

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»


Кафедра нелинейной физики

**Оценка фрактальной размерности по сигналам локальных потенциалов
животных для классификации ритмов и режимов работы мозга**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

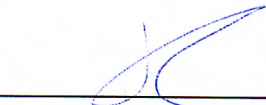
Студента 4 курса 4011 группы
направления 03.03.01 Прикладные математика и физика
Института физики
Грачева Даниила Руслановича

Научный руководитель
профессор кафедры системного
анализа и автоматического управления,
д.ф.-м.н., профессор

 29.05.2026

И.В. Сысоев

Зав. кафедрой
нелинейной физики
к.ф.-м.н., доцент



Е.Н. Бегинин

Саратов 2026 г.

Введение

Актуальность. В настоящее время наблюдается неуклонный рост ожидаемой продолжительности жизни по всему миру. Эта тенденция неизбежно приводит к увеличению заболеваемости патологиями головного мозга, фактором риска которых является возраст [1]. В связи с этим наблюдается рост актуальности проблемы диагностики и лечения возрастных нейродегенеративных заболеваний мозга, в том числе рост интереса к новым методам диагностики, включая как клинические подходы [2], так и методы, основанные на анализе сигналов [3], основанные на достижениях современной нелинейной физики.

Важным аспектом диагностики таких заболеваний является различие ритмов активности головного мозга. Каждый из ритмов активности соответствует своему состоянию: от глубокого сна до активного бодрствования с решением сложных когнитивных задач [4]. Так, например, если в состоянии сна наблюдается ритм, отвечающий состоянию бодрствования, это может свидетельствовать о патологиях головного мозга.

В целях диагностики применяют различные методы. Чаще всего используется спектральный анализ сигналов электроэнцефалографии, однако его применимость ограничена из-за различных факторов, например, перекрытия частот, суперпозиции, индивидуальных особенностей мозга и других. Реже в качестве метрик используют инвариантные меры из нелинейной динамики. Они лишены этих недостатков, однако сложны в применении и требуют соблюдения многих нюансов.

Результативность диагностики также существенно зависит от того, какие сигналы мозга измеряются и сколько каналов одновременно. Подходы, основанные на анализе связанности, могут иметь значительное преимущество над методами диагностики, полагающимися только на характеристики отдельного (скалярного) сигнала. Например, при диагностике эпилепсии они позволяют распознать начало приступа раньше [5] или надёжнее детектировать границы разряда [6], но часто оказываются неприменимы на практике из-за отсутствия данных, поскольку во многих случаях пишется единственный канал либо часть каналов относится к областям, не участвующим в патологической активности. Поэтому методы, основанные на анализе одного

скалярного сигнала по-прежнему актуальны. К таковым, помимо спектральных методов, традиционно относятся методы, основанные на оценке энтропии Шеннона, ляпуновского показателя (или спектра показателей, если это возможно) и фрактальной размерности, поскольку эти меры позволяют охарактеризовать сложность и регулярность сигналов [7].

Целью данной работы было освоение методов расчёта корреляционной размерности и приложение их к детектированию тета- и дельта-ритмов мозга. Для достижения цели в данной работе были поставлены следующие **задачи**:

— Освоение метода расчёта корреляционной размерности по временным рядам: анализ литературы, реализация алгоритма на компьютере для векторного ряда, сопоставление полученных результатов с известными в литературе значениями для эталонных динамических систем: каскадов и потоков. Определение влияния длины ряда и частоты дискретизации;

— Реконструкция вектора состояния динамических систем с непрерывным временем методом задержек, оценка величины задержки с помощью автокорреляционной функции;

— Оценка корреляционной размерности по скалярному ряду с помощью восстановления вектора состояния методом задержек, сопоставление с результатами оценки по векторному ряду;

— Реконструкция вектора состояния методами последовательного дифференцирования и интегрирования;

— Оценка корреляционной размерности по данным электронных нейронов: по временным рядам моделей и экспериментальным сигналам;

— Оценка корреляционной размерности по экспериментальным сигналам мозга: локальным потенциалам в различных физиологических состояниях.

