МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное Государственное Бюджетное Образовательное Учреждение
Высшего Профессионального Образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

студентки 4 курса 421 группы
направления: 02.03.01 – Математика и компьютерные науки
Механико-математического факультета
Токмаковой Наталии Михайловны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н., доцент ____________________ В.Г. Тимофеев

Заведующий кафедрой
зав. кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ____________________ Е.В. Разумовская

Саратов 2026

Данная работа посвящена исследованию задачи Стечкина, которая заключается в поиске наилучшего приближения операторов дифференцирования линейными ограниченными операторами на определенных классах функций. Эта проблема тесно связана с неравенствами типа Ландау-Колмогорова, представляющими собой обобщения классических неравенств, связывающих нормы производных функций. В частности, рассматриваются неравенства вида:

$$\|u^{(k)}\|L_q \leqslant A\|u\|^{\alpha}_{L_r}\|u^{(n)}\|^{\beta}_{L_p} \tag{*}$$

где $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $0 \leqslant k < n$ — целые числа, $u \in L_r$, $u^{(n)} \in L_p$, и $(n-1)$)-ая производная функции u локально абсолютно непрерывна на всей числовой оси. α, β, A — постоянные, не зависящие от u. В некоторых случаях решение задачи Стечкина способствует получению решения неравенства (*). Эти особые случаи были подробно рассмотрены в работах таких выдающихся математиков, как Арестов, Стечкин , Субботин и Тайков , Тайков , Габушин, и Бердышев.

Впервые проблему наилучшего приближения неограниченных операторов линейными ограниченными операторами исследовал С. Б. Стечкин, который также отметил её связь с задачей о наименьшей константе в неравенстве между нормами производных функций. Впоследствии эти вопросы получили дальнейшее развитие в работах Ю. Н. Субботина, Л. В. Танкова, В. Н. Габушина, В. В. Арестова и других исследователей. Изучение данной задачи тесно переплеталось с исследованием экстремальных задач теории приближений функций, а также с теорией некорректных задач и вычислительной математики. Результаты, полученные в ходе решения этой задачи, активно применяются в решении множества смежных вопросов.

Актуальность данной работы обусловлена её тесной связью с теорией некорректных задач, в частности, с задачей об оптимальной равномерной регуляризации вычисления значений неограниченного оператора на элементах, заданных с погрешностью. Знание экстремальных операторов в задаче Стечкина о наилучшем приближении оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами на классе функций, удовлетворяющих условиям $u \in L_r$, $u^{(n)} \in L_p$ и $(n-1)$-ая производная функции u локально абсолютно непрерывна на всей числовой оси, а также $|u^{(n)}|_{L_p} \leqslant 1$, предоставляет возможность их применения при решении соответствующих задач восстановления оператора дифференцирования на множестве элементов, известных с заданной погрешностью.

Цели данной работы включают:
1. Построение операторов наилучшего приближения.
2. Получение оценки величины наилучшего приближения неограниченного линейного оператора линейными ограниченными операторами на классе элементов банахова пространства.
3. Нахождение наилучшего приближения оператора дифференцирования линейными ограниченными операторами.

Основные методы решения задач включают метод оптимальных интегральных представлений и метод функций Грина, а также широкий спектр инструментов функционального анализа. Основная часть данной работы состоит из четырех разделов. Первый раздел посвящен исследованию неравенств Адамара и Харди, которые используются для оценки производной функции через саму функцию и её вторую производную. Второй раздел рассматривает уточнения этих неравенств для выпуклых функций, то есть функций с строго возрастающей производной. Третий раздел посвящен оценке операторов дифференцирования линейными операторами с ограниченной нормой. Наконец, в четвертом разделе рассматривается случай оператора дифференцирования, заданного в пространстве $\mathbb{R}^n$. В этом разделе сформулирована задача Стечкина для многомерного случая, доказано неравенство типа Ландау для функций многих переменных в равномерной метрике методом интегрального представления производной функции исследуемого класса $Q = \{u : u \in U, \|\Delta u\|_{L_\infty} < 1\}$, где U — класс функций $u(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, таких что $\Delta u \in L_\infty$ и Δu — значение оператора Лапласа, понимаемое по Соболеву. Также построен оператор, наилучшим образом приближающий оператор дифференцирования в данном контексте.

Работа имеет реферативный характер, что позволяет обобщить и систематизировать результаты, полученные в ходе исследования задачи Стечкина и её приложений.

