

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

**Исследование свойств нулей и факторизационных представлений
плоских классов И.И.Привалова в полуплоскости**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 227 группы

направление **02.04.01 – Математика и компьютерные науки**
механико-математического факультета

Павленко Олега Олеговича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор

Ф.А.Шамоян

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент

Е.В.Разумовская

Саратов 2026

Введение. Теория аналитических функций комплексного переменного занимает важное место в современном анализе и находит применение в смежных математических областях. Одним из её ключевых направлений является исследование классов аналитических функций, задаваемых условиями на рост и распределение нулей аналитических функций.

Объектом исследования данной работы являются плоские классы, введённые И. И. Приваловым, которые обобщают классы Неванлинны и позволяют более точно описывать граничное поведение функций. Важным инструментом их исследования являются факторизационные представления, основанные на произведениях Бляшке.

Актуальность темы магистерской работы определяется тем, что несмотря на хорошую изученность произведений Бляшке в единичном круге, случай верхней полуплоскости имеет ряд особенностей, связанных с геометрией области и граничными условиями. Это требует отдельного анализа условий их сходимости и изучения соответствующих функциональных пространств.

Целью работы является исследование свойств нулей и факторизационных представлений плоских классов Привалова в полуплоскости, а также обобщение результатов на более широкий класс функций.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследованы условия сходимости произведений Бляшке в круге и полуплоскости;
2. Проведён анализ весовых пространств и построены факторизационные представления плоских классов Привалова в круге и полуплоскости;
3. Осуществлено обобщение полученных результатов на классы Неванлинны типа Привалова в произвольных односвязных областях;
4. Разработана программа, визуализирующая произведение Бляшке и распределение нулей функций из плоских классов типа Привалова в верхней полуплоскости.

Практическая значимость работы заключается в возможности применения полученных результатов в смежных задачах комплексного анализа.

Структура и содержание работы определяются поставленной целью и решёнными задачами. Магистерская работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

Основное содержание работы. В первом разделе изложены необходимые для дальнейшего изучения темы понятия, такие как аналитические функции, односвязные области, а также теорема единственности аналитической функции с доказательством, основанным на аналитическом продолжении. Здесь же вводятся понятия сходимости степенных рядов, а также числовых и функциональных бесконечных произведений, и рассматриваются их признаки сходимости. Особое внимание уделяется бесконечным произведениям Бляшке.

Для случая в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ при данной последовательности точек $0 < |z_n| < \infty$ при $n = 1, 2, \dots$ вводится аналитическая функция:

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n}z} < +\infty,$$

которая называется произведением Бляшке. Далее, путём анализа элементарных множителей Бляшке, вводится необходимое условие сходимости этого бесконечного произведения при $z = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty.$$

Важным свойством рассмотренного бесконечного произведения Бляшке в круге является то, что его граничные значения почти всюду равны по модулю единице:

$$|\zeta| = 1, \quad B(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} B(z).$$

Следующим шагом стало рассмотрение произведения Бляшке в случае верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z : \text{Im}z > 0\}$:

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \frac{i - z_k}{i - \overline{z_k}} \right| > 0,$$

для которого справедливо:

$$1 - \left| \frac{i - z_k}{i - \overline{z_k}} \right|^2 = \frac{|z_k + i|^2 - |z_k - i|^2}{|z_k + i|^2} = \frac{4\text{Im}z_k}{|z_k + i|^2}.$$

Далее на верхнюю полуплоскость вводится некоторая ограничивающая мера δ . Анализируя этот случай, получаем что бесконечное произведение Бляшке в полуплоскости с ограничением принимает вид:

$$B(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_k(z - z_k)}}{z_k - \bar{z}_k}.$$

Причем, оно сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(y_k + 1)^2 + x_k^2} < +\infty, \quad (1.12)$$

Таким образом, условие (1.12) называется условием Бляшке в полуплоскости с ограничением. Важным выводом стало то, что в случае круга — такой ряд расходится. В случае же верхней полуплоскости с ограничением — такой ряд сходится, потому как $y_k > 0$.

