МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Параметрический метод в теории аналитических функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента(ки) 2 курса 227 группы
направление **02.04.01 – Математика и компьютерные науки**
механико-математического факультета

Техода Мика

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор ________________ Д.В.Прохоров

Заведующий кафедрой
зав.кафедрой, к.ф.-м.н., доцент ________________ Е.В.Разумовская

Саратов 2026

Введение. Теория аналитических функций занимает одно из центральных мест в современной математике, являясь фундаментом для развития комплексного анализа и его многочисленных приложений в физике, механике, теории управления и других областях науки. Одним из эффективных инструментов исследования в данной области выступает параметрический метод, позволяющий описывать и изучать семейства аналитических функций через введение дополнительных параметров.

В магистерской работе используется параметрическое представление Лёвнера классов S, S^M, S_R, S_R^M. Параметрический метод является традиционным в экстремальных задачах для однолистных функций. Основная идея этого метода заключается в изучении однолистных цепочек, удовлетворяющих определенным дифференциальным уравнениям.

Актуальность темы исследования определяется важностью задач, связанных с нахождением множеств значений систем функционалов. Степень разработанности проблемы показывает, что несмотря на значительное количество работ, посвященных аналитическим функциям и их приложениям, вопросы, связанные с систематическим использованием параметрических подходов, остаются недостаточно исследованными.

Целью данной работы является исследование параметрического метода с точки зрения теории управлений, а также выявление его возможностей при решении различных задач комплексного анализа. Для решения поставленной цели были решены следующие задачи: изучение основных понятий и свойств аналитических функций; формализация задачи нахождения множества значений функционала с помощью обобщенного дифференциального уравнения Левнера для круга; применение рассмотренных методов к нахождению множества значений функций класса S_R^M; разработка программного кода для визуализаций частного случая решения уравнения Левнера.

Структура работы определяется поставленными целью и задачами. Работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения.

Основное содержание работы. В первом разделе расмотрим параметрический метод и его связь с методами теории управления.

Пусть $E = \{z : |z| < 1\}$ — единичный круг, и пусть S — класс всех голоморфных функций f:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (1)$$

которые однолистны в E. Класс S является основным объектом исследования в геометрической теории функций комплексного переменного. Существуют некоторые важные подклассы S. Мы укажем два из них: $S_{\mathrm{R}} \subset S$ состоит из вещественнозначных функций, т.е. функций f вида (1) с вещественными коэффициентами a_n, $n \geq 2$; $S^{\mathrm{M}} \subset S$ состоит из ограниченных функций, т.е. функций f вида (1), для которых выполняется неравенство $|f(z)| < M$, $M > 1$. Обозначим через $S_{\mathrm{R}}^{\mathrm{M}}$ пересечение S_{R} и S^{M}.

Метод параметрического представления, основанный на изучении цепочек однолистных функций, удовлетворяющих уравнению Лёвнера, позволяет использовать параметрическое представление этих классов в различных задачах.

Единственное важное отличие заключается в ограничениях на управления. Поэтому точки максимума $u \in U(t, x, \varphi)$ могут не быть решениями уравнений

$$\frac{\partial \mathrm{H}(t, \mathrm{x}, \varphi, \mathrm{u})}{\partial \mathrm{u}} = 0.$$

А именно, если какая-либо из крайних точек $u = -2$ или $u = 2$ отрезка $[-2, 2]$ максимизирует функцию Гамильтона, то производная H_u в этой точке может быть отлична от нуля. В этом случае производная H_u отрицательна, если $u = -2$, и положительна, если $u = 2$.

Второй раздел работы посвящен представление граничных функций интегралами обобщенного дифференциального уравнения Лёвнера. Здесь мы изучим возможности представления граничных однолистных функций, доставляющих граничные точки множеств $D_n(z)$ и $\frac{M_n(z)}{n}$, интегралами обобщенного дифференциального уравнения Лёвнера.

