

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

**Уравнения Левнера с кусочно-заданным управлением**

**АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ**

студента(ки) 4 курса 421 группы

направление **02.03.01 – Математика и компьютерные науки**

**механико-математического факультета**

**Черняк Дениса Евгеньевича**

Научный руководитель  
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

Е.В.Разумовская

Заведующий кафедрой  
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

Е.В.Разумовская

Саратов 2026

**Введение.** Дифференциальное уравнение Левнера было открыто Чарльзом Левнером в 1923 году. С тех пор на протяжении многих лет оно служило мощным средством изучения свойств однолистных функций в единичном круге. За это время появилось несколько видов этого уравнения, в частности: радиальное и хордовое.

Данная работа посвящена изучению частных случаев уравнения Левнера, допускающих аналитическое решение. Основное внимание уделяется как классическому радиальному уравнению, так и его хордовому варианту. В отличие от общей теории, где решение, не выражается в элементарных функциях, выбор специальных управляющих функций позволяет получить явные или неявные формулы для конформных отображений и исследовать их предельное поведение.

В начале приведены основные сведения о семействах областей Левнера. Здесь определено понятие разреза, параметризованного непрерывной функцией, и введено семейство областей  $\Delta_\alpha = \Delta \setminus L_\alpha$ . Доказаны лемма о параметризации, позволяющая ввести «время»  $t$  такое, что первый коэффициент Тейлора имеет вид  $\gamma_1(t) = e^t$ , а также леммы о стягивании разреза и дуги при предельных переходах. На основе этих результатов выведено радиальное уравнение Левнера для присоединенной функции и для производящей функции, сформулирована теорема об интегралах уравнения и доказана однолистность предельного отображения.

После приведены аналитические решения радиального уравнения Левнера для нескольких типов управляющих функций. Последовательно рассмотрены случаи. Для каждого случая получено неявное решение, выполнен предельный переход  $\tau \rightarrow \infty$  и найдена предельная функция  $f(z)$ .

В конце рассматривается хордовое уравнение Левнера для верхней полуплоскости. Приведены его вывод и основные свойства. Исследованы частные случаи управляющих функций. Для каждого случая получено явное или неявное решение, проанализирована геометрия растущего разреза (халла). Показано, что расположение начальной точки разреза и угол его выхода определяются соотношением между параметрами  $A$  и  $t_0$ .

**Основное содержание работы.**  $\Delta \subset \mathbb{C}$  – односвязная область с началом координат в точке  $O$ .

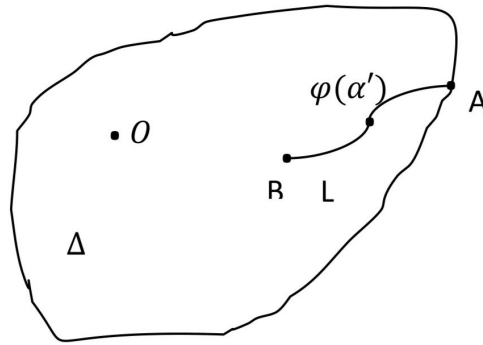


Рисунок 1 — Область  $\Delta$  с разрезом  $L$

Зафиксируем в области  $\Delta$  разрез  $L$ , не проходящий через точку начала координат. Данный разрез параметризован непрерывной функцией  $\varphi(\alpha)$  на отрезке  $[0, \alpha_0]$ , при чем выполняются условия:

- 1)  $\varphi(0) = B \in \Delta$  (внутренняя точка  $\Delta$ ),
- 2)  $\varphi(\alpha_0) = A \in \partial\Delta$  (точка границы  $\Delta$ ).

Для произвольного значения параметра  $\alpha \in [0, \alpha_0]$  рассмотрим часть разреза  $L_\alpha = \{\varphi(s) : \alpha \leq s \leq \alpha_0\}$ . Получаем семейство областей Левнера:

$$\Delta_\alpha = \Delta \setminus L_\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_0.$$

Заметим, что при увеличении  $\alpha$  соответствующие области  $\Delta_\alpha$  возрастают.

