МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Лёвнерские халлы для вещественнозначной управляющей функции

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направление **02.03.01 – Математика и компьютерные науки**

механико-математического факультета

Коновальцева Вадима Юрьевича

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ________________ В.Г.Гордиенко

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2026

Введение. Целью моей бакалаврской выпускной квалификационной работы является: 1) изучение уравнения Лёвнера, в частности, рассмотрение случаев интегрирования уравнения Лёвнера в квадратурах для различных управляющих функций; 2) построение лёвнеровских халлов для каждого из рассмотренных случаев; 3) построение лёвнеровских халлов для случая, когда в качестве управления выступает функция Вейерштрасса.

В данной работе используется метод параметрических продолжений. В своей первооснове он восходит к теории чешского малематика К. Лёвнера, опубликованной в 1923 году. Метод параметрических представлений позволяет получить конформное отображение одной области на другую посредством построения однопараметрического семейства конформных отображений. Это семейство представимо функцией одного комплексного и одного вещественного переменного (параметра), равномерно дифференцируемой по параметру внутри исходной области и удовлетворяющей как функция параметра некоторому дифференциальному уравнению, в частном случае - уравнению Лёвнера. Различают две версии уравнения Лёвнера – радиальную, в случае круга, и хордовую, в случае полуплоскости. В первом случае, значительный вклад в развитие теории Лёвнера внёс П.П. Куфарев, получивший в одной из своих работ обобщение уравнения Лёвнера, которое называют уравнением Лёвнера-Куфарева.

Пусть $C_{[a;b]}$ множество, состоящее из однопараметрических семейств $p(z,t)$, $a \le t \le b$, функций класса C, где C - класс Каратеодори функций $p(z)$, голоморфных в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ с разложением

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2p_k z^k$$

и условием $\mathrm{Re}p(z) > 0$. Для каждой функции $f(z) \in S$ существует однопараметрическое семейство $p(z,t)$ из множества $C_{[0,\infty)}$ такое, что решение $w = f(z,t)$ задачи Коши для дифференциального уравнения Лёвнера-Куфарева

$$\frac{dw}{dt} = -wp(w,t), \quad w\Big|_{t=0} = z,$$

представляет $f(z)$ по формуле

$$f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t f(z,t).$$

Уравнение Лёвнера возникает как частный случай уравнения Лёвнера-Куфарева при

$$p(w,t) = \frac{1+k(t)w}{1-k(t)w}, \quad |k(t)| = 1$$

и порождает класс функций всюду плотный в S. Эти функции отображают D на плоскость с одним разрезом.

Пусть теперь $z \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$- верхняя полуплоскость плоскости z, то есть $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : Im\ z > 0\}$. Предположим, что $\gamma(t)$, $t \geq 0$, является простой кривой в $\mathcal{H}$, выходящей из вещественной прямой. Тогда согласно теореме о конформных отображениях, существует единственное отображение вида, $w = g(t,z)$, которое отображает верхнюю полуплоскость $\mathcal{H}$ с разрезом по кривой $\gamma(\tau)$, $\tau \in [0,t]$, на верхнюю половину w-плоскости таким образом, что в окрестности бесконечности это отображение имеет разложение:

$$g(t,z) = z + \frac{c(t)}{z} + O(\frac{1}{z^2})$$

Схематическое изображение отображения приведено на рисунке 1.