Далее при $0 < p < \infty$ вводится понятие пространств Харди $H^p(\mathbb{C}^+)$ состоящие из всех аналитических в \mathbb{C}^+ функций f , для которых

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x + iy)|^p dx < +\infty,$$

и впоследствии рассматриваются произведения типа Вейерштрасса, сходящиеся абсолютно и равномерно на компактных подмножествах \mathbb{C}^+ :

$$B_p(\zeta) = e^{g(\zeta)} \prod_{k=1}^{\infty} A_p(\zeta),$$

где A_p — множители Бляшке, $g(\zeta)$ — целая функция. Здесь $B_p \in H^p(\mathbb{C}^+)$, $B_p \not\equiv 0$, а его нули $\{\zeta_n\} \subset \mathbb{C}^+$ также удовлетворяют условию Бляшке:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{Im}\zeta_k}{1 + |\zeta_k|^2} < +\infty.$$

В втором разделе работы рассматриваются весовые пространства аналитических функций A^p . Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг, где

применима $\omega : D \rightarrow [0, 1)$ – измеримая функция (вес), Δ – положительная, суммируемая функция на интервале $(0, 1)$. Тогда при $p > 0$ представление весовых пространств Бергмана принимает вид:

$$A_{\omega}^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} M_p(r, f) \in L(\Delta, \omega) \right\} = \\ = \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{A_{\omega}^p} := \left(\int_0^1 \omega(1-r) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right) dr \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

и называется A_{ω}^p -весовыми пространствами аналитических функций со смешанными нормами. Для функций из этих пространств далее вводится интегральное представление в круге, а также в полуплоскости.

Особое внимание в данном разделе уделено плоским классам Привалова Π_p – семейству функциональных классов аналитических функций, обобщающих класс Неванлинны. Введение классов Привалова было мотивировано тем, что Класс Неванлинны сам по себе очень широк. В частности, функции из него могут иметь довольно сложное поведение на границе круга, поэтому И. И. Привалов предложил более узкую шкалу классов, которая контролирует интегрируемость логарифма роста функции более строго. Так в 1941 году появились классы Привалова Π_p , которые при $0 < p < +\infty$ в случае круга имеют представление:

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\phi})|)^p d\phi < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ a = \max(\ln a, 0)$, $\forall a > 0$.

Между различными пространствами аналитических функций существует цепочка включений, которая доказывается, используя неравенство Гёльдера:

$$H^{\infty} \subset H^p \subset \Pi_p \subset N_p \quad \text{при} \quad 1 < p < +\infty,$$

где H^{∞} – ограниченные аналитические функции, H^p – пространства Харди, Π_p – классы Привалова, N_p – классы Неванлинны.

Далее при $0 < p < +\infty$ вводятся плоские классы Привалова Π_p в верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ :

$$\Pi_p(\mathbb{C}^+) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^+) : \int_{\mathbb{C}^+} \left(\ln^+ |f(z)| \right)^p dx dy < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |f(z)| = \max \left(\ln |f(z)|, 0 \right)$.

Теперь на плоскости \mathbb{C}^+ в соответствии с рисунком 2.1, положим некоторую ограничивающую меру $\delta > 0$, и тогда оценка (2.3) приобретает вид:

$$\ln^+ |f(z)| \leq \frac{c}{|\operatorname{Im} z|^{2/p}} \leq \frac{c}{\delta^{2/p}}. \quad (2.4)$$

То есть функция $f(z) \in \Pi_p$ является ограниченной в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_\delta^+ = \{z = x + iy, y > \delta > 0\}$. Тогда справедливо, что $f \in H^\infty \subset \mathbb{C}_\delta^+$.

