

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Влияние комбинированной связи на динамику автоколебательной системы
с двумя степенями свободы**
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4032 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
Института физики
Назина Игоря Максимовича

Научный руководитель
зав. кафедрой, д.ф.-м.н, доцент

_____ Г.И. Стрелкова

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н, доцент

_____ Г.И. Стрелкова

ВВЕДЕНИЕ

Автоколебательные системы выступают предметом исследования во множестве дисциплин — физике, химии, биологии и других. По своему устройству они различаются размерностью фазового пространства и, как следствие, уровнем сложности: простейшей формой служит генератор, чьей особой фазовой траекторией на плоскости является предельный цикл; более сложный случай — системы с бóльшим числом степеней свободы. Когда таких степеней две или больше, к собственным управляющим параметрам компонентов добавляется связь между ними. Она может различаться как по типу воздействия компонентов друг на друга, так и по физическому механизму, с помощью которого это взаимодействие реализуется. В радиофизическом контексте чаще всего используют емкостную, индуктивную, резистивную связь или их комбинации.

Именно связь между автогенератором и пассивными (либо активными) контурами порождает богатый спектр коллективных явлений: от взаимной синхронизации, захвата частот и конкуренции мод до возникновения мультистабильности, сложных режимов биений и динамического хаоса. Вместе с тем при исследовании систем с большим числом степеней свободы трудно дать однозначный ответ, какой именно фактор вызвал характерное изменение динамики. Поэтому, прежде чем переходить к сложным ансамблям связанных автогенераторов, необходимо детально изучить влияние связи на более простой модели. Простейшей классической автоколебательной системой с двумя степенями свободы является генератор ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром.

Традиционно исследования связанных генераторов сосредоточены на задачах синхронизации при фиксированном (чаще всего индуктивном или резистивном) типе связи. Однако сравнительный анализ бифуркационных механизмов и установившихся режимов в системе «генератор–контур» при переходе от консервативной связи к диссипативной или смешанной в рамках единой экспериментальной задачи часто остается за пределами детального

рассмотрения. Если роль емкостной и индуктивной связей между генератором ван дер Поля и дополнительным контуром исследована довольно подробно, то о влиянии резистивной (диссипативной или диффузионной) и, тем более, комбинированной связи известно гораздо меньше. Практическая значимость подобной задачи состоит в том, что изучение влияния различных типов связи на динамику многомодовых автоколебательных систем дает ключ к пониманию принципов управления сложными колебательными процессами.

В работе **предметом исследования** является двусторонняя комбинированная сложная связь, представленная в данном случае емкостной и диффузионной связями. **Объектом исследования** является автоколебательная система с двумя степенями свободы, представленная генератором ван дер Поля, взаимодействующим с линейным диссипативным осциллятором.

Целью выпускной квалификационной работы является исследование динамики автоколебательной системы с двумя степенями свободы и различных явлений, которые демонстрируются данной системой, при изменении управляющих параметров, а также коэффициентов диффузионной и емкостной связей и их линейных комбинаций.

Задачи работы. Исследование поведения системы при помощи построения карт режимов на плоскостях параметров, однопараметрических диаграмм, проекций фазовых портретов, перекрестных фазовых портретов, а также демонстрация различных типов зависимостей, если таковые будут иметься, при различных комбинациях емкостной и диффузионной связей.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Как было сказано ранее, в качестве исследуемой системы используется генератор ван дер Поля, взаимодействующий с линейным диссипативным осциллятором. Уравнение данной автоколебательной системы записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = (\varepsilon - x_1^2)\dot{x}_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \gamma_2(x_2 - x_1), \\ \ddot{x}_2 = -\alpha\dot{x}_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \gamma_2(x_1 - x_2), \end{cases} \quad (1)$$

где ε – управляющий параметр генератора, α – коэффициент диссипации контура, ω_1 и ω_2 – собственные частоты генератора и контура соответственно, а γ_1 и γ_2 – коэффициенты резистивной, она же диссипативная или диффузионная, и емкостной связей.