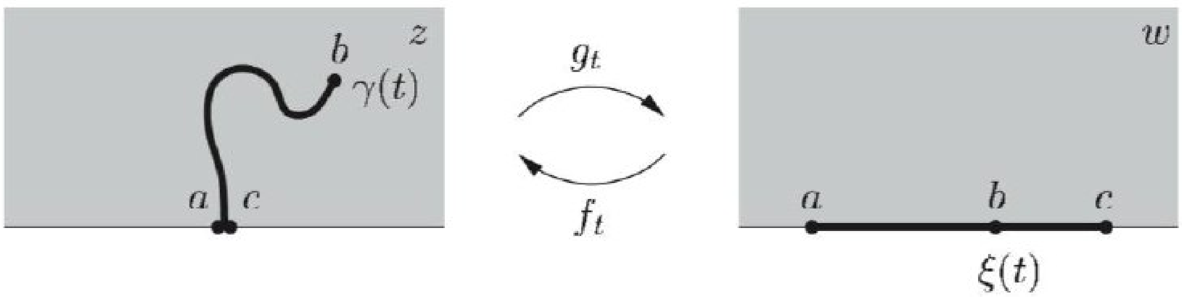

Рисунок 1 — Схема конформного отображения

Коэффициент $c(t)$ непрерывно возрастает с увеличением t. Поэтому параметризация кривой может быть выбрана такой, что $c(t) = 2t$, и в дальнейшем будем допускать это.

Конформные отображения $g_t(z)$ удовлетворяют диференциальному уравнению, которое называют хордовым уравнением Лёвнера:

$$\frac{\partial g(t,z)}{\partial t} = \frac{2}{g(t,z) - \xi(t)}, \;\; g(0,z) = z,$$

для всех z в $\mathcal{H}$. Здесь значение ξ в момент времени t - это прообраз точки $\gamma(t)$ при отображении g_t. Будем называть $\xi(t)$ управляющей функцией уравнения Лёвнера. Она непрерывна, вещественнозначна и $\xi : [0, T] \to \mathbb{R}$. Пусть $z_0 \in \mathcal{H}$ и такая, что $g(t, z_0) = \xi(t)$, то есть производная $\partial_t g(t,z)$ сингулярна в этой точке. Это означает, что точка z_0 не принадлежит области, отображаемой функцией $g(t,z)$.

Уравнение Лёвнера постоянно порождает новые сингулярные точки g_t, которые отображаются с помощью нее на соответствующие точки $\xi(t)$ в w-плоскости. Если $\xi(t)$ достаточно гладкая, то эти сингулярные точки образуют простую кривую $z_c(t)$ и точки этой кривой подчиняются условию:

$$g_t(z_c(t)) = \xi(t).$$

Эта кривая называется халлом Лёвнера, но также её можно назвать линией сингулярностей. Также, если принять управляющую функцию $\xi(t)$, соответствующую данной кривой $\gamma(t)$, то $z_c(t)$ будет совпадать с $\gamma(t)$. При опредленных условиях на $\xi(t)$, кривая $\gamma(t)$ может быть кривой заполняющей пространство.

В работе рассмотрены частные случаи решений уравнения Лёвнера для единичного круга и полуплоскости.

Основное содержание работы. Уравнение Лёвнера составляет основу метода параметрических продолжений в теории однолистных функций, сыгравшего важную роль в доказательстве неравенств Бибербаха и при получении ранее и в дальнейшем многих других точных оценок. Уравнение Лёвнера первоначально возникло при изучении конформного отображения канонической области на область с разрезом по простой дуге переменной длины.

Теорема. Решение $\zeta = \zeta(\tau, z, \mu) = e^{-\tau} z + \ldots$ уравнения Лёвнера

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta \frac{\mu(\tau) + \zeta}{\mu(\tau) - \zeta}, \;\; 0 \le \tau \le \tau^0, \;\; 0 < \tau^0 \le +\infty,$$

с кусочно-непрерывной управляющей функцией $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, и начальным условием $\zeta(0, z, \mu(0)) = z$, $z \in D = \{z \in C : |z| < 1\}$, существует на $(0, \tau^0)$, однолистно и конформно отображает (при фиксированном τ) круг D на односвязную область $B(\tau; \mu)$, лежащую в единичном круге; если $\tau^0 = +\infty$, то функция $f_\mu(z) = \lim\limits_{\tau\to+\infty} e^\tau \zeta(\tau, z, \mu)$ принадлежит классу S (то есть множеству функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, голоморфных и однолистных в D).