Для каждого параметра  $\alpha$  рассмотрим функцию  $\psi(z, \alpha)$ . Рассмотрим конформное однолистное отображение  $\psi(z, \alpha) : D \rightarrow \Delta_\alpha$  единичного круга  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  на область  $\Delta_\alpha$ . Пусть оно нормировано условиями:

$$\psi(0, \alpha) = 0, \quad \psi'_z(0, \alpha) > 0.$$

Такие функции в  $D$  раскладываются в ряд Тейлора по переменной  $z$ :

$$\psi(z, \alpha) = \gamma_1(\alpha)z + \gamma_2(\alpha)z^2 + \gamma_3(\alpha)z^3 + \dots$$

Из биективности отображения  $\psi(z, \alpha)$ :

$$F(\omega, \alpha) = \psi^{-1}(\omega, \alpha),$$

которая отображает область  $\Delta_\alpha$  обратно на единичный круг. Оно также является конформным и сохраняет соответствующую нормировку:

$$F(0, \alpha) = 0, \quad F'_\omega(0, \alpha) > 0.$$

Ее разложение в ряд Лорана по переменной  $\omega$  имеет вид:

$$F(\omega, \alpha) = \frac{1}{\gamma_1(\alpha)}\omega + \delta_2(\alpha)\omega^2 + \dots$$

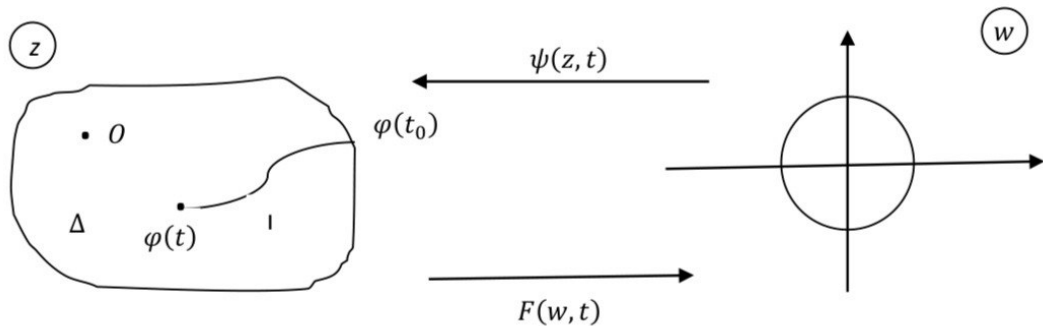


Рисунок 2 — Отображение области с разрезом на единичный круг и обратно

**Лемма (о параметризации).** Существует непрерывная замена переменных  $\alpha = \alpha(t)$  ( $\alpha, t \in \mathbb{R}$ ), такая что Тейлорский коэффициент функции  $\psi(z, \alpha)$  имеет вид:  $\gamma_1(\alpha) = e^t$ .

**Лемма.** Пусть  $t' \rightarrow t''$  или  $t'' \rightarrow t'$ . Тогда отображение  $\Phi(z, t', t'')$  сходится к тождественному  $z$  равномерно на любом компактном подмножестве замкнутого единичного круга, не содержащем:

- точку  $M(t', t')$  при фиксированном  $t'$
- точку  $A(t'')$  при фиксированном  $t''$

**Лемма (о стягивании разреза).** Если  $t'$  фиксировано, а  $t'' \rightarrow t'$ , то при отображении  $\Phi(z, t', t'')$  кривая  $\ell(t', t'')$  стягивается в некоторую точку  $M$  на единичной окружности.

**Лемма (О стягивании дуги  $\gamma$ ).** Если  $t''$  фиксировано, а  $t' \rightarrow t''$ , то при отображении  $\Phi(z, t', t'')$  дуга  $\gamma(t', t'')$  стягивается в точку  $M$  на единичной окружности.

Введем замену  $\alpha$  на параметр времени  $t$ . Пусть существует взаимно-однозначное соответствие между  $\alpha$  и  $t$ , заданное дифференцируемой функцией  $\alpha = \alpha(t)$ , такое что разложение  $\psi(z, \alpha)$  в ряд удовлетворяет:  $\gamma_1(\alpha(t)) = e^t$ .

Введем функцию  $\psi(z, t) = \psi(z, \alpha(t))$ , которая описывает эволюцию отображений в зависимости от времени  $t$ . Соответствующая ей функция  $F(\omega, t) = \psi^{-1}(\omega, t)$  отображает область  $\Delta_{\alpha(t)}$  обратно на единичный круг.

**Теорема** (уравнение Левнера для присоединенной функции). Функция  $F(\omega, t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dF(\omega, t)}{dt} = -F(\omega, t) \frac{1 + e^{-i\mu} F(\omega, t)}{1 - e^{-i\mu} F(\omega, t)},$$

где  $\mu(t)$  — управляющая функция.