Для численного моделирования используется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1, \\ \dot{x}_2 = y_2, \\ \dot{y}_1 = (\varepsilon - x_1^2)y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma_1(y_2 - y_1) + \gamma_2(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_2 = -\alpha y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma_1(y_1 - y_2) + \gamma_2(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (2)$$

С целью проверки ряда предположений, выдвигаемых в ходе исследований, и обоснования корректности экспериментальных данных, выводится система укороченных уравнений для амплитуд и разности фаз с использованием метода медленно меняющихся комплексных амплитуд. Итоговая система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{\rho_1 \varepsilon}{2} - \frac{\rho_1^3}{8} + \frac{\gamma_1}{2} (\rho_2 \cos(\psi) - \rho_1) + \frac{\gamma_2 \rho_2}{2\omega} \sin(\psi), \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{\alpha \rho_2}{2} + \frac{\gamma_1}{2} (\rho_1 \cos(\psi) - \rho_2) - \frac{\gamma_2 \rho_1}{2\omega} \sin(\psi), \\ \dot{\psi} &= \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega} - \frac{\gamma_1}{2} \left[\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{\rho_1 \rho_2} \right] \sin(\psi) + \frac{\gamma_2}{2\omega} \left[\frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_1 \rho_2} \right] \cos(\psi). \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая близость собственных частот, частоту ω можно представить в виде полусуммы обеих собственных частот. Данная система может применяться

при численном методе исследования, и, в результате интегрирования, демонстрировать состояния равновесия, отличные от найденного аналитически. Эти самые устойчивые состояния равновесия будут соответствовать предельным циклам, наблюдаемым в исходной системе (1) и, аналогично, системе (2).

На первом этапе работы проводятся исследования динамики системы (1) при *емкостной связи*. На рисунке 1 представлена карта режимов на плоскости параметров (ω_2, ε) при фиксированной силе связи $\gamma_2 = 0.2$. Каждая из обозначенных на карте областей соответствует определенной динамике системы: в областях *I*, *II* и *III* наблюдаются устойчивые предельные циклы, в области *IV* – устойчивое состояние равновесия.

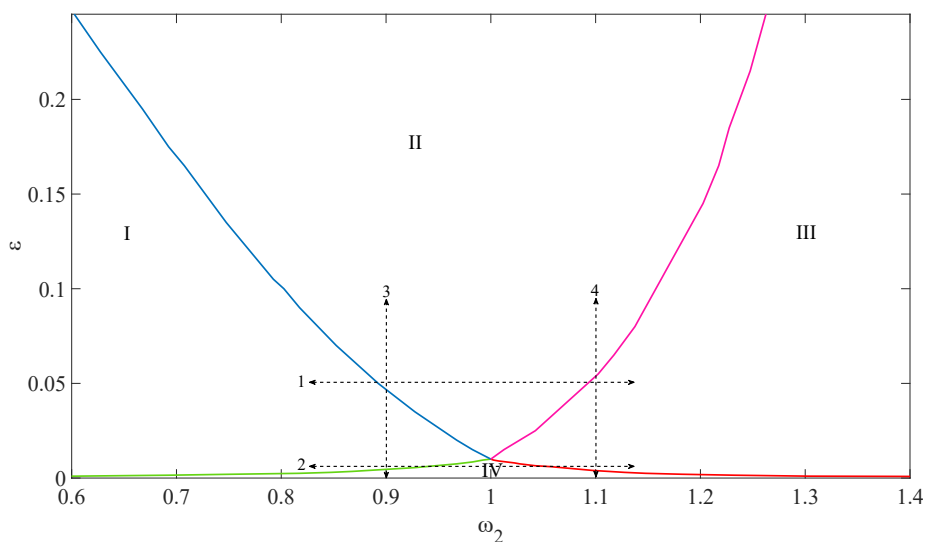


Рисунок 1 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, ε) при значении управляющих параметров $\alpha = 0.01$, $\gamma_2 = 0.2$. Область *I* соответствует существованию в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла C_1 , соответствующего противофазным колебаниям в генераторе и контуре, область *III* – существованию устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре, область *II* – области сосуществования предельных циклов C_1 и C_2 , а область *IV* – существованию устойчивого состояния равновесия, соответствующего отсутствию колебаний в системе.