Основное содержание работы

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_1, x_2]$ причём $x_2 - x_1 \geq 2$. Для всех $x \in [x_1, x_2]$

$$|f(x)| \leq 1, \quad |f''(x)| \leq 1. \tag{1}$$

Тогда для всех $x \in [x_1, x_2]$

$$|f'(x)| \leq 2. \tag{2}$$

Константа 2 в неравенстве (2) неулучшаема.

В связи с теоремой 1 можно отметить, что рассматривая полиномы

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \left(\frac{2}{\rho} + \frac{\rho}{2}\right)x + 1, \quad x \in [0, \rho]$$

имеем, что

$$\max_{x\in[0,\rho]} |f(x)| = 1, \quad \max_{x\in[0,\rho]} |f''(x)| = 1,$$

но при этом, $\max\limits_{x\in[0,\rho]} |f'(x)|$ может быть как угодно большим за счёт выбора ρ. Таким образом, ограничение длинны отрезка существенное требование.

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $a, b > 0$, и функция $f(x)$ определена на отрезке $[x_1, x_2]$, длинны не меньшей чем $2\sqrt{\frac{a}{b}}$ и для всех $x \in [x_1, x_2]$

$$|f(x)| \leq a, \quad |f''(x)| \leq b.$$

Тогда для всех $x \in [x_1, x_2]$ выполняется неравенство

$$|f'(x)| \leq 2\sqrt{ab}.$$

Пусть

$$M_i = \sup_{x\in[x_1,x_2]} |f^{(i)}(x)|, \quad i = 0, 1, \dots n \tag{3}$$

Теорема 3. Если непрерывно дифференцируемая функция $f(x)$ задана на отрезке $[x_1, x_2]$ $(x_2 - x_1 \geq a)$, такова, что для всех $x \in [x_1, x_2]$ существует $f''(x)$, то для всякого $\alpha \in (0, a)$ выполняется неравенство

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}M_2. \tag{4}$$

Замечание 1.1 Заметим, что минимум по α в (4) достигается при

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}.$$

Отсюда следует, что если длина отрезка $[x_1, x_2]$ удовлетворяет неравенству

$$a \geq 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}},$$

то из (4) следует

$$M_1 \leq 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

А в противном случае, имеем

$$M_2 < \frac{4M_0}{\alpha^2}.$$

Теперь из (4) при $\alpha = a$ получем

$$M_1 \leq \frac{2M_0}{a} + \frac{a}{2}\frac{4M_0}{a^2} = \frac{4M_0}{a}.$$

Пусть функция $f(x)$ определена на конечным или бесконечным интервале I, удовлетворяет неравенству

$$m(x) \leq f(x) \leq M(x),$$

и подчинена некоторым дополнительным условиям, гарантирующим существование производных чисел, то есть, существование верхних и нижних односторонних пределов разностного отношения функции $f(x)$ в любой точке I.

Теорема 4. Пусть функции $m(x)$, $f(x)$ и $M(x)$ определены на $I = [0, \infty)$, имеют непрерывные, строго возрастающие производные. Причём

$$m(x) < M(x), \quad m(x) \leq f(x) \leq M(x).$$

Тогда для всякого $x \in I$ уравнение

$$M(t) - m(x) = (t - x)M'(t) \tag{5}$$

имеет единственный корень

$$t = t_x > x,$$

при этом
$$f'(x) < M'(t_x). \tag{6}$$
Далее, если уравнение
$$m(t) = M'(0)t + M(0)$$
имеет единственный корень $t_0 > 0$, то при $x > t_0$ уравнение (29) имеет единственный корень $t = \hat{t}_x < x$ и
$$f'(x) > M'(\hat{t}_x).$$
При $x \in (0, t_0)$ верна оценка
$$f'(x) > \frac{m(x) - M(0)}{x}.$$
Все неравенства точные.

Следующая теорема демонстрирует применение теоремы 10 в случае, когда миноранта и мажоранта функции $f(x)$ являются квадратичными функциями.