К эффективным представлениям некоторых подмножеств класса S можно прийти за счёт удачного выбора $\mu(\tau)$ и последующего интегрирования уравнения Лёвнера.

Теорема. Классу S принадлежат функции

$$f(z) = \left[s(1 + i\delta) \int\limits_0^z \frac{(1 - u)u^{s(1+i\delta)-1}}{(1 - e^{i\varphi}u)^{2s+1}} du\right]^{\frac{1}{s(1+i\delta)}},$$

где $s > 0$, $-\infty < \delta < +\infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$ [3].

Уставновлена связь $\xi(t, z; -1)$ с производящими функциями некоторых ортогональных многочленов и другими классами специальных функций.

Теорема. Справедливы формулы

$$\frac{1}{1 - z}\frac{d}{d\tau} ln\zeta(\tau, z; -1) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(1 - 2e^{-\tau})z^m = \sum_{l=0}^{\infty} F(-l, l + 1; e^{-\tau})z^l, \quad |z| < 1,$$

$$\zeta^m(\tau, z; -1) = e^{-m\tau} \sum_{l=m}^{\infty} \binom{m + l - 1}{2m - 1} F(m + l, m - l; 2m + 1; e^{-\tau})z^l, \quad |z| < 1,$$

где $P_m(x)$ - полиномы Лежандра, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ - гипергеометрическая функция, $m = 1, 2, ...$

В выпускной квалификационной работе рассмотрел случай интегрирования уравнения Лёвнера с постоянной управляющей функией $\mu(\tau) = e^{i\alpha}$.

Обратимся к хордовому уравнению Лёвнера.

Пусть $\gamma(t)$, $t \ge 0$, это простая кривая в $\mathcal{H}$, выходящая из вещественной линии. Тогда, согласно теории конформных отображений, существует единственное конформное отображение вида $w = g_t(z)$, которое отображает область G_t, состоящую из всех точек в $\mathcal{H}$ с разрезом по кривой $\gamma[o, t]$ на верхнюю половину w-плоскости таким образом, что в окрестности бесконечности это отображение имеет разложение

$$g_t(z) = z + c(t)/z + O(1/z^2).$$

Конформные отображения g_t удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению, которое является уравнением Лёвнера

$$\frac{dg_t}{dt} = \frac{2}{g_t - \xi(t)}$$

с начальным условием $g_0 = z$ для всех z в $\mathcal{H}$.

Уравнение Лёвнера устанавливает соответствие между непрерывными вещественнозначными функциями и определёнными растущими семействами множеств в комплексной плоскости. Дана функция — опишем, как получить семейство множеств с помощью уравнения Лёвнера.

Пусть ξ — непрерывная вещественнозначная функция, заданная на отрезке $[0, T]$, и выберем начальную точку $z_0 \in \overline{\mathcal{H}} \setminus \{\xi(0)\}$, где

$$\mathcal{H} = \{x + iy : y > 0\}$$

обозначает верхнюю полуплоскость. Тогда хордовое дифференциальное уравнение Лёвнера представляет собой задачу Коши:

$$\frac{d}{dt}z(t) = \frac{2}{z(t) - \lambda(t)}, \quad z(0) = z_0.$$

Единственное решение $z(t)$ существует на некотором временном интервале согласно теореме существования и единственности для дифференциальных уравнений. Фактически, решение $z(t)$ будет существовать до тех пор, пока знаменатель не обратится в нуль, что произойдёт, если $z(s) = \lambda(s)$ для некоторого s. В этом случае говорят, что z_0 захвачена функцией λ в момент времени s.

Обозначим через K_t халл в момент времени t — множество захваченных точек:

$$K_t = \{z_0 \in \overline{\mathcal{H}} : z(s) = \lambda(s) \text{ для некоторого } s \leq t\}.$$

Это семейство халлов $\{K_t\}_{t\in[0,T]}$ представляет собой возрастающее семейство множеств, соответствующих функции $\xi(t)$ по уравнению Лёвнера. Называем ξ управляющей функцией, а K_t — множеством, порождённым ξ.