Структура работы. Работа состоит из введения, трёх основных глав, заключения и списка использованной литературы из 28 наименований. Общий объем – 39 страниц.

Основное содержание работы

В главе 1 «Корреляционная размерность» рассматривались методы расчёта корреляционной размерности, способы оптимизации алгоритма. Также программно реализованные алгоритмы сравнивались в точности и скорости работы.

В разделе 1.1 «Введение корреляционной размерности» вводились понятия фрактальной и корреляционной размерности как меры сложности самоподобия математического множества, или иначе, меры сложности динамики системы в фазовом пространстве. Приводилась связь между мерами: корреляционная размерность есть оценка снизу фрактальной размерности. Для последующего расчёта корреляционной размерности приводилось описание алгоритма Грассбергера–Прокаччиа [8], который основывается на вероятностной оценке попадания пары точек в одну ячейку. На практике алгоритм представляет собой подсчет всех пар точек множества, расстояние между которыми не превышает ε . Вводилась формула для корреляционного интеграла:

$$C_M(\varepsilon) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i,j=1}^M \theta(\varepsilon - \|x_i - x_j\|), \quad (1)$$

где M – это количество точек множества;

θ – это ступенчатая функция Хэвисайда:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Далее по этому графику корреляционная размерность оценивается как коэффициент наклона прямой, полученной посредством аппроксимации методом наименьших квадратов наиболее линейного участка графика в двойном логарифмическом масштабе. При этом существуют ограничения на выбор диапазона для ε : для малых значений ε график корреляционного интеграла отклоняется от прямой из-за недостаточного количества точек для хорошей статистической оценки, а при слишком больших ε , сравнимых с диаметром множества, график отклоняется от прямой и насыщается.

Далее рассматривались способы оптимизации алгоритмической сложности расчёта корреляционной размерности, которая составляет $O(M^2)$.

Предложенный в курсе лекций по динамическому хаосу [7] метод сеток, заключается в покрытии пространства многомерной регулярной сеткой и подсчете пар точек в каждой из ячеек сетки по отдельности. Данный метод не является универсальным, поскольку множество точек может быть локализовано в малой области пространства, в результате чего большинство точек попадет в небольшое число ячеек, а алгоритмическая сложность при этом снизится слабо. Кроме того, данный метод не учитывает точки на границах ячеек, что может привести к занижению в оценке корреляционной размерности. Был предложен, подробно описан и реализован иной способ, основанный на векторизации данных о расстоянии между всеми парами точек.

В разделе 1.2 «Оценка корреляционной размерности эталонных систем» были приведены параметры и вид уравнений динамических систем с известной из литературы корреляционной размерностью [8, 9]: логистическое отображение, отображение Эно, аттрактор Лоренца и аттрактор Рёсслера. Решение данных систем осуществлялось с помощью средств языка программирования `Python`, а затем по полученным временным рядам была проведена оценка корреляционной размерности для оригинального алгоритма, алгоритма, оптимизированного методом сеток, и алгоритма с использованием векторизации данных. Результаты оценки корреляционной размерности сравнивались по точности и скорости работы, в ходе чего наиболее эффективным оказался алгоритм с векторизацией данных. При этом результаты оценок всех методов совпали с аналогичными из литературы с погрешностью до 2 %.

В главе 2 «Восстановление аттрактора» была сформулирована проблема неполноты информации при изучении реальных процессов, в результате чего чаще всего в распоряжении исследователей оказывается запись сигналов одной или нескольких величин [10], что недостаточно для многих мер нелинейной динамики. Далее приводились два хорошо описанных в литературе и научных статьях метода реконструкции аттрактора, их реализация и применение на примере модельных систем, а также проверка качества реконструкции с помощью оценки корреляционной размерности по полученным аттракторам в пространстве вложения.