Теорема 5. Пусть
$$0 < a < A, \quad b < B, \quad c < C \text{ и } a + b + c < A + B + C.$$
Функция $f(x)$ такова, что $f'(x) \geq 0$ и
$$ax^2 + bx + c \leq f(x) \leq Ax^2 + Bx + C, \quad \forall x \geq 0.$$
Тогда
$$f'(x) \leq 2Ax + 2\sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)} + B \tag{7}$$
При этом, если
$$Ax > \sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)},$$
то
$$f'(x) \geq 2Ax - 2\sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)} + B. \tag{8}$$
А если
$$Ax < \sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)},$$
то
$$f'(x) \geq \frac{ax^2 + bx + c - C}{x}. \tag{9}$$

Теорема 6. Пусть $a < A$ и для всех $x \geq 0$ выполняется

$$ax < f(x) < Ax. \tag{10}$$

Далее, пусть $t > 1$, $x_1 \in [x, tx]$ и выполняется условие

$$f'(x_1) - f'(x) \geq -W_1(t) \tag{11}$$

Положим $M = \sup\limits_{x \geq 0} f'(x)$, $m = \inf\limits_{x \geq 0} f'(x)$. Тогда, если $0 < \eta < 1 < \lambda$, то

$$(\lambda - 1)M \leq \lambda A - a + \int_1^\lambda W_1(t)dt; \tag{12}$$

$$-(1-\eta)m \leq \eta A - a + \int_\eta^1 W_1\left(\frac{1}{t}\right)dt. \tag{13}$$

Кроме того, если наряду с (35) выполняется и

$$f'(x_1) - f'(x) \leq W_2(t), \tag{14}$$

то верны неравенства

$$(\lambda - \eta)M \leq \lambda A - \eta a + \int_\eta^1 W_2\left(\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^\lambda W_1(t)dt; \tag{15}$$

$$-(\lambda - \eta)m \leq \eta A - \lambda a + \int_\eta^1 W_1\left(\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^\lambda W_2(t)dt; \tag{16}$$

Пусть функция $f(x)$ определена на конечным или бесконечным интервале I, удовлетворяет неравенству

$$m(x) \leq f(x) \leq M(x),$$

и подчинена некоторым дополнительным условиям, гарантирующим существование производных чисел, то есть, существование верхних и нижних односторонних пределов разностного отношения функции $f(x)$ в любой точке I.

Теорема 7. Пусть функции $m(x)$, $f(x)$ и $M(x)$ определены на $I = [0, \infty)$, имеют непрерывные, строго возрастающие производные. Причём

$$m(x) < M(x), \quad m(x) \leq f(x) \leq M(x).$$

Тогда для всякого $x \in I$ уравнение

$$M(t) - m(x) = (t - x)M'(t) \tag{17}$$

имеет единственный корень

$$t = t_x > x,$$

при этом

$$f'(x) < M'(t_x). \tag{18}$$

Далее, если уравнение

$$m(t) = M'(0)t + M(0)$$

имеет единственный корень $t_0 > 0$, то при $x > t_0$ уравнение (29) имеет единственный корень $t = \hat{t}_x < x$ и

$$f'(x) > M'(\hat{t}_x).$$

При $x \in (0, t_0)$ верна оценка

$$f'(x) > \frac{m(x) - M(0)}{x}.$$

Все неравенства точные.

Следующая теорема демонстрирует применение теоремы 10 в случае, когда миноранта и мажоранта функции $f(x)$ являются квадратичными функциями.

Теорема 8. Пусть

$$0 < a < A, \quad b < B, \quad c < C \text{ и } a + b + c < A + B + C.$$

Функция $f(x)$ такова, что $f'(x) \geq 0$ и

$$ax^2 + bx + c \leq f(x) \leq Ax^2 + Bx + C, \quad \forall x \geq 0.$$

Тогда

$$f'(x) \leq 2Ax + 2\sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)} + B \tag{19}$$