Определение. Пусть ξ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[0, T]$. Семейство деформаций, управляемых ξ, — это семейство халлов K_t^c, $c > 0$.

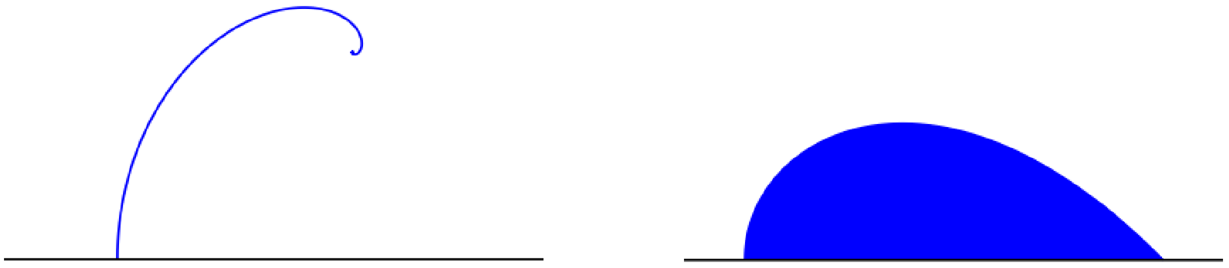

Рисунок 2 — Примеры халлов

Халлы K_t^c, порождённые управлением $\xi_c(t) = c - c\sqrt{1-t}$, при $c = 3$ (слева) и $c = 5$ (справа).

Теорема. Если ξ — функция класса $\mathrm{Lip}\left(\frac{1}{2}\right)$ с нормой $\|\xi\|_{1/2} < 4$, то халлы, порождённые ξ, являются простыми кривыми, содержащимися в $\mathcal{H} \cup \{\lambda(0)\}$.

Свойство конкатенации уравнения Лёвнера. Пусть ξ — непрерывная функция, заданная на $[0, T]$, и K_t — халлы, порождённые ξ. Для $t_0 \in (0, T)$ пусть $\widetilde{K}_t$ — халлы, порождённые сдвинутой по времени управляющей функцией:

$$\widetilde{\xi}(t) = \xi(t_0 + t), \quad \text{для } t \in [0, T - t_0].$$

Предложение. Пусть ξ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[0, T]$. Предположим, что существуют:

- $t_0 \in [0, T]$,
- $s \in (0, T - t_0]$,

такие, что смещённая по времени управляющая функция $\widetilde{\xi}(t) = \xi(t_0 + t)$ захватывает вещественную точку в момент времени s. Тогда халл K_{t_0+s}, порождённый функцией ξ, **не является простой кривой**, содержащейся в $\mathcal{H} \cup \{\xi(0)\}$.

Рассмотрим случаи интегрируемости уравнения Лёвнера в квадратурах. Начнём с тривиального случая, когда $\xi = A$. В этом случае функция $g_t(z)$, в каждый момент времени t, приобретает новую сингулярность в точке

$$z_c(t) = A + 2it^{1/2},$$

которая посредством этой функции отображается в точку $\xi(t) = A$ в w-плоскости.

Траектория, создаваемая управлением константы, представляет собой отрезок вертикальной линии.

