах нагрузки нам важно исследовать нестационарные волновые процессы, возникающие при продольном ударе по торцу оболочки. Построение точных аналитических моделей, способных учитывать высокочастотную осцилляцию и предсказать пиковые напряжения без громоздких численных симуляций, определяет не только высокую теоретическую, но и практическую ценность данного исследования.

**Цель работы** - построить замкнутое аналитическое решение, описывающее напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки вблизи фронта волны при симметричном продольном ударе с косинусоидальным распределением нагрузки по толщине. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие **задачи**:

- 1) приведение исходной системы дифференциальных уравнений к безразмерному виду, удобному для анализа физических параметров;
- 2) применение интегральных преобразований Лапласа и Фурье для сведения задачи к обыкновенному дифференциальному уравнению в пространстве изображений;
- 3) точное аналитическое обращение Фурье-образа с использованием теоремы вычетов Коши;
- 4) применение прифронтной асимптотики для перехода к оригиналам времени;
- 5) доказательство сходимости решения и численный анализ полученного решения.

**Материалы исследования** включают в себя фундаментальные методы математической физики и механики сплошных сред. В качестве основного аналитического аппарата применялось операционное исчисление (прямые и обратные интегральные преобразования), теория функций комплексного переменного (поиск полюсов, интегрирование по контуру) и методы асимптотического разложения. Для верификации полученной математической модели, вычисления бесконечных рядов Фурье-Бесселя и визуализации волновых эффектов использовался программный вычислительный комплекс Mathcad.

**Научная новизна и значимость работы** заключается в том, что вместо традиционных упрощенных приближений было получено математически точное аналитическое решение в виде бесконечного спектрального ряда. В работе строго доказано, что на самом фронте волны полученный ряд Фурье-Бесселя идеально вырождается в заданное граничное условие, а сразу за фронтом начинает описывать дисперсионное искажение импульса. Это дает инженерам точный инструмент для оценки напряжений в первые микросекунды после ударного воздействия.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Метод сведения волнового уравнения к краевой задаче с использованием аппарата двойных интегральных преобразований.
2. Метод точного обращения гиперболических функций через теорему вычетов Коши с переходом к спектральному ряду по толщине.
3. Результаты анализа и нахождение закономерностей распределения напряжений, определяемые спецификой косинусоидальной нагрузки на торец оболочки.

**Структура ВКР.** Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованных источников.

**В первой главе** «Постановка задачи и математическая модель» рассматривается процесс распространения продольных волн в упругой цилиндрической оболочке полутолщины  $h$ . Динамика вблизи фронта волны описывается волновым уравнением для продольного перемещения  $v_1$ :

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha$  - продольная координата,  $z$  - нормальная координата по толщине,  $t$  - время,  $c_1$  - скорость продольной волны.

Для обобщения задачи осуществляется переход к безразмерным координатам и времени:

$$\xi = \frac{\alpha}{h}, \quad \zeta = \frac{z}{h}, \quad \tau = \frac{c_2 t}{h}, \quad (2)$$

где  $c_2$  - скорость сдвиговой волны.

С учетом новых переменных дифференциальное уравнение приводится к безразмерному виду:

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \zeta^2} - \kappa^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial \tau^2} = 0, \quad (3)$$

где  $\kappa^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}$ ,  $\nu$  - коэффициент Пуассона.

Предполагается, что до момента удара оболочка находилась в состоянии покоя, что определяет нулевые начальные условия:

$$v_1|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

На торце оболочки ( $\xi = 0$ ) задается симметричное ударное воздействие в виде косинусоидального распределения нормального напряжения.

$$\sigma_{11}|_{\xi=0} = \cos(m\pi\zeta) H(\tau), \quad (5)$$

где  $m$  – положительное целое число,  $H(\tau)$  - функция Хевисайда.