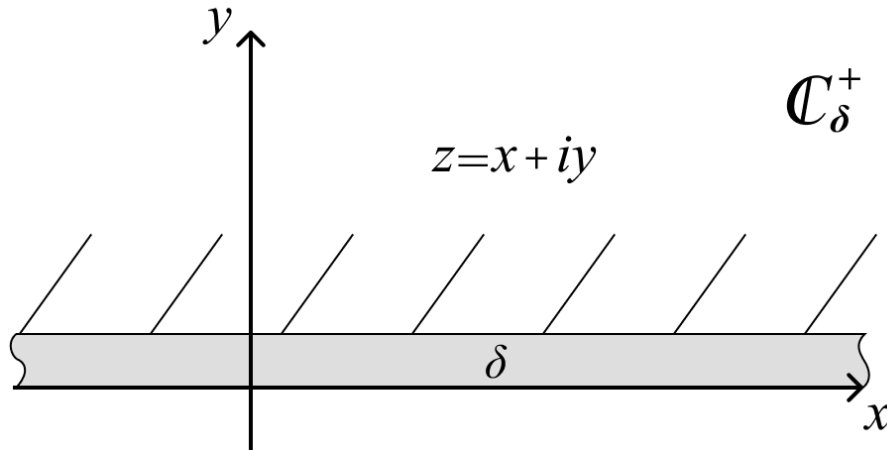


Рисунок 2.1 – Плоскость \mathbb{C}_δ^+ , где δ – некоторая ограничивающая мера

Далее вводится оценка для $\left(\ln^+ |f(z)| \right)^p$:

$$\left(\ln^+ |f(z)| \right)^p \leq \frac{c_1}{y^2} \int_{K_\delta} \left(\ln^+ |f(\zeta)| \right)^p dm_2(\zeta) \leq \frac{c_2}{y^2}.$$

Полученные результаты позволяют нам построить факторизацию нулей функций из плоских классов Привалова в верхней полуплоскости:

$$\Pi_p(\mathbb{C}^+) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^+) : \int_{\mathbb{C}^+} \left(\ln^+ |f(z)| \right)^p dx dy < +\infty \right\}.$$

Тогда, если $f \in \Pi_p(\mathbb{C}^+)$, то справедлива оценка:

$$\ln^+ |f(z)| \leq \frac{c_0}{(\operatorname{Im} z)^{2/p}}.$$

Такая оценка позволяет понять, что функции $f(z)$ — ограничены в верхней полуплоскости \mathbb{C}_δ^+ , то есть $f \in H^\infty(\mathbb{C}_\delta^+)$, где $\mathbb{C}_\delta^+ = \{z = x + iy, y > \delta > 0\}$, H^∞ - множество ограниченных функций.

Теперь, так как функции ограничены и отображаются на верхнюю полуплоскость, то ее нули удовлетворяют условию Бляшке в \mathbb{C}_δ^+ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{(y_k + 1)^2 + x_k^2} < +\infty,$$

и произведение Бляшке здесь принимает вид:

$$B(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{i\alpha_k}(z - z_k)}{z_k - \bar{z}_k} < +\infty,$$

где $e^{i\alpha_k} = \cos \alpha_k + i \sin \alpha_k = 1$. Важно отметить, что в отличие от случая в круге, такое бесконечное произведение в верхней полуплоскости сходится при $y_k \geq \delta$.

Полученные в этом разделе результаты, касательно плоских классов Привалова, имеют широкое применение и высокий потенциал для исследования свойств схожих с ними классов. Так, в следующем разделе исследуются классы Неванлинны типа Привалова N_α .

Вводными данными в третьем разделе становятся понятие формулы Пуассона-Иенсена, рассмотренное в трёх различных случаях. Затем вводятся некоторые оценки ограниченных аналитических функций, в частности теорема площадей, теорема покрытия Кёбе, а также указывается теорема, введённая Дынькиным Е. М. в работе «Оценка аналитических функций в жордановых областях».