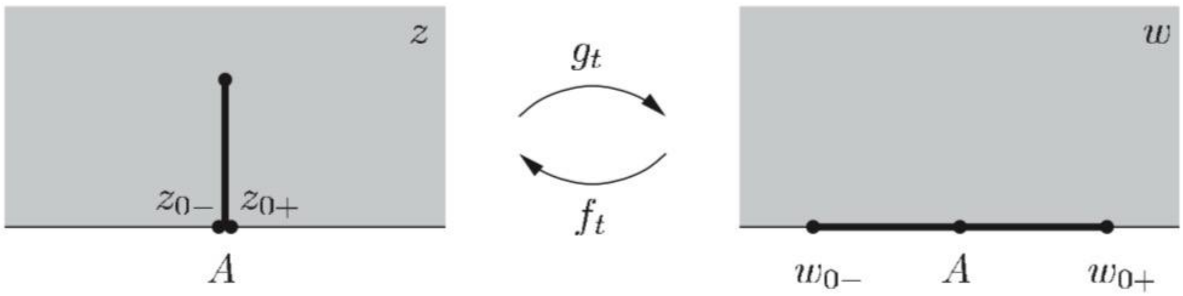

Рисунок 3 — Траектория при постоянном управлении

В случае, когда $\xi(t)$ является линейной функцией, мы можем считать, что $\xi(t) = t$, так как добавление константы и умножение на константу компенсируются с помощью сдвига или масштабирования.

Траектория, создаваемая этим управлением, имеет вид:

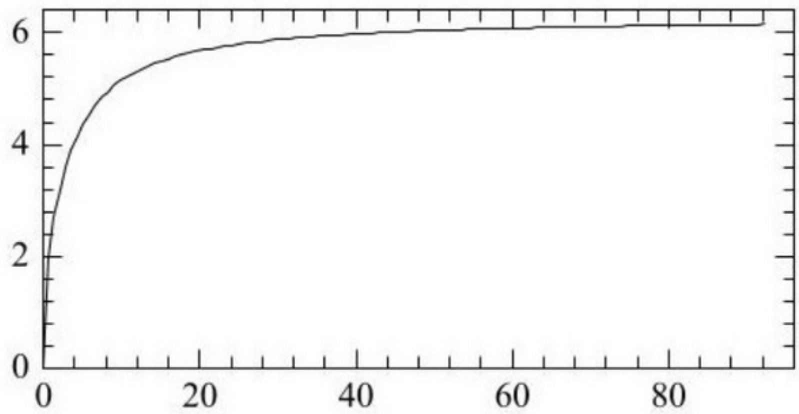

Рисунок 4 — Траектория при линейном управлении

Следующий случай заключается в том, что управление является функцией квадратного корня от времени. Этот случай имеет два подслучая: один, в котором управление имеет конечную временную сингулярность, основанную на правиле уравнения

$$\xi(t) = C(1-t)^{\beta},$$

или, в частности,

$$\xi(t) = 2[k(1-t)]^{\frac{1}{2}}, \ \ t \leqslant 1, \ k \geqslant 0.$$

Здесь, как увидим, результат качественно меняется при изменении k, причем критическим случаем является $k = 4$, когда сингулярная кривая замыкается на вещественную ось.

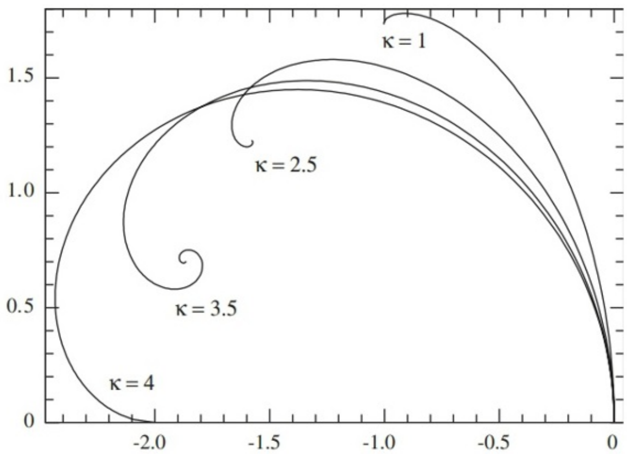

Рисунок 5 — Зависимость траектории от k

Во втором случае управляющая функция имеет бесконечную по времени сингулярность, отвечающую правому случаю:

$$\xi(t) = 2[kt]^{\frac{1}{2}}, \quad k \geqslant 0.$$

В этом случае $z_c(t)$ является прямой линией.

