МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ТОЛЕРАНТНОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы

направление 02.03.01 — Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Андрианова Вадима Юрьевича

Научный руководитель

Доктор физ.-мат. наук, доцент ______________ В.Б.Поплавский

Заведующий кафедрой

Доктор физ.-мат. наук, доцент ______________ В.Б.Поплавский

Саратов 2026

Введение. Толерантные пространства представляют собой математические структуры, в которых близость элементов задается рефлексивным и симметричным, но, вообще говоря, нетранзитивным бинарным отношением. Такой подход позволяет описывать ситуации, где между объектами имеется не строгое равенство, а отношение сходства, близости или допустимой неразличимости. В отличие от эквивалентности, толерантность не разбивает множество на непересекающиеся классы, поэтому для ее описания требуются специальные конструкции: классы толерантности, базисы, паразитические классы, ядра, карты и производные пространства.

Актуальность темы исследования определяется тем, что теория толерантных пространств позволяет описывать конечные и приближенные модели, где локальная близость элементов важнее точного совпадения. Такие модели возникают при переходе от непрерывного объекта к конечному описанию, когда отдельные элементы уже не обязаны быть тождественными, но могут считаться близкими по заданному набору признаков. С геометрической и топологической точек зрения существенным становится вопрос о сохранении свойств пространства при переходе к более грубой модели. В этом контексте особое значение имеет проблема Зимана, связанная с тем, какие глобальные свойства пространства сохраняются при его описании средствами конечной толерантной структуры.

Целью работы является исследование бинарных отношений толерантности, способов их задания и внутренней структуры толерантных пространств. Для достижения цели рассматривается толерантность как вид бинарного отношения; изучаются соответствия, покрытия и системы признаков; исследуются операции над толерантностями; вводятся классы, базисы, паразитические классы и ядра; рассматриваются карты, сопряженные и производные пространства; анализируется проблема Зимана для конечных толерантных пространств. Особое внимание уделяется тому, как отношение толерантности может быть задано через наличие общих признаков и каким образом из такого задания восстанавливается структура пространства.

Работа основана на материалах по общей теории толерантных пространств и их гомологической теории. Используются методы теории бинарных отношений, теоретико-множественные конструкции, графовое представление отношений и структурный анализ классов, базисов и ядер. Важную роль играет переход от абстрактного отношения к его конечной модели: элементы пространства могут рассматриваться как вершины графа, а отношение толерантности — как система связей между ними. В приложении применяется вычислительный эксперимент: по бинарному изображению строятся признаки блоков, матрица толерантности, граф отношения, классы толерантности и ядра.

Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка источников и двух приложений. В разделах последовательно рассматриваются толерантность и пространства S_p, S_H, соответствия, операции над толерантностями, классы, базисы, ядра, карты, покрытия, сопряженные и производные пространства. Приложения посвящены программе построения конечного пространства толерантности по изображению и проблеме Зимана. Такое построение работы позволяет сначала изложить основные понятия и свойства толерантных пространств, затем перейти к их структурному описанию, а в завершение показать применение этих понятий к конечной модели и к вопросу о сохранении гомологической структуры.

Основное содержание работы. В первом разделе дипломной работы толерантность рассматривается как специальный вид бинарного отношения. Если одинаковость означает полную взаимозаменимость объектов, то сходство выражает лишь частичную взаимозаменимость, допускающую некоторые потери или риск. Для формализации такого отношения сходства вводится понятие толерантности.

Определение. Отношение A на множестве M называется толерантностью, если оно рефлексивно и симметрично.

Рефлексивность означает, что каждый элемент находится в отношении с самим собой, а симметричность выражает независимость отношения сходства от порядка элементов. В отличие от отношения эквивалентности, для толерантности не требуется транзитивность. Поэтому эквивалентность является частным случаем толерантности, но не исчерпывает ее.

Определение. Множество M с заданным на нем отношением толерантности τ называется пространством толерантности.

В качестве базовой модели рассматривается пространство S_p.