При движении вдоль *линии 1*, показанной на рисунке 1, из области *I* (с наследованием начальных условий) сначала наблюдается цикл C_1 , соответствующий противофазным колебаниям. При изменении собственной частоты контура ω_2 и при пересечении линии раздела областей *I* и *II* динамика

системы не претерпевает характерных изменений вплоть до линии раздела областей *II* и *III*. Однако при попадании в область *III* предельный цикл C_1 теряет свою устойчивость, а фазовая траектория стягивается на устойчивый предельный цикл C_2 , отвечающий синфазным колебаниям.

На рисунке 2 представлена карта режимов на плоскости (ω_2, γ_2) при фиксированном значении параметра возбуждения генератора ван дер Поля. В данном случае существует лишь три области и все они эквивалентны областям, найденным на плоскости параметров (ω_2, ε) , имеющим те же номера. Видно, что с ростом коэффициента связи расширяется и область бистабильности. Если же наоборот идти в сторону уменьшения γ_2 , то область сосуществования синфазных и противофазных колебаний будет сужаться пока, в конечном итоге, не сольётся в одну точку $\gamma_2 \approx \alpha = 0.01$ при значении $\omega_2 = 1$. Ниже же области *I* и *III* разделяются прямой $\omega_2 = 1$, отображенной на плоскости параметров фиолетовым цветом.

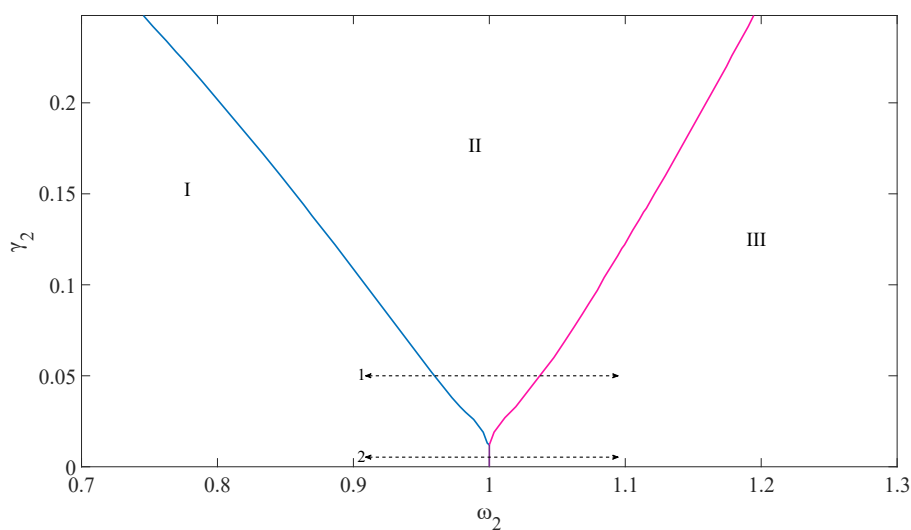


Рисунок 2 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, γ_2) при значении управляющих параметров $\alpha = 0.01$, $\varepsilon = 0.1$. Область *I* соответствует существованию в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла C_1 , соответствующего противофазным колебаниям в генераторе и контуре, область *III* – существованию устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре, область *II* – области сосуществования предельных циклов C_1 и C_2 .

Перейдем к рассмотрению системы при наличии в ней исключительно *диффузионной* связи. Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, ε)

приведена на рисунке 3. В системе в зависимости от значений ω_2 и ε может наблюдаться лишь 2 характерных типа динамики.