В разделе 2.1 «Метод задержек» был описан метод задержек, который заключается в представлении в качестве новых переменных сдвинутых на время τ копии оригинального временного ряда [11]:

$$\bar{r}(x(t), x(t - \tau), \dots, x(t - (m - 1)\tau)) \quad (3)$$

где \bar{r} — это восстановленный вектор состояния, m — это размерность пространства вложения.

Метод задержек имеет некоторые ограничения на выбор времени задержки. Так, если τ выбирается слишком малым, восстановленные переменные оказываются практически неразличимыми, а восстановленный аттрактор вытягивается вдоль диагонали. Такая реконструкция не даёт почти никакой новой информации о динамике системы. Если же выбранное значение τ оказывается слишком большим, то переменные теряют корреляцию друг с другом, а аттрактор замазывается на фазовом портрете. Такой выбор τ также не позволяет получить новой информации о динамике системы.

Для определения τ в автоматическом режиме была выбрана процедура на основе автокорреляционной функции (АКФ) [12], в рамках которой в качестве τ выбирают время первого нуля АКФ.

В разделе 2.2 «Метод численного дифференцирования и интегрирования» были приведены преимущества и недостатки численного дифференцирования и интегрирования для восстановления вектора состояния. Описываются и реализуются метод численного дифференцирования со сглаживанием прямою и метод численного интегрирования с аппроксимацией параболой.

В подразделе 2.2.1 «Численное дифференцирование» был описан метод численного дифференцирования со сглаживанием прямою [13], а также проводилась проверка работы реализованного алгоритма на примере нелинейной функции $\sin^2 x$ и её производной, равной $2 \sin x \cos x$. Взятая численно производная совпала с аналитической.

В подразделе 2.2.2 «Численное интегрирование» был описан метод численного интегрирования с аппроксимацией параболой (метод Симпсона) [14]. Также проводилась проверка правильности работы реализованного

алгоритма на примере нелинейной функции x^2 и её первообразной $\frac{x^3}{3}$. Взятая численно первообразная совпала с аналитической.

В разделе **2.3 «Применение методов восстановления аттрактора к эталонным системам»** проводилось восстановление аттракторов Лоренца и Рёсслера по каждой из переменных каждым методом, сравнивался геометрический вид полученных аттракторов и проводилась оценка качества восстановления аттракторов с помощью оценки их корреляционной размерности.

В подразделе **2.3.1 «Важные замечания к практическому применению реконструкции аттрактора»** приводилась теорема Такенса [15] о вложении, которая обосновывает использование для реконструкции аттракторов пространства вложения размерности m :

$$m \geq 2D_F + 1, \quad (4)$$

где D_F — это фрактальная размерность.

В подразделе **2.3.2 «Результаты реконструкции аттракторов»** были приведены результаты реконструкции в виде рисунков аттракторов в пространстве вложения $m = 3$, полученных с использованием каждого метода. Проводилось сравнение, основанное на визуальном анализе их геометрии. Также приводились результаты оценки корреляционной размерности при $m = 3$ и $m = 7$ и сравнивались между собой и со значениями эталонных систем.

Исходя из результатов данной главы, можно сделать вывод о том, что метод численного дифференцирования и метод задержек дают наиболее устойчивые результаты, согласующиеся с табличными значениями. Метод численного интегрирования "сглаживает" фрактальную структуру аттракторов при реконструкции и занижает размерность, выступая фильтром нижних частот.

В главе **3 «Оценка корреляционной размерности реальных сигналов»** были описаны данные радиотехнической модели нейронной сети [16], её математической модели [17] и данные внутричерепных записей сигналов электроэнцефалограммы (ЭЭГ) крыс. Проводилась оценка корреляционной размерности сигналов искусственных нейронов и записей ЭЭГ.

В разделе 3.1 «Искусственные нейроны» приведено подробное описание радиотехнической и математической моделей нейронных сетей на основе системы с фазовой автоподстройкой частоты.