При этом, если

$$Ax > \sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)},$$

то
$$f'(x) \geq 2Ax - 2\sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)} + B. \tag{20}$$
А если
$$Ax < \sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)},$$
то
$$f'(x) \geq \frac{ax^2 + bx + c - C}{x}. \tag{21}$$
Теорема 9. Пусть $a < A$ и для всех $x \geq 0$ выполняется
$$ax < f(x) < Ax. \tag{22}$$
Далее, пусть $t > 1$, $x_1 \in [x, tx]$ и выполняется условие
$$f'(x_1) - f'(x) \geq -W_1(t) \tag{23}$$
Положим $M = \sup\limits_{x \geq 0} f'(x)$, $m = \inf\limits_{x \geq 0} f'(x)$. Тогда, если $0 < \eta < 1 < \lambda$, то
$$(\lambda - 1)M \leq \lambda A - a + \int_1^\lambda W_1(t)dt; \tag{24}$$
$$-(1-\eta)m \leq \eta A - a + \int_\eta^1 W_1\left(\frac{1}{t}\right)dt. \tag{25}$$
Кроме того, если наряду с (35) выполняется и
$$f'(x_1) - f'(x) \leq W_2(t), \tag{26}$$
то верны неравенства
$$(\lambda - \eta)M \leq \lambda A - \eta a + \int_\eta^1 W_2\left(\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^\lambda W_1(t)dt; \tag{27}$$
$$-(\lambda - \eta)m \leq \eta A - \lambda a + \int_\eta^1 W_1\left(\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^\lambda W_2(t)dt; \tag{28}$$

Пусть функция $f(x)$ определена на конечным или бесконечным интервале I, удовлетворяет неравенству
$$m(x) \leq f(x) \leq M(x),$$
и подчинена некоторым дополнительным условиям, гарантирующим существование производных чисел, то есть, существование верхних и нижних односторонних пределов разностного отношения функции $f(x)$ в любой точке I.

Теорема 10. Пусть функции $m(x)$, $f(x)$ и $M(x)$ определены на $I = [0, \infty)$, имеют непрерывные, строго возрастающие производные. Причём

$$m(x) < M(x), \quad m(x) \le f(x) \le M(x).$$

Тогда для всякого $x \in I$ уравнение

$$M(t) - m(x) = (t - x)M'(t) \tag{29}$$

имеет единственный корень

$$t = t_x > x,$$

при этом

$$f'(x) < M'(t_x). \tag{30}$$

Далее, если уравнение

$$m(t) = M'(0)t + M(0)$$

имеет единственный корень $t_0 > 0$, то при $x > t_0$ уравнение (29) имеет единственный корень $t = \hat{t}_x < x$ и

$$f'(x) > M'(\hat{t}_x).$$

При $x \in (0, t_0)$ верна оценка

$$f'(x) > \frac{m(x) - M(0)}{x}.$$

Все неравенства точные.

Следующая теорема демонстрирует применение теоремы 10 в случае, когда миноранта и мажоранта функции $f(x)$ являются квадратичными функциями.

Теорема 11. Пусть

$$0 < a < A, \quad b < B, \quad c < C \text{ и } a + b + c < A + B + C.$$

Функция $f(x)$ такова, что $f'(x) \ge 0$ и

$$ax^2 + bx + c \le f(x) \le Ax^2 + Bx + C, \quad \forall x \ge 0.$$

Тогда
$$f'(x) \leq 2Ax + 2\sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)} + B \tag{31}$$
При этом, если
$$Ax > \sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)},$$
то
$$f'(x) \geq 2Ax - 2\sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)} + B. \tag{32}$$
А если
$$Ax < \sqrt{(A-a)x^2 + (B-b)x + (C-c)},$$
то
$$f'(x) \geq \frac{ax^2 + bx + c - C}{x}. \tag{33}$$
Теорема 12. Пусть $a < A$ и для всех $x \geq 0$ выполняется
$$ax < f(x) < Ax. \tag{34}$$
Далее, пусть $t > 1$, $x_1 \in [x, tx]$ и выполняется условие
$$f'(x_1) - f'(x) \geq -W_1(t) \tag{35}$$
Положим $M = \sup\limits_{x \geq 0} f'(x)$, $m = \inf\limits_{x \geq 0} f'(x)$. Тогда, если $0 < \eta < 1 < \lambda$, то
$$(\lambda - 1)M \leq \lambda A - a + \int_1^\lambda W_1(t)dt; \tag{36}$$
$$-(1-\eta)m \leq \eta A - a + \int_\eta^1 W_1\left(\frac{1}{t}\right)dt. \tag{37}$$
Кроме того, если наряду с (35) выполняется и
$$f'(x_1) - f'(x) \leq W_2(t), \tag{38}$$
то верны неравенства
$$(\lambda - \eta)M \leq \lambda A - \eta a + \int_\eta^1 W_2\left(\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^\lambda W_1(t)dt; \tag{39}$$
$$-(\lambda - \eta)m \leq \eta A - \lambda a + \int_\eta^1 W_1\left(\frac{1}{t}\right)dt + \int_1^\lambda W_2(t)dt; \tag{40}$$