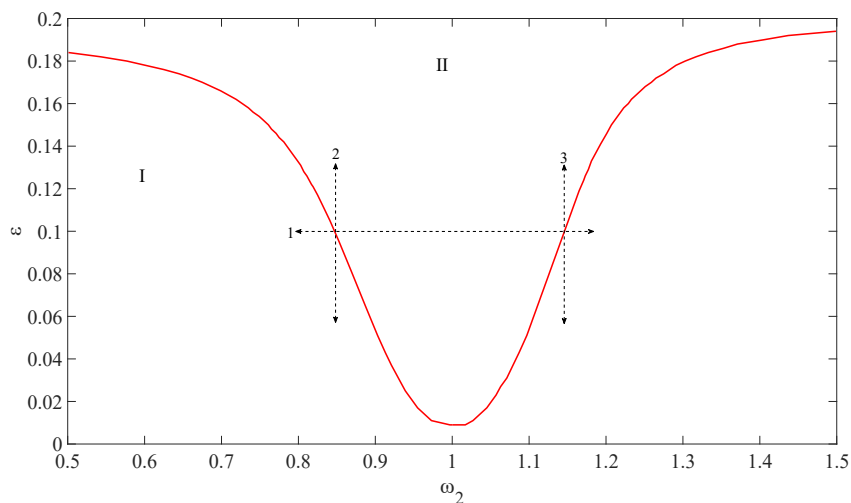


Рисунок 3 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, ε) при значении коэффициента диссипации контура $\alpha = 0.01$ и коэффициента диффузионной связи $\gamma_1 = 0.2$. Область *I* соответствует существованию в фазовом пространстве устойчивого состояния равновесия, область *II* – существованию устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре.

Как видно, вблизи $\omega_2 = 1$ линия раздела представляет собой почти симметричную квадратичную функцию с минимумом, находящимся в точке $\omega_2 = 1$ со значением $\varepsilon \approx \alpha$. В области *I* на рисунке 3 существует устойчивое состояние равновесия, а в области *II* – устойчивый синфазный цикл C_2 .

Зафиксируем значение $\varepsilon = 0.1$ и коэффициент диссипации контура $\alpha = 0.01$ и построим карту режимов на плоскости (ω_2, γ_1) (см. рисунок 4). Область *I* соответствует существованию устойчивого цикла C_2 , а в областях *II* и *III* наблюдается устойчивое состояние равновесия.

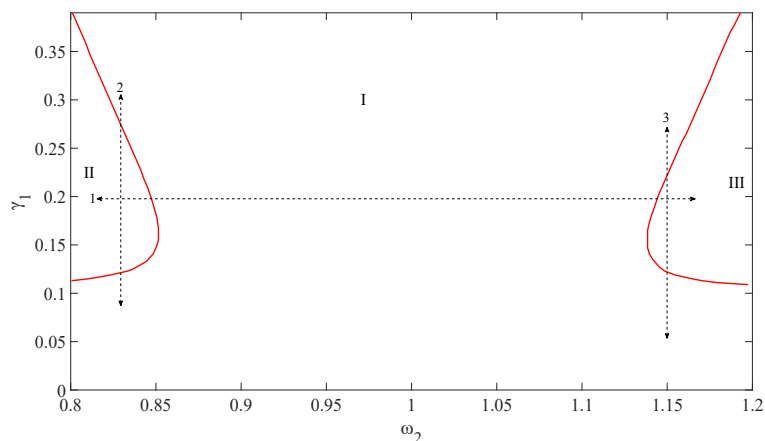


Рисунок 4 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, γ_1) при значении параметров системы $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.01$. Области *I* соответствует существованию в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре, а области *II* и *III* – существованию устойчивого состояния равновесия.

Перейдем к рассмотрению влияния *комбинированной связи*. Для проведения данного исследования за основу берется динамика системы при емкостной связи и меняется значение коэффициента диффузионной связи γ_1 . На рисунке 5 представлена карта режимов на плоскости параметров (ω_2, γ_2) для $\gamma_1 = 0.005$. Областям *I* и *III* в фазовом пространстве соответствуют устойчивые предельные циклы C_1 и C_2 соответственно, а области *II* – их сосуществованию. При сравнении рисунков 1 и 5 видно, что с появлением диффузионной связи область бистабильности уменьшилась.