В подразделе 3.1.1 «Математическая модель» приведена система дифференциальных уравнений, описывающая работу системы с фазовой автоподстройкой частоты:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = y, \\ \frac{dy}{d\tau} = z, \\ \varepsilon_1\varepsilon_2\frac{dz}{d\tau} = \gamma - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)z - (1 + \varepsilon_1\cos\varphi)y, \end{cases} \quad (5)$$

где φ и y – это мгновенная разность фаз и разность частот между настраиваемым и задающим автогенераторами соответственно;

z – это скорость изменения разности фаз для y ;

γ – это параметр, задающий начальную расстройку частот;

ε_1 и ε_2 – это параметры обратной связи системы.

Также приведены различные режимы динамики системы и соответствующие им параметры. Для каждого из режимов было проведено решение системы уравнений 5.

В подразделе 3.1.2 «Радиотехническая модель» описаны установка и характеристики записи сигналов.

В подразделе 3.1.3 «Результаты» были приведены результаты оценки корреляционной размерности по полученным временным рядам математической модели и сигналам радиотехнической установки. Пример процедуры оценки корреляционной размерности изображен на рисунке 1.

Результаты оценки корреляционной размерности для математической модели согласуются с теорией – режим без спайков "1(a)" стремится к единице, с добавлением спайков "1(b)–б" размерность медленно растет, а в режиме с хаосом "Хаос (f)" корреляционная размерность резко растет и становится дробной. Метод численного дифференцирования несколько занижает размерность по сравнению с методом задержек в следствии сглаживания зашумленных данных. Хаотические режимы реальных сигналов также показывают рост по сравнению с режимами с несколькими спайками. Значения математической и радиотехнической моделей расходятся, поскольку математическая

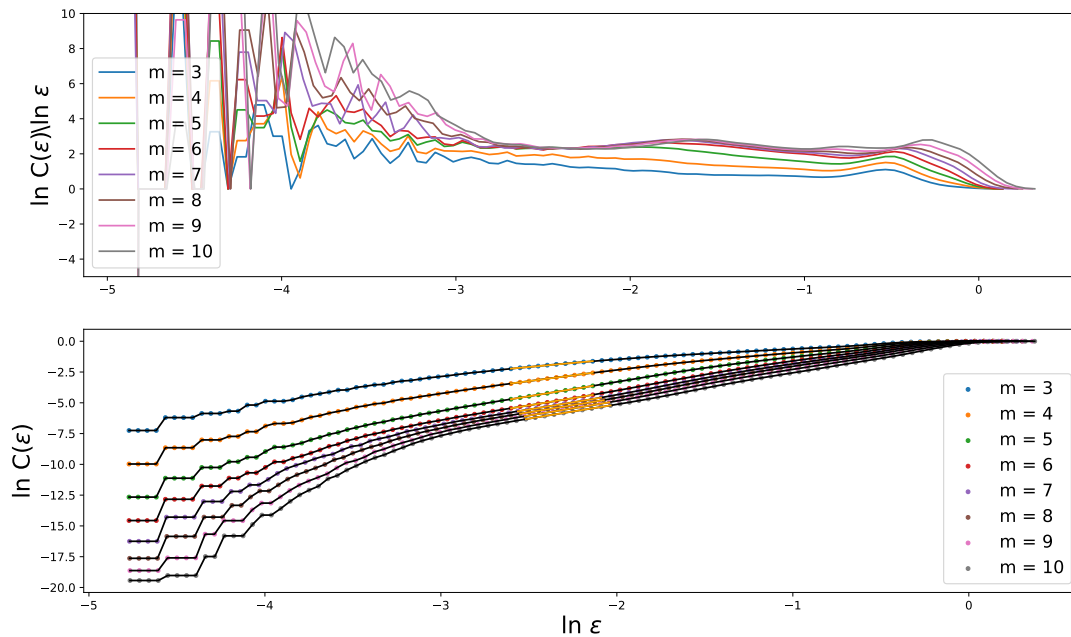


Рисунок 1 — Графики локальных наклонов (сверху) и корреляционных интегралов (снизу) для режима 2(с) радиотехнической модели, полученные методом задержек при разных пространствах вложения; оранжевыми линиями показаны аппроксимирующие прямые

модель не учитывает опорный генератор, используемый в радиотехнической модели для синхронизации.