Определение. Пусть $p \in \mathbb{N}$. Пространством S_p называется множество

$$S_p = \{X \subseteq \{1, 2, \ldots, p\} \mid X \neq \varnothing\}.$$

Его элементами являются все непустые подмножества множества $\{1, 2, \ldots, p\}$. На этом множестве отношение толерантности задается условием

$$X \tau Y \iff X \cap Y \neq \varnothing.$$

В такой интерпретации толерантность элементов совпадает с геометрической инцидентностью граней симплекса: две грани толерантны тогда и только тогда, когда имеют общую вершину. Эта конструкция затем обобщается на произвольное множество H: пространство S_H состоит из всех непустых подмножеств H, а толерантность в нем также определяется непустым пересечением.

Во втором разделе изучается задание отношения толерантности при помощи соответствий. Пусть задано соответствие $\varphi\colon M \to L$, причем элементу $x \in M$ может соответствовать не один элемент, а некоторое множество элементов из L. Через $\Phi(x)$ обозначается множество всех образов элемента x.

Определение. На множестве M отношение A_φ, порожденное соответствием φ, задается условием

$$xA_\varphi y \Longleftrightarrow \Phi(x) \cap \Phi(y) \neq \varnothing.$$

Иными словами, элементы находятся в отношении A_φ тогда и только тогда, когда у них имеется хотя бы один общий образ.

В работе установлено, что отношение A_φ всегда симметрично. Оно рефлексивно тогда и только тогда, когда соответствие определено на всем множестве M. Если же соответствие φ является функцией, то отношение A_φ становится транзитивным и, следовательно, является отношением эквивалентности. Тем самым всякое всюду определенное соответствие задает толерантность, а всякое обычное отображение задает эквивалентность.

Наряду с отношениями типа A_φ рассматривается отношение B_φ. Оно задается условием, что множества образов $\Phi(x)$ и $\Phi(y)$ имеют ровно один общий элемент. Содержательно различие состоит в том, что A_φ выражает наличие хотя бы одного общего признака, а B_φ — наличие ровно одного общего признака. Это построение позволяет описывать симметричные антирефлексивные отношения и показывает, что аппарат соответствий является естественным способом построения бинарных отношений, близких по своим свойствам к толерантностям.

В третьем разделе рассматриваются операции над толерантностями. Сначала вводятся основные операции над бинарными отношениями: обращение, произведение и транзитивное замыкание. Для толерантностей устанавливается устойчивость относительно ряда естественных операций. Если A и B являются толерантностями, то толерантностями будут также отношения

$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A^{-1}, \qquad \widehat{A},$$

где $\widehat{A}$ обозначает транзитивное замыкание отношения A. Смысл этого результата состоит в том, что класс толерантных отношений сохраняется при основных теоретико-множественных операциях и при переходе к транзитивному замыканию.

Особое внимание уделено произведению толерантностей.

Теорема. Произведение AB двух отношений толерантности A и B является толерантностью тогда и только тогда, когда эти отношения коммутируют, то есть

$$AB = BA.$$

В этом случае произведение обозначается как $A \circ B$.

Если произведение некоммутативно, оно в общем случае может не быть отношением толерантности. Поэтому дополнительно рассматриваются симметризованные произведения

$$A \cdot B = AB \cup BA, \qquad A * B = AB \cap BA.$$

Оба этих отношения при условии, что A и B являются толерантностями, снова являются толерантностями. Полученные результаты показывают, что над толерантностями можно строить достаточно устойчивый алгебраический аппарат.

В четвертом разделе изучается внутренняя структура пространств толерантности. Для этого вводятся понятия предкласса и класса толерантности.

Определение. Подмножество $L \subseteq M$ называется предклассом, если любые два его элемента толерантны.

Определение. Классом толерантности называется максимальный предкласс.

Система классов толерантности образует покрытие множества M, но, в отличие от классов эквивалентности, классы толерантности могут пересекаться.

Одним из центральных структурных результатов является описание толерантности через классы.

Теорема. Для элементов $x, y \in M$ выполнено

$$x\tau y \Longleftrightarrow \exists K\,(x \in K,\ y \in K),$$

где K является классом толерантности.

Это означает, что два элемента толерантны тогда и только тогда, когда существует класс толерантности, содержащий их одновременно. Тем самым отношение толерантности получает естественную интерпретацию через систему максимальных множеств попарно близких элементов.