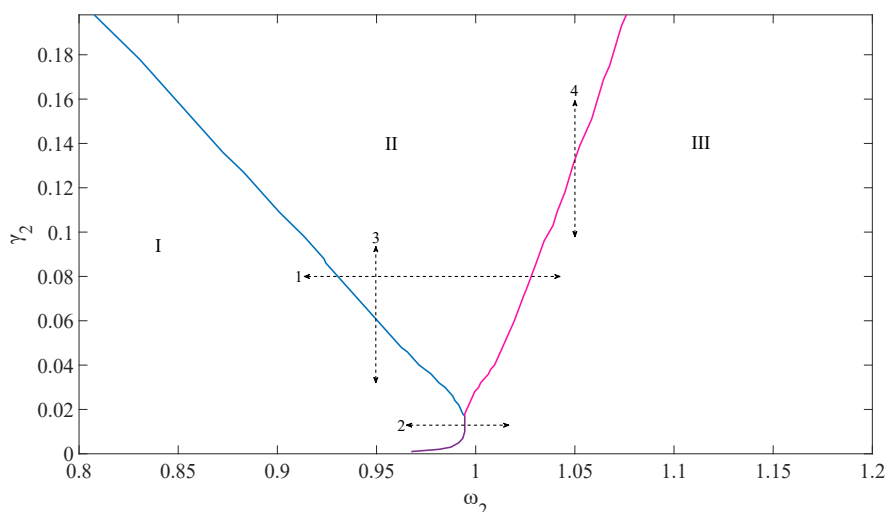


Рисунок 5 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, γ_2) при значении управляющих параметров $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.01$ и значении коэффициента диффузионной связи $\gamma_1 = 0.005$. Область *I* соответствует существованию в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла C_1 , соответствующего противофазным колебаниям в генераторе и контуре, область *III* – существованию устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре, область *II* – области сосуществования предельных циклов C_1 и C_2 .

Увеличим γ_1 до значения 0.05 и обратимся к рисунку 6, на котором представлена карта режимов при данном значении коэффициента диффузионной связи. Смена цвета линий раздела областей говорит о том, что в системе произошли характерные изменения, а конкретнее область *II* перестала быть областью бистабильности. Теперь данным номером обозначена область существования устойчивого состояния равновесия.

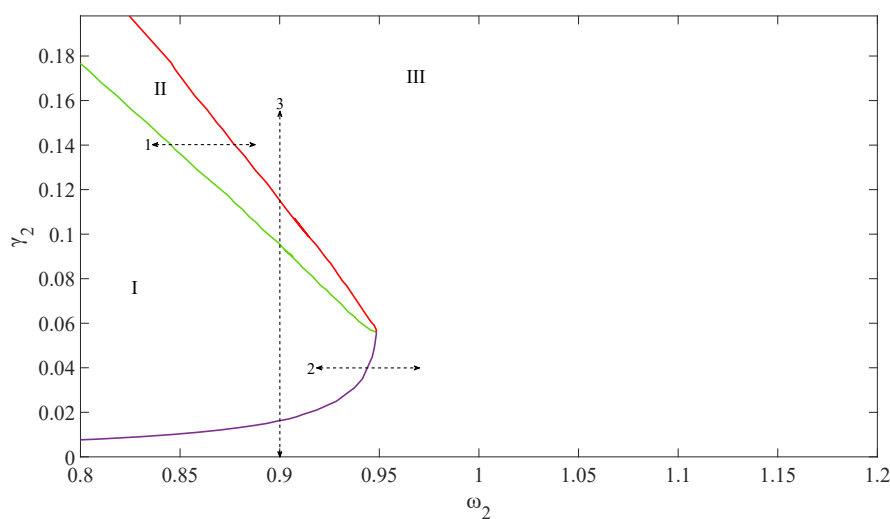


Рисунок 6 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, γ_2) при значении управляющих параметров $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.01$ и значении коэффициента диффузионной связи $\gamma_1 = 0.05$. Область *I* соответствует существованию в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла C_1 , соответствующего противофазным колебаниям в генераторе и контуре, область *III* – существованию устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре, область *II* – области существования устойчивого состояния равновесия.

Дальнейшее увеличение коэффициента диффузионной связи γ_1 в результате приведет к увеличению области *II* на рисунке 6, которая соответствует существованию устойчивого состояния равновесия. Все численные расчеты и наблюдения подтверждены при помощи построения карт устойчивости состояния равновесия, определяемой методом Рауса-Гурвица.