В разделе 3.2 «Сигналы дельта- и тета-ритмов активности мозга крыс» описаны данные, которые были предоставлены ведущим научным сотрудником Института высшей нервной деятельности и нейрофизиологии РАН Л. В. Виноградовой в рамках совместной работы по проектам РНФ. Экспериментальные данные были получены в рамках электрофизиологического эксперимента для работы [18], но непосредственно не использовались в ней. В таблице 1 приведены сведения о среднем времени одного эпизода и их количестве для каждой особи.

Восстановление проводилось методом задержек, поскольку последовательное дифференцирование привело бы к очень высокому росту влияния шумов, значимых в рассматриваемых записях, уже для второй производной, а численное интегрирование показало высокую чувствительность к трендам, которые могут быть на длинных интервалах достаточно существенными. Кор-

Таблица 1 — Среднее время эпизодов и их количество для каждой особи

Ритм	№ особи	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тета-ритм	ср. время, с	128	258	107	102	113	130	73	74	65
	число эпизодов	16	6	10	17	12	8	4	14	17
Дельта-ритм	ср. время, с	290	221	203	135	195	363	389	585	308
	число эпизодов	7	6	3	4	5	5	7	3	6

реляционная размерность оценивалась для каждого рассматриваемого эпизода у каждого исследуемого животного. Затем все оценки, полученные по всем эпизодам от всех животных для выбранного типа активности и выбранного канала, рассматривались как выборка и по ним рассчитывались эмпирическое среднее и эмпирическая дисперсия. На рисунке 2 изображены усредненные по всем особям крыс значения оценки корреляционной размерности, точки соответствуют средним значениям, а «усы» (планки погрешностей) — стандартным отклонениям.

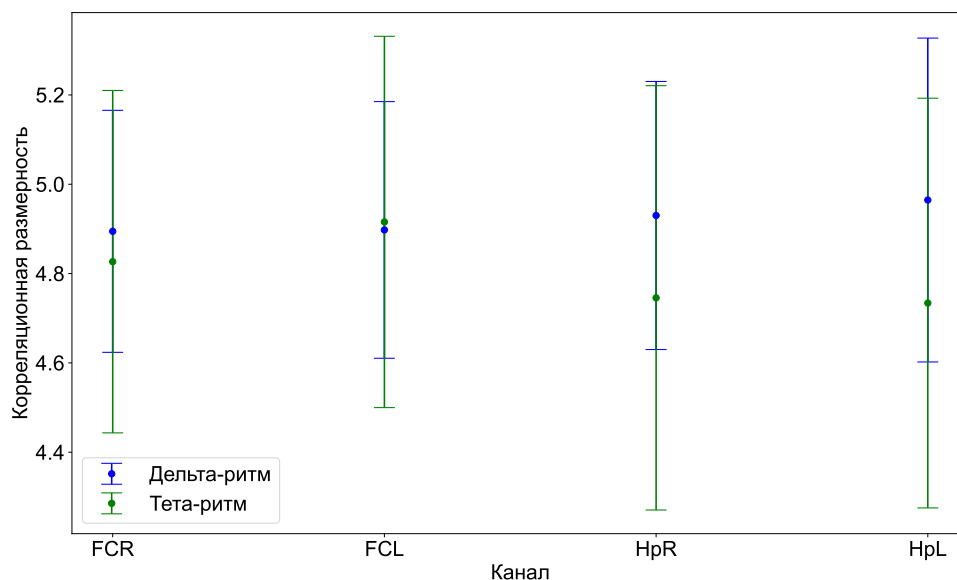


Рисунок 2 — Оценки корреляционной размерности для 4-х рассмотренных отведений: FC — лобная кора, Hp — гиппокамп, R — справа, L — слева.