Связь между напряжением и производной продольного перемещения выражается формулой:

$$\sigma_{11} = \frac{1}{A} \frac{\partial v_1}{\partial \xi}, \quad (6)$$

где константа  $A$  зависит от физико-геометрических параметров ( $E$  - модуль Юнга):

$$A = \frac{2(1 + \nu)\kappa^2 h}{E}. \quad (7)$$

Граничное условие на торце для перемещения принимает вид:

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = A \cos(m\pi\zeta) H(\tau). \quad (8)$$

Лицевые поверхности оболочки предполагаются свободными от напряжений, что дает граничные условия при  $\zeta = \pm 1$ :

$$\sigma_{33} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \sigma_{13} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0. \quad (9)$$

**Во второй главе** «Интегральные преобразования и решение в пространстве изображений» рассматривается нахождение аналитического решения деформированного состояния оболочки в спектральной области. Для исключения производных по времени к исходному безразмерному уравнению применяется прямое преобразование Лапласа с параметром  $s$ . С учетом нулевых начальных условий вторая производная по времени переходит в алгебраическое выражение  $s^2 v_1^L$ , и уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1^L}{\partial \zeta^2} - \kappa^2 s^2 v_1^L = 0. \quad (10)$$

Граничное условие на торце  $\xi = 0$  в пространстве Лапласа (с учетом табличного преобразования функции Хевисайда  $L\{H(\tau)\} = 1/s$ ) записывается как:

$$\frac{\partial v_1^L}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{A}{s} \cos(m\pi\zeta). \quad (11)$$

Далее, для исключения производных по продольной координате  $\xi$ , к уравнению применяется косинус-преобразование Фурье с параметром  $\chi$ . С учетом граничных условий исходное уравнение преобразуется в неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) второго порядка:

$$\frac{d^2 v_1^{LC}}{d\zeta^2} - \lambda^2 v_1^{LC} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{s} \cos(m\pi\zeta). \quad (12)$$

где

$$\lambda^2 = \chi^2 + \kappa^2 s^2. \quad (13)$$

Общее решение неоднородного ОДУ ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$v_1^{LC}(\zeta) = C_1 \operatorname{ch}(\lambda\zeta) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda\zeta) + v_{\text{ч.н.}}^{LC}(\zeta). \quad (14)$$

Ввиду того, что правая часть уравнения пропорциональна косинусу, частное решение задается в форме  $v_{\text{ч.н.}}^{LC}(\zeta) = B \cos(m\pi\zeta)$ . Подстановка в ОДУ позволяет определить амплитуду  $B$ :

$$-B(m\pi)^2 \cos(m\pi\zeta) - \lambda^2 B \cos(m\pi\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{s} \cos(m\pi\zeta), \quad (15)$$

$$B = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{A}{s} \frac{1}{\lambda^2 + (m\pi)^2}. \quad (16)$$

Для нахождения констант интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  используются граничные условия на свободных лицевых поверхностях оболочки ( $\zeta = \pm 1$ ). Отсутствие нормальных напряжений приводит к обнулению перемещения:

$$v_1^{LC}(\pm 1) = 0. \quad (17)$$

Подстановка условия в общее решение формирует систему алгебраических уравнений (с учетом четности  $ch$ ,  $cos$  и нечетности  $sh$ ):

$$C_1 \operatorname{ch}(\lambda) + C_2 \operatorname{sh}(\lambda) + B \cos(m\pi) = 0 \quad (\text{при } \zeta = 1), \quad (18)$$

$$C_1 \operatorname{ch}(\lambda) - C_2 \operatorname{sh}(\lambda) + B \cos(m\pi) = 0 \quad (\text{при } \zeta = -1). \quad (19)$$

Сложение и вычитание уравнений системы дает точные значения констант:

$$C_1 = -B \frac{\cos(m\pi)}{\operatorname{ch}(\lambda)}, \quad C_2 = 0. \quad (20)$$

С найденными константами выражение для продольного перемещения в пространстве Лапласа-Фурье принимает замкнутый вид:

$$v_1^{LC}(\zeta, \chi, s) = B \left( \cos(m\pi\zeta) - \cos(m\pi) \frac{\operatorname{ch}(\lambda\zeta)}{\operatorname{ch}(\lambda)} \right). \quad (21)$$

**В третьей главе** «Обратные преобразования и построение асимптотического решения» осуществляется процедура последовательного перехода от двойных изображений к физическим оригиналам перемещений и напряжений. Для перехода из пространства изображений применяется формула обратного преобразования. В силу четности подынтегральной функции осуществляется переход к интегрированию по всей вещественной оси с использованием экспоненциальной формы.