Как видно из рисунка 7 в системе будет наблюдаться лишь 2 области с характерной динамикой, а противофазные колебания и вовсе перестанут наблюдаться. Однако при повышении коэффициента диффузионной связи γ_1 вновь будет наблюдаться изменение карт режимов, что продемонстрировано на рисунке 8. Явно видно, что в данном случае область существования устойчивого предельного цикла C_2 будет ограничена областями, в которых будет наблюдаться лишь устойчивое состояние равновесия, что похоже на карту режимов, наблюдаемую на плоскости параметров (ω_2, γ_1) при $\varepsilon > \alpha$. Однако в отличие от последнего случая, здесь демпферные области будут наблюдаться при любых малых значениях γ_2 .

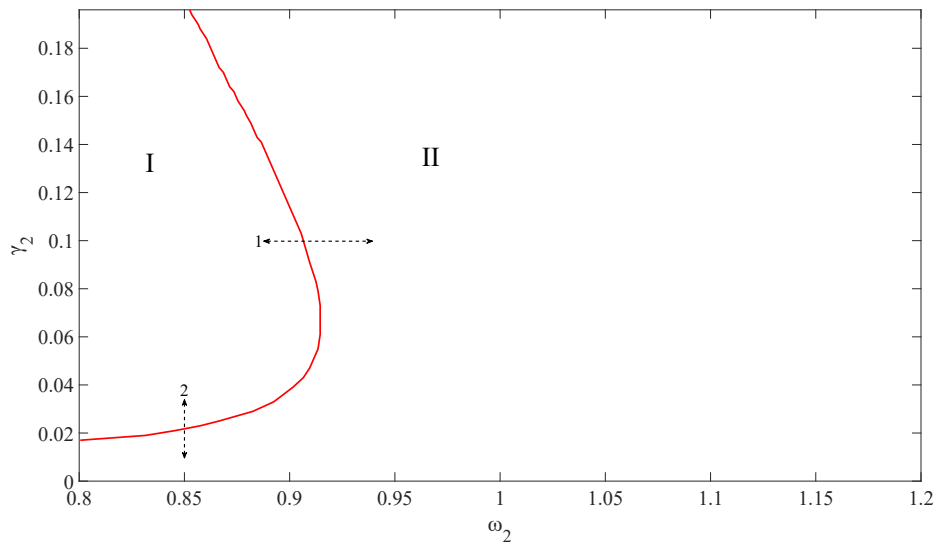


Рисунок 7 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, γ_2) при значении управляющих параметров $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.01$ и значении коэффициента диффузионной связи $\gamma_1 = 0.1$. Область *I* соответствует существованию в фазовом пространстве устойчивого состояния равновесия, область *II* – существованию устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре.