Точки соответствуют эмпирическому среднему, рассчитанному по всем эпизодам, планки погрешностей — эмпирическому среднеквадратичному отклонению

Результаты оценки указывают, что дельта-ритм имеет более высокую среднюю по всем животным корреляционную размерность во всех четырёх отведениях, хотя статистически результаты для ритмов отличаются незначительно. Вывод о более высокой размерности дельта-ритма хорошо согласуется с тем, что тета-ритм, как правило, имеет лучше выраженную основную частоту, чем дельта-ритм [4].

Результаты работы [19], представляющие собой оценку фрактальной размерности идентичных сигналов ЭЭГ, согласуются с полученными в данной главе.

Заключение

В ходе проделанной работы был освоен и программно реализован алгоритм расчёта корреляционной размерности по векторным временным рядам. Проводилось численное решение эталонных систем с параметрами, взятыми из литературы, после чего осуществлялся расчёт корреляционной размерности полученных при решении эталонных систем векторных временных рядов. Полученные результаты расчётов совпали с аналогичными из литературы с погрешностью до 2%. Для алгоритма оценки корреляционной размерности были рассмотрены разные методы оптимизации алгоритмической сложности: методы сеток и векторизации данных, и проведено сравнение их точности на решённых ранее эталонных системах. Также было показано, что увеличение длины ряда дискретных отображений и увеличение частоты дискретизации потоковых систем улучшает точность оценки корреляционной размерности.

Была освоена методика восстановления вектора состояния по одномерному скалярному временному ряду двумя методами: метод задержек и метод последовательного численного дифференцирования и интегрирования. Для метода задержек был освоен способ выбора времени задержки с помощью автокорреляционной функции, подсчёт который также был реализован в ходе работы. Были реализованы метод численного дифференцирования со сглаживанием прямою, а также метод Симпсона для численного интегрирования. Правильность работы данных методов проверялись на простых функциях. Для эталонных потоковых систем была проведена реконструкция аттрактора по каждой переменной. По восстановленным аттракторам в пространстве вложения $m = 3$ и $m = 7$ была проведена оценка корреляционной размерности, а также сравнение полученных значений для каждого из методов реконструкции и размерности пространства вложения. Наиболее точным результатам соответствовали методы задержек и численного дифференцирования.

Было проведено восстановление вектора состояния и оценка корреляционной размерности сигналов при различных режимах работы радиотехнической модели нейронной сети, реализованной на базе системы с фазовой автоподстройкой частоты. Также было проведено численное решение различных режимов динамики математической модели, описывающей радиотехническую установку и представляющей собой систему дифференциальных

уравнений, а также была проведена оценка корреляционной размерности полученных векторных временных рядов. Результаты согласовались с теорией для обоих методов восстановления, однако метод численного дифференцирования занижал размерность по сравнению с методом задержек в следствии сглаживания зашумленных данных сигналов радиотехнической модели искусственных нейронов.