Далее указывается класс функций введенный в 1939 году Р. Неванлинной:

$$N_\alpha = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 (1-r)^\alpha T(r, f) dr < +\infty \right\},$$

где

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\phi})| d\phi, \quad r \in [0, 1].$$

Тогда N_α определяется следующим образом:

$$N_\alpha = \left\{ f \in H(D) : (\alpha + 1) \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\phi})| r dr d\phi < +\infty \right\}.$$

Причем, в предельном случае, когда $\alpha \rightarrow -1 + 0$, $N_{-1} = N$. При этом, по теореме Неванлинны, если $f(z) \in N_\alpha(D)$, $f(z) \not\equiv 0$; $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |a_k|)^{\alpha+2} < +\infty,$$

сходится, а не расходится.

Затем вводится представление аналогичное (3.24), предложенное в 1948 году М. М. Джрбашьяном:

$$\Pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp\left(\frac{\alpha+1}{\pi} \iint_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha \ln |1 - (z/z_k)|}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} dm_2(\zeta)\right),$$

причем $\Pi_\alpha(z, z_k)$ сходится тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^{\alpha+2} < +\infty.$$

Вместе с этим, М. М. Джрбашьян также определил, что если $f \in N_\alpha(D)$, то функция $f(z)$ определяется следующим образом:

$$f(z) = c_\alpha z^m \pi_\alpha(z, z_k) \exp \frac{\alpha+1}{\pi} \int_D \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha \ln |f(\zeta)|}{(1-\bar{\zeta}z)^{\alpha+2}} dm_2(\zeta) \quad \text{при } z \in D.$$

Однако, как оказалось, функции $\Pi_\alpha(z, z_k)$ могут и не принадлежать $N_\alpha(D)$, при $\alpha = p$:

$$\Pi_\alpha = \Pi_p = \prod_{k=1}^{\infty} \overline{z_k} \left(\frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k}z} \right) \times \exp \left(c_\alpha \sum_{j=1}^{p+1} \left(\frac{1 - |z_k|^2}{1 - \overline{z_k}z} \right)^j \right).$$

Вопрос о том, принадлежат ли функции $\Pi_\alpha(D)$ классу $N_\alpha(D)$, долгое время оставался открытым. Лишь в 1978 году Ф. А. Шамояном в работе «Факторизационная теорема М. М. Джрбацияна и характеристика нулей аналитических функций с мажорантой конечного порядка» доказал, что существуют функции $f \in N_\alpha(D)$ такие, что $\Pi_\alpha(D) \notin N_\alpha(D)$. Но при $\beta > 2$ $\Pi_\beta(D) \in N_\alpha(D)$. Поэтому найденное Р. Неванлинной еще в 1929 году необходимое условие нулей класса $N_\alpha(D)$ типа Неванлинны и Привалова в круге является также достаточным.

Опираясь на результаты Р. Неванлинны и Ф. А. Шамояна, посвященные плоским классам Неванлинны типа Привалова в круге $N_\alpha(D)$, естественно поставить задачу получения аналогичных результатов для более общего случая — произвольных односвязных областей.

Так далее вводятся плоские классы N_α в произвольных односвязных областях. Пусть \mathcal{G} — односвязная ограниченная область с гладкой границей, $\rho(\zeta, \partial\mathcal{G}) = \rho(\zeta)$ — расстояние из точки $\zeta \in \mathcal{G}$ до границы $\partial\mathcal{G}$. Тогда положим класс аналитических в \mathcal{G} функций:

$$N_\alpha(\mathcal{G}) = \left\{ f \in H(\mathcal{G}) : \int_{\mathcal{G}} \rho^\alpha(\zeta) \ln^+ |f(\zeta)| dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

для которых следующий интеграл конечен:

$$I_1 = \int_{\mathcal{G}} \ln^+ |f(\zeta)| \rho^\alpha(\zeta, \partial\mathcal{G}) dm_2(\zeta) < +\infty. \quad (3.25)$$

В соответствии с рисунком 3.1, положим отображающую функцию $\zeta = \phi(z)$ такую, что $\zeta : D \rightarrow \mathcal{G}$.