**Теорема** (уравнение Левнера для производящей функции). Пусть  $\psi(z, t)$  — семейство однолистных конформных отображений единичного круга  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$  на области  $\Delta_t = \Delta \setminus L_t$  с нормировкой  $\psi(0, t) = 0$ ,  $\psi'_z(0, t) = e^t > 0$ , где  $L_t$  — эволюционирующий разрез. Тогда  $\psi(z, t)$  удовлетворяет уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} = z \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} \cdot \frac{e^{i\mu(t)} + z}{e^{i\mu(t)} - z}.$$

**Теорема** (об интегралах уравнения Левнера). Пусть  $\mu = \mu(t)$  непрерывна при  $t \in [0; \infty)$ . Тогда функция  $\xi = \xi(z, t)$

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\xi \frac{e^{i\mu(t)} + \xi}{e^{i\mu(t)} - \xi}, \\ \xi(z, 0) = z, \end{cases}$$

однолистка в  $|z| < 1$  как функция от  $z$  и существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t \xi(z, t) = f(z)$ , причем предельная функция  $f(z)$  является однолистной в  $|z| < 1$ .

Для радиального уравнения Левнера получены аналитические решения в следующих частных случаях.

Случай 1: постоянная управляющая функция  $\mu(\tau) = e^{i\alpha}$ . Решение в неявном виде:

$$\frac{e^{\tau\xi}}{(e^{i\alpha} + \xi)^2} = \frac{z}{(e^{i\alpha} + z)^2}.$$

Предельная функция:

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{-i\alpha}z)^2} = e^{i\alpha} \cdot k(e^{-i\alpha}z),$$

где  $k(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$  — функция Кебе. Таким образом,  $f(z)$  осуществляет конформное отображение единичного круга на плоскость с разрезом по лучу под углом  $-\alpha$ .

Случай 2: линейная управляющая функция  $\mu(\tau) = e^{i(\alpha+\beta\tau)}$ . После замен переменных получено неявное решение:

$$\frac{e^{\tau\xi}}{(1 + \delta e^{-i(\alpha+\beta\tau)\xi})^{\frac{2}{1-i\beta}}} = \frac{z}{(1 + \delta e^{-i\alpha}z)^{\frac{2}{1-i\beta}}},$$

где  $\delta = \frac{1+i\beta}{1-i\beta}$ . Предельная функция:

$$f(z) = \frac{z}{(1 + \delta e^{-i\alpha}z)^{\frac{2}{1-i\beta}}}.$$

Случай 3: кусочно-заданная управляющая функция. На интервале  $[0, \tau_1]$  при  $\mu(\tau) = e^{i\alpha_1\tau}$ :

$$\frac{e^{\tau\xi}}{(1 + \delta_0 e^{-i\alpha_1\tau\xi})^{\frac{2}{1-i\alpha_1}}} = z, \quad \delta_0 = \frac{1 - i\alpha_1}{1 + i\alpha_1}.$$

На интервале  $[\tau_1, \infty)$  при  $\mu(\tau) = e^{i(\alpha_2\tau+\beta)}$ :

$$e^{\tau\xi} = \frac{e^{\tau_1\xi^*}}{(1 + \delta_1 e^{-i(\alpha_2\tau+\beta)\xi^*})^{\frac{2}{1-i\alpha_2}}}, \quad \delta_1 = \frac{1 - i\alpha_2}{1 + i\alpha_2}.$$

Случай 4: аппроксимация управляющей функции  $\sqrt{\tau}$ . Управляющая функция задана кусочно:

$$\mu(\tau) = \begin{cases} e^\tau, & 0 \leq \tau < 1, \\ e^{1+\frac{1}{3}(\tau-1)}, & 1 \leq \tau < 4, \\ e^{2+\frac{1}{5}(\tau-4)}, & 4 \leq \tau < 9, \\ e^3, & \tau \geq 9. \end{cases}$$

Для каждого участка получено неявное решение. Предельная функция:

$$f(z) = e^9 \frac{\xi_3}{(e^{3i} + \xi_3)^2}.$$

Также в работе рассмотрено "хордовое" уравнение Левнера.

$H : z = x + iy \in C; y > 0$  – множество точек верхней полуплоскости.

Предположим, что  $\gamma : (0; T] \rightarrow H$  – непрерывное инъективное отображение и  $\gamma(t) \in H, \gamma(0) = 0$ . Обозначим  $K_t = \gamma[0; t]$  и  $H_t = H \setminus K_t$ .  $K_t$  – растущее замкнутое множество, называемое оболочкой Левнера или "халлом".