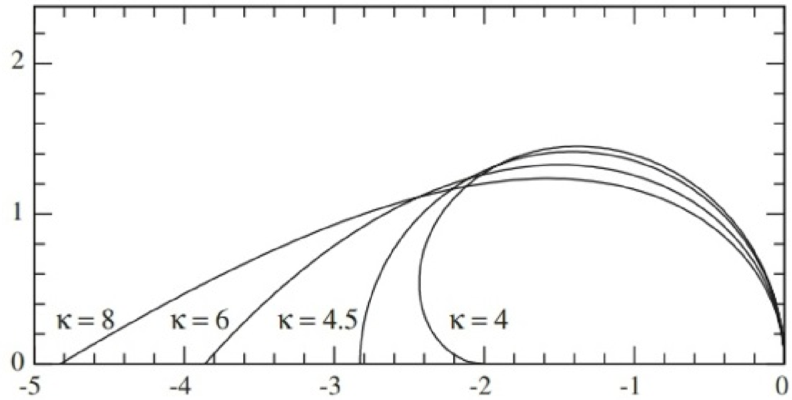

Рисунок 6 — Траектории при бесконечной сингулярности

Далее в работе в качестве управляющей функции рассматриваем детерминированный аналог броуновского движения — функцию Вейерштрасса, которая, как и броуновское движение, является непрерывной, но нигде не дифференцируемой. В частности, работаем с функцией:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} \cos(2^n t),$$

В 2000 году Шрамм представил семейство случайных кривых, названных им стохастической эволюцией Лёвнера (SLE). Позднее эти кривые были переименованы в эволюцию Шрамма–Лёвнера в честь Шрамма. Уравнение Лёвнера устанавливает соответствие между: двумерными кривыми и непрерывными одномерными функциями.

SLE часто записывают как SLE_k, чтобы подчеркнуть, что это бесконечное семейство случайных кривых, зависящих от параметра $k \geq 0$. В частности, в соответствии с уравнением Лёвнера, SLE_k соответствует непрерывной функции $\sqrt{k}B(t)$, где $B(t)$ — броуновское движение. Кривые SLE_k бывают трёх типов, в зависимости от значения k:

– если $k \in [0, 4]$, то SLE_k — это простая кривая;
– если $k \in (4, 8)$, то SLE_k — это кривая, которая пересекает саму себя;
– если $k \in [8, \infty)$, то SLE_k — это заполняющая пространство кривая.

Подробно разобраны доказательства двух теорем:

Теорема. Пусть $t_{m,k} = \frac{m\pi}{2^k}$ для $m, k \in \mathbb{N}$. Если $0 < |h| \leq 2^{-(k+7)}$, то $W(t_{m,k}) - W(t_{m,k} + h) \geq 0.2\sqrt{|h|}$.

Теорема. Деформации, управляемые функцией Вейерштрасса $W(t)$, демонстрируют фазовый переход. В частности, когда c достаточно мало, халлов, порождённый $cW(t)$, представляет собой простую кривую в $\mathcal{H} \cup \{cW(0)\}$, и это не выполняется, когда c достаточно велико.

Заключение. В своей работе я познакомился с методом параметрических продолжений в теории однолистных функций восходящих к работам Лёвнера. Были рассмотрены две версии уравнения Лёвнера: радиальная – для круга и хордовая – для полуплоскости. Основное внимание было уделено хордовому уравнению. Рассмотрены случаи интегрирования этого дифференциального уравнения в квадратурах. Написан программный код для построения соответствующих халлов.

Было также проведено исследование лёвнеровских халлов, порождаемых процессами Шрамма-Лёвнера в рамках теории уравнения Лёвнера. Данный аппарат является ключевым связующим звеном между вещественным анализом и геометрической теорией функций комплексного переменного. Проведенное исследование подтверждает эффективность использования уравнения Лёвнера для описания динамических процессов в комплексной плоскости. Полученные результаты имеют как теоретическое значение для теории конформных отображений, так и потенциальное прикладное применение в моделях статистической физики, связанных с критическими явлениями на плоскости.