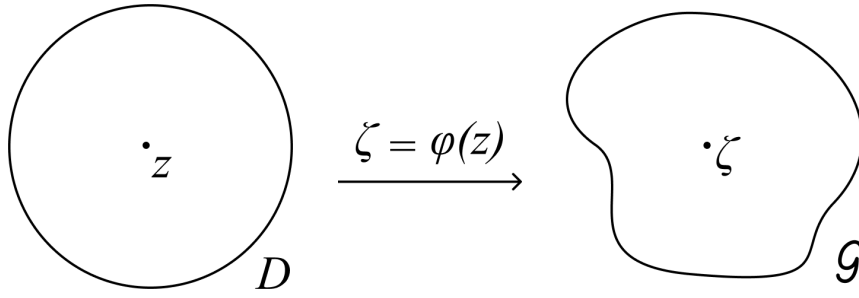


Рисунок 3.1 – Отображение единичного круга D на произвольную односвязную область \mathcal{G} , такое что $z \in D \Leftrightarrow \zeta \in \mathcal{G}$

Известно, что интеграл (3.25) в круге имеет вид:

$$I_2 = \int_D \ln^+ |f(z)| \rho^\alpha(\phi(z), \partial\mathcal{G}) \times |\phi'(z)|^2 dx dy < +\infty, \quad (3.26)$$

где $|\phi'(z)|^2$ – якобиан преобразования, функция $f(\phi(z))$ – аналитическая в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Предположим теперь, что $f(\phi(z))$ еще и ограничена. Тогда, объединяя результаты из подраздела 3.1 (Оценки аналитических ограниченных функций), для $|\phi(z)|$ получаем оценку:

$$\frac{1}{4} \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^3} \leq |\phi'(z)| \leq 4 \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^3},$$

которая дает понять, что

$$0 < c_1 \leq |\phi'(z)| \leq c_2. \quad (3.28)$$

Это подтверждает наше предположение о том, что $f(\phi(z))$ – еще и ограничена. Теперь к (3.27) применим теорему 3.1.3, введенную Дынькиным Е. М., тем самым осуществив переход к односвязной области \mathcal{G} , и получаем оценку:

$$\frac{1}{4} |\phi'(z)| \leq \frac{\rho(\phi(z), \partial\mathcal{G})}{\rho(z, \partial\Omega)} \leq 4 |\phi'(z)|, \quad (3.29)$$

где $\rho(z, \partial\Omega)$ – расстояние от точки z до границы окружности. Так как в нашем случае $\Omega = D$, то $\rho(z, \partial\Omega) = \rho(z, \partial D) \sim (1 - |z|)$. Таким образом, по-

лучаем оценку, играющую ключевую роль в характеристике нулей функций из $N_\alpha(\mathcal{G})$:

$$\frac{1}{4}|\phi'(z)| \leq \frac{\rho(\phi(z), \partial\mathcal{G})}{1-|z|} \leq 4|\phi'(z)| \quad \text{при } z \in D.$$

Теперь, с учетом оценки (3.28) становится очевидно, что

$$c_1 \leq \frac{\rho(\phi(z), \partial\mathcal{G})}{1-|z|} \leq c_2.$$

То есть функция $f(\phi(z)) \in N_\alpha(\mathcal{G})$ — также ограничена, и тогда интеграл (3.26) принимает вид:

$$I_2 = \int_D \ln^+ |f(\phi(z))(1-|z|)^\alpha| dx dy < +\infty.$$

Получаем, что $I_1 \sim I_2$, и тогда нули $\zeta_k = \phi(z_k)$ (по теореме Неванлинны) удовлетворяют условию:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty,$$

что эквивалентно

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho^{\alpha+2}(\zeta_k, \partial\mathcal{G}) < +\infty.$$

В четвертом разделе вводится программный код, иллюстрирующий распределение нулей аналитических функций из классов типа Привалова. Алгоритм состоит из нескольких последовательных этапов. Первым этапом стало задание нулей — фиксируется конечный набор точек $z_k = x_k + iy_k$ в верхней полуплоскости $y_k > 0$. Вторым этапом стало построение сетки — рассматривается часть верхней полуплоскости в виде прямоугольной области: $x \in [a, b]$, $y \in [\varepsilon, c]$, $\varepsilon > 0$, $c = \text{const}$. Третьим этапом стало вычисление частичного произведения — определяется модуль произведения $|B_N(z, z_k)|$ в каждой точке области. Четвертым этапом стала визуализация — строится «тепловая карта» функции $|B_N(z, z_k)|$ и графически (красным цветом) отображаются нули z_k .