Пусть  $g_t : H_t \rightarrow H$  – единственное конформное отображение, удовлетворяющее нормировке:

$$g_t = z + \frac{c(t)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \rightarrow \infty,$$

где  $c(t) \in R_+$ . Здесь  $g_t$  может быть голоморфно расширено на  $C \setminus K_t \mp s(K_t)$ .

Поскольку функция  $t \rightarrow c(t)$  непрерывна и возрастает от 0 до  $\infty$ , изменим параметризацию  $\gamma(t)$  так, чтобы  $c(t) = 2t$ .  $g_t$  равномерно непрерывна на  $\bar{H}_t \rightarrow$  предел  $\lambda(t) = \lim_{z \rightarrow \gamma(t)} g_t(z)$  существует. Кроме того, отображение  $t \rightarrow \lambda(t)$  непрерывно, а  $t \rightarrow g_t(z)$  удовлетворяет хордовому уравнению Левнера:

$$\dot{g}(z) = \frac{2}{g_t(z) - \lambda(z)}, \quad g_0(z) = z, \quad z \in H.$$

Если  $\gamma$  есть конечное объединение простых кривых, возможно, с общими точками, то используется кратное хордовое уравнение Левнера:

$$\dot{g}(z) = \sum_{k=1}^n \frac{2\mu_k}{g_t(z) - \lambda_k(t)}, \quad g_t(z) = z, \quad 0 \leq t \leq T, \quad z \in H \setminus \gamma[0, T]$$

с кусочно-заданными непрерывными управляющими функциями  $\lambda_k : (0, T] \rightarrow R$  и  $\mu_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$  такие, что  $\sum_{k=1}^n \mu_k = 1$ .

При решении уравнения при  $g_s(z) = \lambda(s)$  в знаменателе получаем нуль. Собирая эти "проблемные" точки в  $K_t$  получаем, что "халл" равен:

$$K_t = \{z \in H : g_s = \lambda(s), s \in (0; t]\}.$$

**Теорема.** Пусть  $\gamma : (0; T) \rightarrow (H, 0, \infty)$  порождается управляющей функцией  $\lambda(t)$ . Если любая параметризация  $\gamma \in C^n$ , то параметризация полуплоскостной емкости  $\gamma$  находится в  $C^{n-1}(0; \tau)$  и  $\lambda \in C^{n-1}(0; \tau)$ , где  $\tau$  является полуплоскостной емкостью  $\gamma$  и может быть бесконечной.

**Теорема.** Существует  $T > t_0$ , для которого хордовое дифференциальное уравнение Левнера (3.2) с кусочными управляющими функциями вида

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ A, & t_0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

имеет решение  $w = g_t(z)$  на  $[0, T]$ . На  $[0, t_0]$ ,  $g_t(z) = \sqrt{z^2 + 4t}$ , а на  $[t_0, T]$   $w = g_t(z)$  удовлетворяет неявному уравнению:

$$w^2 - z^2 - A^2 \log \frac{w^2}{z^2 + 4t_0} = 4t, \quad g_{t_0}(z) = \sqrt{z^2 + 4t_0}, \quad z \in \mathbb{H} \setminus [0, i2\sqrt{t_0}], \quad (1)$$

где непрерывные ветви  $\log w$  и  $\log z$  вещественны, когда  $w$  и  $z$  положительны.

Функция  $g_T(z)$  отображает  $\mathbb{H} \setminus \Gamma$  на  $\mathbb{H}$  согласно следующим трем случаям:

1. Если  $A > 2\sqrt{t_0}$ , то  $\Gamma = \bigcup_{k=0}^2 \Gamma_k$ , где  $\Gamma_0 = [0, 2i\sqrt{t_0}]$ ,  $\Gamma_2[0, T]$  — кривая, которая выходит из точки  $\sqrt{A^2 - 4t_0}$  и ортогональна  $\mathbb{R}$  в этой точке,  $\Gamma_1[0, T]$  симметрична  $\Gamma_2[0, T]$  относительно мнимой оси;

2. Если  $A < 2\sqrt{t_0}$ , то  $\Gamma = \bigcup_{k=0}^2 \Gamma_k^*$ , где  $\Gamma_0^* = \Gamma_0$ ,  $\Gamma_2^*[0, T]$  — кривая, которая выходит из точки  $i\sqrt{4t_0 - A^2}$  и ортогональна мнимой оси в этой точке,  $\Gamma_1^*[0, T]$  симметрична  $\Gamma_2^*[0, T]$  относительно мнимой оси;
3. Если  $A = 2\sqrt{t_0}$ , то  $\Gamma = \bigcup_{k=0}^2 \Gamma_k$ , где  $\Gamma_0 = \Gamma_0$ ,  $\Gamma_2[0, T]$  — кривая, которая выходит из начала координат под углом  $\pi/4$  к  $\mathbb{R}$ ,  $\Gamma_1[0, T]$  симметрична  $\Gamma_2^*[0, T]$  относительно мнимой оси.