Интеграл вычисляется через сумму вычетов в полюсах верхней полуплоскости комплексной переменной  $\chi$ . Истинные полюса определяются нулями гиперболического косинуса  $\cosh(\lambda) = 0$ , что дает:

$$\lambda_k = i\mu_k, \quad \text{где } \mu_k = \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (22)$$

Корни знаменателя определяются выражением  $\chi_k = i\gamma_k$ , где  $\gamma_k = \sqrt{k^2 s^2 + \mu_k^2}$ . Точка, в которой обнуляется скобка  $(\lambda^2 + (m\pi)^2 = 0)$ , является устранимой особой точкой, так как в ней числитель также обращается в ноль.

Вычисление суммы вычетов  $\text{Res}_k$  преобразует интеграл в бесконечный спектральный ряд:

$$v_1^L(\xi, \zeta, s) = \frac{2A}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k-1} \mu_k \cos(\mu_k \zeta)}{\gamma_k (m^2 \pi^2 - \mu_k^2)} e^{-\gamma_k \xi}. \quad (23)$$

Для исследования поведения волны в непосредственной близости фронта ( $\tau \approx k\xi$ ) применяется асимптотическое разложение параметра  $\gamma_k$  при больших значениях параметра Лапласа ( $s \rightarrow \infty$ ):

$$\gamma_k \approx ks + \frac{\mu_k^2}{2ks}. \quad (24)$$

Подстановка асимптотического разложения в экспоненту  $e^{-\gamma_k \xi}$  позволяет разделить пространственное затухание и временное запаздывание. Использование табличного преобразования Лапласа и теоремы запаздывания приводит к оригиналу продольного перемещения  $v_1$  во времени  $\tau$ , выраженному через функцию Бесселя первого рода первого порядка  $J_1$ :

$$v_1(\xi, \zeta, \tau) = \frac{4\sqrt{2}(1+\nu)k^{3/2}h}{E\sqrt{\xi}} \sqrt{\tau - k\xi} H(\tau - k\xi) * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k-1} \cos(\mu_k \zeta)}{m^2 \pi^2 - \mu_k^2} J_1 \left( \mu_k \sqrt{\frac{2\xi}{k} (\tau - k\xi)} \right). \quad (25)$$

Изображение напряжения  $\sigma_{11}^L$  находится дифференцированием ряда  $v_1^L$  по продольной координате  $\xi$ . При переходе к оригиналу времени  $\tau$  множитель  $s$  сокращается, что понижает порядок функции Бесселя до нулевого ( $J_0$ ):

$$\sigma_{11}(\xi, \zeta, \tau) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k-1} \mu_k \cos(\mu_k \zeta)}{\mu_k^2 - m^2 \pi^2} J_0 \left( \mu_k \sqrt{\frac{2\xi}{k} (\tau - k\xi)} \right) H(\tau - k\xi). \quad (26)$$

**В четвертой главе** «Верификация математической модели и анализ результатов» рассматривается сходимость полученного решения путем

сопоставления полученного решения на фронте волны с граничным условием, что следует из физических соображений.