Визуальная интерпретация подтверждает основные свойства произведения Бляшке в верхней полуплоскости. В соответствии с рисунком 4.1, в точках $z = z_k$ выполняется $B_N(z, z_k) = 0$. Также вблизи границы $\text{Re}(z)$ видно $B_N(z, z_k) \approx 1$. При росте числа множителей Бляшке N (каждый множитель реализуется как комплексная дробь, где \bar{z}_k — комплексно-сопряжённая точка) структура функции усложняется, усиливается влияние распределения нулей, а частичное произведение приближается бесконечное.

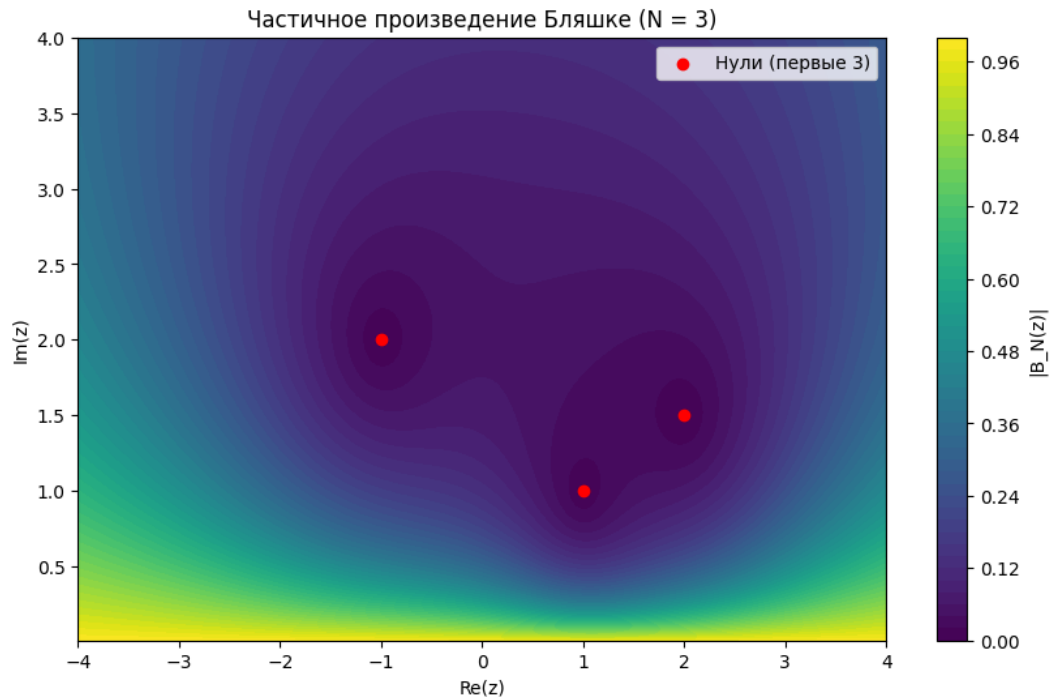


Рисунок 4.1 – Визуализация произведения Бляшке с 3 нулями

Заключение. В данной магистерской работе было проведено исследование свойств нулей и факторизационных представлений плоских классов типа Привалова в верхней полуплоскости, а также в случае произвольных односвязных областей. Поставленная цель работы была достигнута, а полученные результаты расширяют представления о структуре плоских классов аналитических функций и их факторизационных свойствах. Перспективы дальнейших исследований связаны с ослаблением условия на границу области, а также с изучением аналогичных вопросов для более общих классов функций.