**Теорема.** Для любого  $T > t_0$  хордовое уравнение Левнера с кусочными управляющими функциями вида

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0, \\ A\sqrt{t - t_0}, & t_0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

имеет решение  $w = g(z, t)$  на  $[0, T]$ . На  $[0, t_0]$   $g(z, t) = \sqrt{z^2 + 4t}$ , а на  $[t_0, T]$   $w = g(z, t)$  удовлетворяет неявному уравнению

$$(A^2 + 4)(t - t_0) = w^2 - (z^2 + 4t_0)^{\frac{A^2}{4} + 1} w^{-\frac{A^2}{2}}, \quad w(z, t_0) = \sqrt{z^2 + 4t_0},$$

где ветви степенных функций положительны, когда  $z^2 + 4t_0$  и  $w$  положительны. Функция  $g(z, T)$  отображает  $\mathbb{H} \setminus \Gamma$  на  $\mathbb{H}$ ,  $\Gamma = \bigcup_{k=0}^2 \Gamma_k$ , где  $\Gamma_0$  — отрезок  $[0, i2\sqrt{t_0}]$ ,  $\Gamma_2$  — квадратный корень из прямолинейного отрезка под углом  $4\pi/(A^2 + 4)$  к  $\mathbb{R}$  из  $(-4t_0)$ , и  $\Gamma_1$  симметрична  $\Gamma_2$  относительно мнимой оси.

Для хордового уравнения Левнера получены аналитические решения в следующих частных случаях.

- 1) Для  $\lambda(t) = 0$  хордовое уравнение Левнера принимает вид:

$$\dot{g}_t = \frac{2}{g_t},$$

"Халл"уравнения задается функцией:

$$-z^2 = 4t \iff z = 2i\sqrt{t}.$$

- 2) Для  $\lambda(t) = ct$  уравнение Левнера принимает вид:

$$\dot{g}_t = \frac{2}{g_t - ct}.$$

"Халл" уравнения задается функцией:

$$z = \frac{2}{c} - \frac{2\phi}{c} ctg\phi + i\frac{2}{c}\phi.$$

**Заключение.** В бакалаврской работе решены следующие задачи:

- изложены теоретические основы радиального уравнения Левнера: семейства областей Левнера, лемма о параметризации, леммы о стягивании разреза и дуги, вывод уравнения для присоединенной и производящей функций, теорема об интегралах уравнения;
- получены аналитические решения кругового уравнения для постоянной, линейной, кусочно-заданной и аппроксимирующей корень управляющих функций;
- исследовано хордовое уравнение Левнера для верхней полуплоскости, получены решения для управляющих функций  $\lambda(t) = 0$ ,  $\lambda(t) = ct$ ;
- проанализирована геометрия растущего разреза (халла) в зависимости от параметров управляющей функции;

Получены явные и неявные формулы для решений кругового уравнения Левнера для разных частных случаев управляющей функции, а также уравнения "халла" для некоторых частных случаев.

В ходе выполнения бакалаврской работы был разработан программный комплекс на языке Python, реализующий визуализацию "халлов" хордового уравнения Левнера. Программа позволяет:

- задавать произвольные значения параметра  $c$  для управляющей функции  $\lambda(t) = ct$ ;
- строить халлы для положительных, отрицательных и нулевого  $c$ ;
- визуализировать отражение халла относительно мнимой оси при смене знака  $c$ ;
- сохранять полученные графики в файл.

Экспериментальные результаты подтверждают, что для всех рассмотренных значений  $c$  форма халла полностью согласуется с теоретическими свойствами хордового уравнения Левнера: с ростом  $|c|$  максимальная высота халла  $y_{\max} = 2\pi/|c|$  уменьшается (халл становится более прижатым к веще-

ственной оси), при  $c = 0$  вырождается в отрезок на мнимой оси, а при  $c < 0$  происходит зеркальное отражение относительно мнимой оси.

Работа носит законченный характер и может быть использована как теоретическая основа для дальнейшего изучения эволюционных уравнений в теории однолистных функций, а также для знакомства с методами параметрических представлений, применяемых в современном комплексном анализе и математической физике.