Физический смысл задачи требует, чтобы в момент прихода ударной волны напряженное состояние оболочки в точности соответствовало приложенной на торце нагрузке. Фронт волны определяется кинематическим условием  $\tau = \kappa\xi$ . В этой точке аргумент функции Бесселя в итоговой формуле для нормального напряжения обращается в ноль:

$$\mu_k \sqrt{\frac{2\xi}{\kappa}(\tau - \kappa\xi)} = 0. \quad (27)$$

Учитывая тот факт, что функция Бесселя нулевого порядка  $J_0(0) = 1$  и, что функция Хевисайда на фронте включает нагрузку ( $H(0) = 1$ ), динамическое решение вырождается в статический ряд:

$$\sigma_{11}|_{\tau=\kappa\xi} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k-1} \mu_k \cos(\mu_k \zeta)}{\mu_k^2 - m^2 \pi^2}. \quad (28)$$

Для доказательства корректности полученного выражения исходное граничное условие  $f(\zeta) = \cos(m\pi\zeta)$  раскладывается в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи  $\cos(\mu_k \zeta)$  на интервале  $\zeta \in [-1, 1]$ :

$$\cos(m\pi\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\mu_k \zeta). \quad (29)$$

Коэффициенты разложения  $a_k$  определяются интегрированием:

$$a_k = \frac{\int_{-1}^1 \cos(m\pi\zeta) \cos(\mu_k \zeta) d\zeta}{\int_{-1}^1 \cos^2(\mu_k \zeta) d\zeta}. \quad (30)$$

Знаменатель равен единице, а вычисление числителя через формулу произведения косинусов дает точное совпадение с коэффициентами искомого ряда:

$$a_k = \frac{2(-1)^{m+k-1}\mu_k}{\mu_k^2 - m^2\pi^2}. \quad (31)$$

Абсолютное совпадение полученного разложения с амплитудными коэффициентами динамической формулы строго доказывает математическую корректность выведенной модели.

Для проведения численного эксперимента и анализа влияния геометрии оболочки осуществляется переход к координатам, нормированным на радиус срединной поверхности  $R$  ( $\xi_0 = \alpha/R, \tau_0 = c_1 t/R$ ). С учетом преобразований итоговая формула напряжений принимает вид:

$$\sigma_{11}(\xi_0, \zeta, \tau_0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k-1}\mu_k \cos(\mu_k \zeta)}{\mu_k^2 - (m\pi)^2} J_0\left(\frac{\mu_k R}{h} \sqrt{2\xi_0(\tau_0 - \xi_0)}\right) \Phi(\tau_0 - \xi_0). \quad (32)$$

На графике распределения нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  по толщине оболочки  $\zeta$ , построенным в программном комплексе Mathcad видно, что непосредственно вблизи фронта волны профиль сохраняет исходную симметричную косинусоидальную форму. Однако по мере удаления от фронта амплитуда уменьшается и наблюдается затухание волны (рисунок 1).

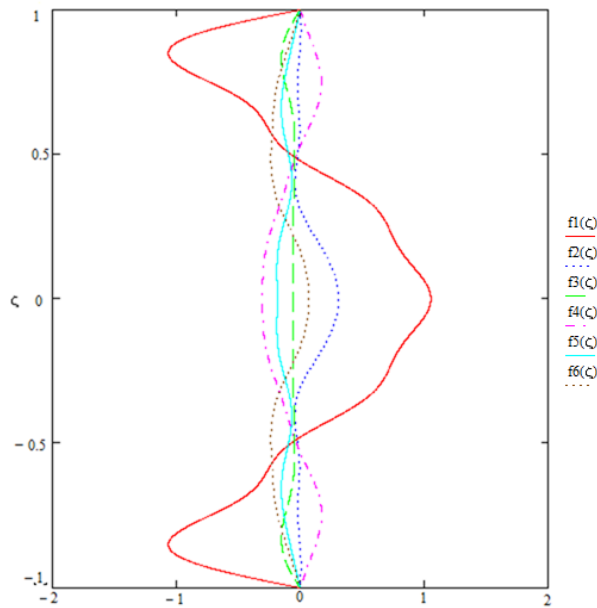


Рисунок 1 - Распределение нормальных напряжений  $\sigma_{11}$  вдоль продольной оси оболочки  $\xi_0$  при различных значениях координаты по толщине  $\zeta$

На этом графике:

$$f_1(\zeta) = \sigma_{11}(2, \zeta, 2), f_2(\zeta) = \sigma_{11}(1.999, \zeta, 2), f_3(\zeta) = \sigma_{11}(1.998, \zeta, 2),$$

$$f_4(\zeta) = \sigma_{11}(1.997, \zeta, 2), f_5(\zeta) = \sigma_{11}(1.996, \zeta, 2), f_6(\zeta) = \sigma_{11}(1.995, \zeta, 2).$$

На втором графике (рисунок 2) детально исследована узкая прифронтальная зона ( $\xi_0 \in [1.995; 2.0]$ ) при фиксированных значениях координаты  $\zeta$ .