Далее показывается, что всякое пространство толерантности можно описывать через множество его классов.

Теорема. Если H — множество всех классов толерантности пространства $\langle M, \tau \rangle$, то существует отображение

$$\varphi\colon M \to S_H,$$

такое, что элементы из M толерантны тогда и только тогда, когда толерантны их образы в S_H.

В конечном случае вместо S_H можно использовать пространство S_p, где p — число классов толерантности: каждому элементу сопоставляется множество номеров тех классов, в которые он входит.

С этим связано и представление толерантности через признаки.

Теорема. Произвольное отношение толерантности можно задать как отношение A_φ с помощью некоторого всюду определенного соответствия. В таком виде условие толерантности выражается формулой

$$x \tau y \Longleftrightarrow \varphi(x) \cap \varphi(y) \neq \varnothing.$$

Следовательно, два элемента оказываются толерантными тогда и только тогда, когда обладают хотя бы одним общим признаком.

Существенное место в работе занимает понятие базиса классов толерантности.

Определение. Базисом называется такая система классов, которая содержит общий класс для каждой толерантной пары и минимальна относительно этого свойства.

На примере пространства S_p показано, что оно имеет единственный базис

$$\{K_1, K_2, \ldots, K_p\},$$

где K_i состоит из всех элементов, содержащих номер i. При этом в пространстве могут существовать и паразитические классы, то есть классы толерантности, не входящие ни в один базис. На примере S_3 таким классом является

$$P = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\big\}.$$

Для дальнейшего описания структуры вводится понятие ядра.

Определение. Ядром называется множество элементов, которые входят во все классы некоторой совокупности и не входят ни в какие другие классы.

Иначе говоря, ядра являются прообразами отображения, сопоставляющего каждому элементу набор содержащих его классов. Непустые ядра образуют разбиение множества M и задают отношение эквивалентности. При переходе от эквивалентности к толерантности понятие класса эквивалентности расщепляется на два разных понятия: класс толерантности и ядро.

Определение. Пространство толерантности называется безъядерным, если каждое его ядро состоит не более чем из одного элемента.

Для них основная классификационная теорема уточняется: отображение в пространство S_H можно выбрать инъективным. В качестве важного примера исследуется пространство B_m^p, состоящее из целочисленных кортежей

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p), \qquad 0 \le \xi_i \le m-1,$$

где два элемента толерантны тогда и только тогда, когда совпадает хотя бы одна их одноименная координата. Показано, что это пространство является безъядерным.

В пятом разделе структура толерантности рассматривается через карты, покрытия и системы признаков.

Определение. Если Π — покрытие множества M, то пара $\langle M, \Pi \rangle$ называется картой.

Такая карта порождает на M отношение толерантности по правилу: элементы x и y толерантны, если существует такое $A \in \Pi$, что одновременно $x \in A$ и $y \in A$. Следовательно, каждое множество покрытия выступает как исходный признак, а сама карта задает систему признаков на множестве объектов.

Определение. Карта называется канонической, если каждый элемент покрытия является классом порожденной толерантности. Классы порожденной толерантности называются каноническими признаками.

В работе установлено, что любой класс порожденной толерантности может быть выражен через элементы исходного покрытия с помощью операций пересечения и объединения. Кроме того, существует такой базис классов порожденной толерантности, что каждый класс этого базиса содержит некоторый элемент покрытия. В конечном случае число классов такого базиса не превышает количества исходных признаков.

В этой же части рассматриваются сопряженные и производные пространства толерантности.

Определение. На множестве классов толерантности естественным образом вводится новое отношение

$$K_1^* \tau^* K_2^* \iff K_1 \cap K_2 \neq \varnothing.$$

Если берется множество всех классов исходного пространства, то полученное пространство называется сопряженным.

Если используется базис, то говорят о сопряженном пространстве относительно данного базиса. Второе сопряженное пространство, построенное относительно некоторого базиса в сопряженном пространстве, называется первым производным от исходного пространства. При этом производное пространство, вообще говоря, зависит от выбора базиса.