Плотное подмножество граничной поверхности $\partial D_n(z)$ доставляется функциями $f \in S$, которые отображают круг E на плоскость с разрезами вдоль кусочно-аналитических кривых не более чем с $n+1$ конечными концевыми точками. Согласно теореме 1, такие функции представляются интегралами дифференциального уравнения Лёвнера (2) с кусочно-непрерывными управлениями.

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{iu_j}{e^{iu_j}} + w, \quad w|_{t=0} = z, \quad t \geq 0$$

с кусочно-непрерывными управлениями $u_1, \ldots, u_m$ и измеримыми неотрицательными функциями $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$. Число m равно числу конечных концевых точек разрезов, определяемых отображающей функцией $f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,t)$.

Такое представление не единственно. Мы покажем, что измеримые "выпуклые" коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ можно рассматривать как постоянные положительные числа, в то время как управления $u_1, \ldots, u_m$ являются непрерывными. Эти требования устраняют избыточные параметры управления и обеспечивают единственность представления.

Предположим, что функция $f \in S_R$ доставляет неособую граничную точку множества $RD(z)$, и f отображает круг E на плоскость, разрезанную вдоль кусочно-аналитических кривых с m конечными концевыми точками в замкнутой верхней полуплоскости. Тогда существуют непрерывные для $t \geq 0$ вещественные функции $u_j, -2 \leq u_j \leq 2, \quad j = 1, \ldots, m$, и положительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$, такие, что решение $w = w(z,t)$ задачи Коши для обобщенного дифференциального уравнения Лёвнера

$$\frac{dw}{dt} = -w \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{1-w^2}{1-u_j w + w^2}, \quad w|_{t=0} = z, \quad t \geq 0$$

представляет f как $f(z) = \lim_{t\to\infty} e^t w(z,t)$. Такое представление единственно.

В третьем разделе рассмотрим множества значений для ограниченных однолистных вещественно-типичных функций. В этой части мы описываем множество $\mathrm{RD}_0^M(z)$, т.е. множество значений $\{f(z)\}$ в классе S_R^M для фиксированного невещественного z.

Множества значений $\{f(z)\}$ и $\{f(\bar{z})\}$ в классе S_R^M симметричны друг другу относительно вещественной оси. Более того, если функция f принадлежит классу S_R^M, то функция g, где $g(z) = -f(-z)$, также принадлежит классу S_R^M. Следовательно, множества значений $\{f(z)\}$ и $\{f(-z)\}$ симметричны друг другу относительно начала координат. Таким образом, для описания множества $\mathrm{RD}_0^M(z)$ значений $\{f(z)\}$ в классе S_R^M достаточно ограничиться рассмотрением случаев $z = re^{i\varphi},\ 0 < r < 1,\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Случай $\varphi = 0$ хорошо известен. Ниже мы предполагаем, что $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Вместо $\{f(z)\}$ мы можем исследовать множество значений логарифма $\{\log f(z)\}$, $z \neq 0$, или двумерное множество значений $\{\log|f(z)|, \arg f(z)\}$ в пространстве R^2. Записывая $\arg f(z)$, мы подразумеваем непрерывную ветвь такую, что $\arg \left.\frac{f(z)}{z}\right|_{z=0} = 0$.

Граница $\partial RD_0^M(z)$ множества $RD_0^M(z)$ состоит из кривых Γ_1 и Γ_2. Кривая Γ_1 имеет параметрическое представление

$$\Gamma_1 = \left\{\exp(x(\log M, \theta)) : \theta \in M_1^*(0, \log z)\right\},$$

где $x(t,\theta)$ — проекция решения $(x(t,\theta), \psi(t,\theta))$ задачи Коши для системы Гамильтона с управлением $u(t,x,\psi)$ в её правой части, задаваемым формулой

$$u(t,x,\psi) = \left[\frac{2\sin x_2(1-e^{-t})(e^{-x}-e^{-t}\psi)}{|\psi||1-e^{2(x-t)}| - i\psi e^{1x_2}(1-e^{2(x-t)})} + e^{-t}x + e^{-t}x^2\right]_{-2}^{2}.$$

Кривая Γ_2 имеет параметрическое представление

$$\Gamma_2 = \{f(z) : f \in \Lambda\}.$$

Четвертый раздел работы посвящен частные случаи решение кругового уравнения Левнера.