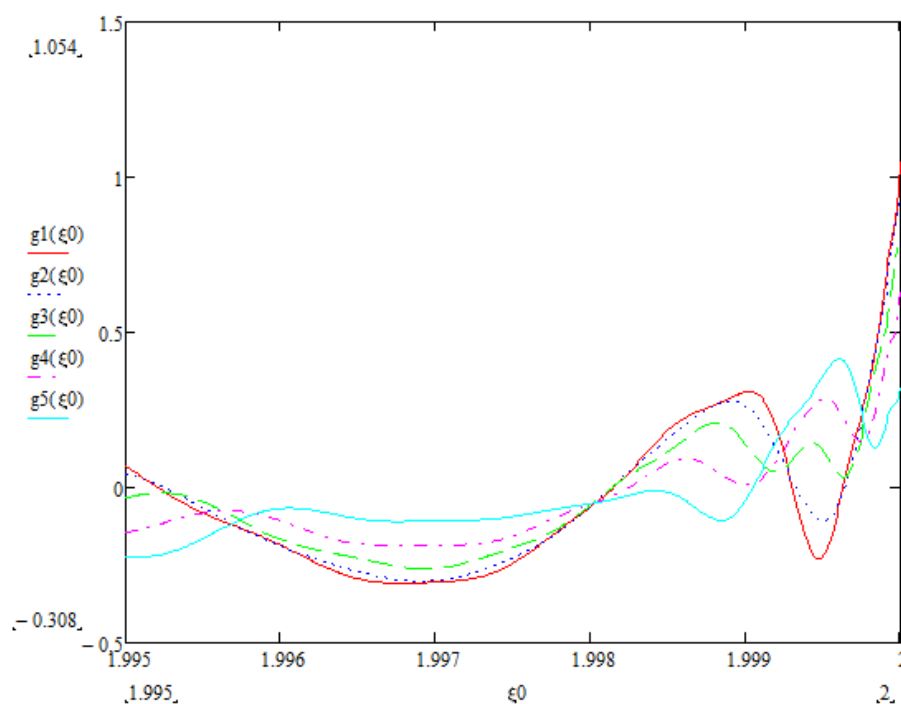


Рисунок 2 - Зависимость нормального напряжения  $\sigma_{11}$  от продольной координаты  $\xi_0$  в окрестности фронта волны

На этом графике:

$$g_1(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0, 2), g_2(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.1, 2), g_3(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.2, 2),$$

$$g_4(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.3, 2), g_5(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.4, 2), g_6(\xi_0) = \sigma_{11}(\xi_0, 0.5, 2).$$

**Заключение.** В ходе выполнения выпускной квалификационной работы было проведено комплексное математическое и физическое исследование процесса распространения нестационарных упругих волн в цилиндрической оболочке. Главным итогом работы является построение точного, замкнутого

аналитического решения для продольных перемещений и нормальных напряжений при симметричном ударном воздействии (с косинусоидальным распределением нагрузки по толщине).

Применение аппарата интегральных преобразований Лапласа и Фурье в сочетании с методами теории функций комплексного переменного (вычисление вычетов в полюсах) позволило уйти от громоздких численных аппроксимаций и получить решение в виде бесконечного спектрального ряда. Использование прифронтной асимптотики дало возможность перевести изображения в пространство оригиналов через цилиндрические функции Бесселя.

Математическая корректность предложенной модели была строго доказана путем анализа поведения формул непосредственно на фронте волны: динамический ряд Фурье-Бесселя идеально вырождается в статический ряд Фурье, в точности восстанавливая исходное граничное условие.