В приложении A приведена программа построения конечного пространства толерантности по изображению. Её цель состоит в том, чтобы показать, как абстрактные понятия теории толерантных пространств могут быть реализованы на конкретном цифровом материале. В основной части работы отношение толерантности, классы и ядра рассматриваются теоретически, а в приложении эта схема применяется к бинарному изображению фрагмента района города Крайстчерч.

Исходное изображение приводится к размеру 256×256 пикселей и разбивается на блоки 32×32 пикселя. В результате получается конечное множество

$$M = \{x_1, x_2, \dots, x_{64}\},$$

где каждый элемент соответствует одному блоку изображения. Для каждого блока вычисляются числовые признаки: средние значения цветовых каналов, средняя яркость, контраст, доля темных пикселей и средняя величина границы внутри блока. Тем самым каждому элементу $x_i \in M$ сопоставляется признаковый вектор $F(x_i)$.

Отношение толерантности строится по расстоянию между признаковыми векторами. Два блока считаются толерантными, если расстояние между ними не превосходит выбранного порога:

$$x_i \tau x_j \iff d(F(x_i), F(x_j)) \le \varepsilon.$$

В рассматриваемом примере порог был выбран автоматически и составил

$$\varepsilon = 0{,}090365.$$

После этого программа строит матрицу толерантности и граф отношения, где вершинами являются блоки изображения, а ребра соединяют толерантные элементы.

В результате работы программы было построено конечное пространство толерантности из 64 элементов. Для полученного графа найдено

$$|M| = 64, \qquad |E| = 242.$$

Кроме того, программа выделила 28 классов толерантности и 39 ядер. Классы толерантности показывают максимальные группы блоков, попарно близких по выбранным признакам, а ядра позволяют сгруппировать элементы, которые входят в одинаковые наборы классов.

Таким образом, в приложении удалось получить не просто набор числовых характеристик изображения, а полноценную конечную толерантную модель. Это дает возможность интерпретировать цифровое изображение средствами теории толерантных пространств: блоки изображения становятся элементами множества, признаки задают основание для сравнения, матрица фиксирует отношение близости, граф показывает его наглядно, а классы и ядра раскрывают внутреннюю структуру полученного пространства. Поэтому программа служит вычислительной иллюстрацией основных понятий работы и показывает, как теория может применяться к конечным моделям, построенным по реальным цифровым данным.

В приложении Б рассматривается проблема Зимана для конечных толерантных пространств. Существенный интерес представляет вопрос о том, какие отображения между толерантными пространствами сохраняют их глобальные топологические свойства.

Теорема. Для конечного толерантного пространства переход к присоединенному безъядерному пространству сохраняет гомологическую структуру исходного пространства, что выражается изоморфизмом групп гомологий.

В более общей ситуации существенными оказываются конструкции толерантных ретрактов, расслоений и связанных с ними гомологических и гомотопических инвариантов.

Заключение. В работе проведено исследование бинарных отношений толерантности, способов их задания и внутренней структуры толерантных пространств. Толерантность рассмотрена как рефлексивное и симметричное, но в общем случае нетранзитивное отношение, что отличает ее от эквивалентности и требует специальных средств описания.

Рассмотрены способы задания толерантности при помощи соответствий, покрытий и систем признаков. Показано, что всякое всюду определенное соответствие задает отношение толерантности, а произвольная толерантность может быть описана через наличие общего признака. Исследованы операции над толерантностями, включая объединение, пересечение, обращение, транзитивное замыкание и симметризованные произведения.

Существенное место заняло описание классов толерантности, базисов, паразитических классов и ядер. Установлено, что два элемента толерантны тогда и только тогда, когда они принадлежат некоторому общему классу толерантности, а также что ядра образуют разбиение множества и задают отношение эквивалентности. Через карты и покрытия рассмотрена связь между внутренней структурой толерантности и внешней системой признаков.

В приложении реализована программа построения конечного пространства толерантности по бинарному изображению. Получены матрица толерантности, граф отношения, классы толерантности и ядра, что показывает применимость рассматриваемого аппарата к конечным моделям, построенным по данным цифрового изображения.

Отдельно рассмотрена проблема Зимана для конечных толерантных пространств. Переход к присоединенному безъядерному пространству описан как способ редукции конечной модели без потери ее существенной гомологической структуры. Тем самым цель работы достигнута, а поставленные задачи решены.