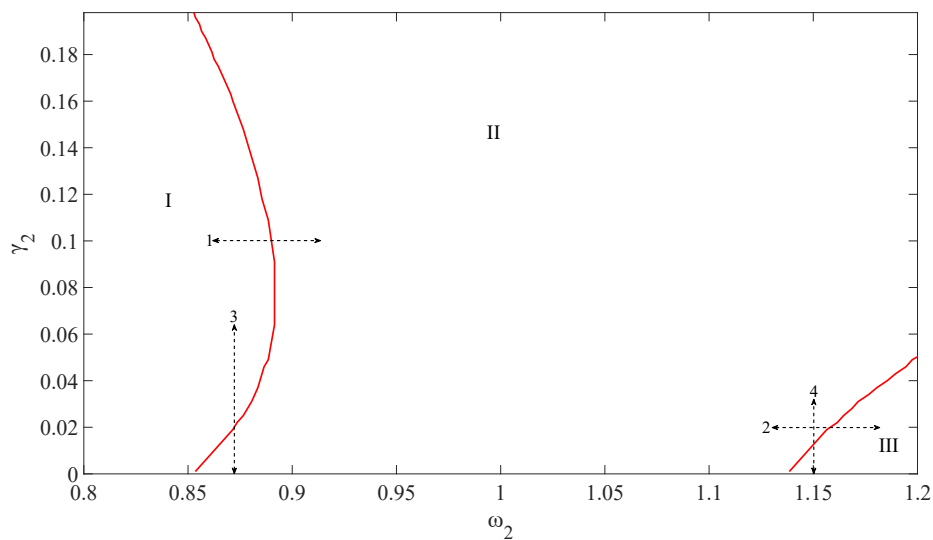


Рисунок 8 - Карта режимов на плоскости параметров (ω_2, γ_2) при значении управляющих параметров $\varepsilon = 0.1$ и $\alpha = 0.01$ и значении коэффициента диффузионной связи $\gamma_1 = 0.15$. Области *I* и *III* соответствуют существованию в фазовом пространстве устойчивого состояния равновесия, область *II* – существованию устойчивого предельного цикла C_2 , соответствующего синфазным колебаниям в генераторе и контуре.

Если же продолжить повышать значение γ_1 , то области *I* и *III* будут несколько менять свой вид, но сама карта режимов перестанет претерпевать характерных изменений. Стоит также отметить, что все области, в которых существовало устойчивое состояние равновесия, совпали с областями устойчивости состояния равновесия, найденными аналитически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы было проведено исследование классической автоколебательной системы с двумя степенями свободы при различных типах связи. Большая часть данных исследований проводилась при помощи численного метода, описанного ранее. Рассматривая систему при наличии в ней исключительно емкостной двухсторонней связи, было установлено, что в зависимости от выбора значений параметров системы в фазовом пространстве может наблюдаться 4 типа характерной динамики системы. Было рассмотрено влияние изменения значений параметров на внешний вид областей, соответствующих каждому типу динамики. Также был зафиксирован переход от синфазных колебаний к противофазным в генераторе ван дер Поля и контуре при варьировании собственной частоты последнего, происходящий через поворот фазового портрета в фазовом пространстве, что соответствует плавному изменению разности фаз колебаний. Причем данный тип смены одного типа динамики на другой был подтвержден при помощи укороченных уравнений, представленных системой (3), полученных аналитически. Самой интересной и важной для рассмотрения являлась область мультистабильности, которая возникала при значениях ε и γ_2 больше, чем коэффициент диссипации контура.

В ходе исследования системы при наличии в ней лишь двусторонней диффузионной связи, было установлено, что в данном случае в зависимости от выбранных параметров в системе могут существовать либо синфазные колебания, либо их отсутствие, что соответствует устойчивому состоянию равновесия в фазовом пространстве. Не смотря на, казалось бы, менее интересный случай относительно системы с емкостной связью, в ходе исследования были выявлены различия в поведении синфазных колебаний в системе при варьировании параметров, а также сам характер линий раздела областей на плоскостях параметров также абсолютно отличается от емкостной связи.

Разумеется, основной задачей было рассмотрение системы уравнений (2) без её упрощений, т.е. рассмотрение влияния комбинированной связи на режимы динамики, наблюдаемые в системе. В ходе данного исследования было выявлено, что диффузионная связь превалирует над емкостной и режимы динамики, наблюдаемые в системе, будут первоначально зависеть от значения коэффициента связи γ_1 . В том числе был описан характер эволюции областей карт режимов, происходящий при повышении значения γ_1 , при значении управляющего параметра генератора ван дер Поля и коэффициента диссипации контура, выбранных таким образом, чтобы системой демонстрировались наиболее интересные и сложные типы динамики и переходы между ними.

Все результаты, представленные в исследовании, могут использоваться во всех работах, которые будут содержать в себе данную автоколебательную систему с двумя степенями свободы. Само же исследование носит общий характер, поскольку ограничение по допустимым областям применяться может лишь в конкретных частных случаях. Также в ходе работы была сделана программа, содержащая в себе численное интегрирование систем уравнений (3) и (2), визуализацию в реальном времени проекции фазовых портретов последней, а также проверку устойчивости состояния равновесия методом Рауса-Гурвица на языке программирования LabVIEW. Данную программу можно использовать в качестве лабораторного спецпрактикума.