С использованием освоенных и запрограммированных методов исследовался вопрос о возможности выявления и различения тета- и дельта-ритмов активности у здоровых крыс линии Wistar по сигналам локальных потенциалов мозга (внутричерепных энцефалограмм) из двух отведений коры и двух отведений гиппокампа. Были проведены восстановление вектора состояния методом задержек и оценка корреляционной размерности по записям 9 животных, для которых в сумме было рассмотрено 128 эпизодов. Результаты оценки корреляционной размерности ритмов усреднялись для каждого отведения по всем особям крыс. В результате проведенной работы было выявлено, что дельта-ритм имеет в среднем большую корреляционную размерность, чем тета-ритм.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Pathophysiology of ageing, longevity and age related diseases / Alexander Bürkle, Graziella Caselli, Claudio Franceschi et al. // *Immunity & Ageing*. — 2007. — Vol. 4, no. 1. — P. 4.
2. Diagnosis of neurodegenerative diseases: the clinical approach / Manuel Gómez-Río, Manuel M Caballero, Juan Manuel Gorriz Saez, Adolfo Mínguez-Castellanos // *Current Alzheimer research*. — 2016. — Vol. 13, no. 5. — Pp. 469–474.
3. Measuring network disruption in neurodegenerative diseases: new approaches using signal analysis / Roisin McMackin, Muthuraman Muthuraman, Sergiu Groppa et al. // *Journal of Neurology, Neurosurgery & Psychiatry*. — 2019. — Vol. 90, no. 9. — Pp. 1011–1020.
4. *Buzsáki, György. Rhythms of the Brain / György Buzsáki. — Oxford university press, 2006.*
5. Dynamics of directional coupling underlying spike-wave discharges / M. V. Sysoeva, A. Lüttjohann, G. van Luijtelaar, I. V Sysoev // *Neuroscience*. — 2016. — Vol. 314. — Pp. 75–89.
6. A new method for automatic marking epileptic spike-wave discharges in local field potential signals / Sofia A. Startceva, Annika Lüettjohann, Илья V. Sysoev, Gilles Van Luijtelaar. — Vol. 9448. — 2014.
7. *Кузнецов, СП. Динамический хаос / СП Кузнецов. — Физико-математическая литература, 2001.*
8. *Grassberger, Peter. Characterization of Strange Attractors / Peter Grassberger, Itamar Procaccia // Phys. Rev. Lett. — 1983. — Jan. — Vol. 50. — Pp. 346–349.*
9. *Ланда С.П., Розенблюм М.Г. Сравнение методов конструирования фазового пространства и определения размерности аттрактора по экспериментальным данным / Розенблюм М.Г. Ланда С.П. // ЖТФ. — 1989. — no. 11. — Pp. 1–6.*
10. *Безручко, Б. П. Математическое моделирование и хаотические временные ряды / Б. П. Безручко, Д. А. Смирнов. — Саратов: ГОС УНЦ «Колледж», 2005.*

11. Geometry from a Time Series / N. H. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, R. S. Shaw // *Phys. Rev. Lett.* — 1980. — Sep. — Vol. 45. — Pp. 712–716.
12. *Theiler, James.* Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data / James Theiler // *Phys. Rev. A.* — 1986. — Sep. — Vol. 34. — Pp. 2427–2432.
13. *И.В., Сысоев.* Численные методы обработки сигналов в условиях помех / Сысоев И.В. — ООО Издательство «КУБиК», 2019.
14. *Н.Н., Калиткин.* Численные методы: учеб. пособие / Калиткин Н.Н. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
15. *Takens, Floris.* Detecting strange attractors in turbulence / Floris Takens // *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980* / Ed. by David Rand, Lai-Sang Young. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1981. — Pp. 366–381.
16. Identification of Phase-Locked Loop System From Its Experimental Time Series / Mikhail Mishchenko, Denis Bolshakov, Alexander Vasin et al. // *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs.* — 2021. — 01. — Vol. 69. — Pp. 1–1.
17. *Matrosov, V.* Neuron-like dynamics of a phase-locked loop / V. Matrosov, Mikhail Mishchenko, V. Shalfeev // *The European Physical Journal Special Topics.* — 2013. — 10. — Vol. 222.
18. *Suleymanova EM Shangaraeva VA, van Rijn CM Vinogradova LV.* The cannabinoid receptor agonist WIN55.212 reduces consequences of status epilepticus in rats / van Rijn CM Vinogradova LV Suleymanova EM, Shangaraeva VA // *Neuroscience.* — 2016. — Pp. 191–200.
19. *Грачев Д.Р., Сулейманова Е.М.* Фрактальная размерность тета- и дельта-ритмов сигналов локальных потенциалов коры и гиппокампа крыс / Сулейманова Е.М. Грачев Д.Р. // *Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2025 : Материалы XXXI Всероссийской научной конференции.* — 2025.