Решим уравнение Левнера с постоянной управляющей функцией, зависящей от параметров. Рассмотрим круг $|w| < A(A \in \mathbb{R}, A > 0)$.

Рассмотрим уравнение Левнера с постоянным управлением $\mu(\tau) = e^{i\alpha}$:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = -\xi \frac{\mu(\tau) + \xi}{\mu(\tau) - \xi}, \quad \xi(z, 0) = z$$

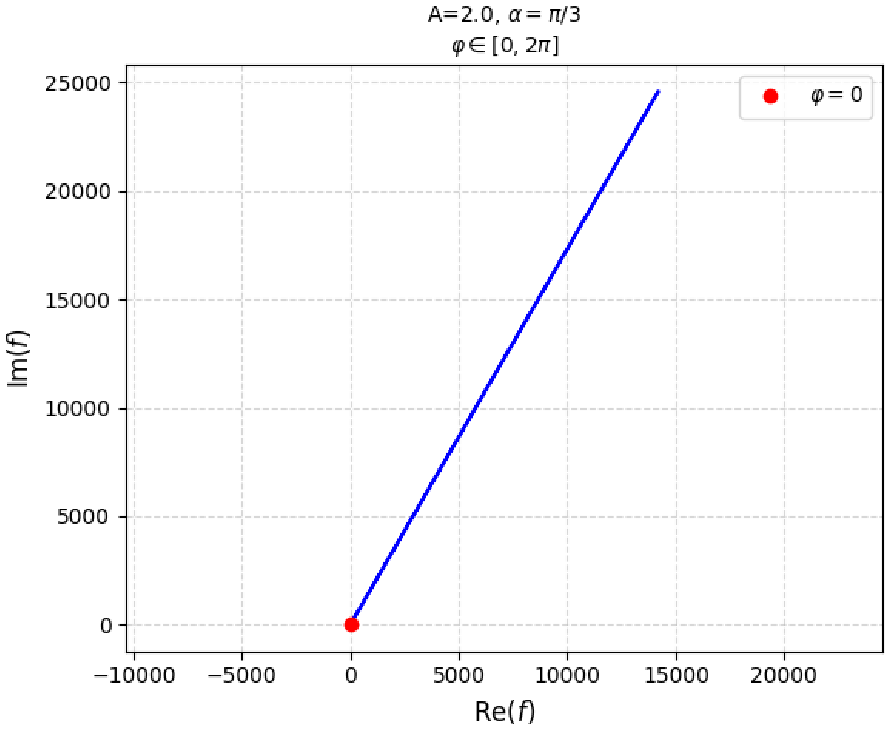
Его решение

$$F(w) = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{w}{(we^{i\alpha} + A)^2}, |w| < A, \alpha - const, \alpha \in \mathbb{R}$$

Для построения образов $|w| = A$ в соответствии с таблицей 1 был разработан програмный код на языке Python.

Таблица 1 - Значения A и α для получения рисунков

A	$0,1$	$0,1$	$0,5$	$0,5$	2
α	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$



Функция $F(w)$ осуществляет конформное и однолистное отображение круга $|w| < A$ на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом, идущим по лучу под углом $-\alpha$ к положительному направлению вещественной оси. Концевые точки разрезов имеют модуль равной $\frac{1}{A^3}$.

Заключение: В магистерской работе рассмотрено применение параметрического метода, порожденного круговыми уравнениями Левнера, к актуальным задачам теории однолистных функций. Параметрический метод рассматривается совместно с принципом максимума Понтрягина. Приведены решения задач этой схемы. Разработан алгоритм решения уравнения Левнера.