

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Вынужденная синхронизация генератора
ван дер Поля -Матье -Дуффинга**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 4032 группы
направления 03.03.03 Радиофизика
Института физики
Рубцова Василия Олеговича

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

_____ А.В. Слепнев

Зав. кафедрой радиофизики

и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент

_____ Г. И. Стрелкова

Саратов 2026 г.

ВВЕДЕНИЕ

Синхронизация является одним из ключевых явлений нелинейной динамики. Она проявляется в согласовании ритмов взаимодействующих систем или в подстройке автоколебательной системы под внешнее периодическое воздействие. Такие процессы наблюдаются в радиофизике, электронике, биологии, химических реакциях, лазерных системах и других областях. Поэтому исследование синхронизации имеет как фундаментальное, так и прикладное значение.

Классическим объектом теории нелинейных колебаний является генератор Ван дер Поля. Он описывает автоколебательную систему, в которой нелинейное трение обеспечивает рост малых колебаний и ограничение больших амплитуд. При внешнем гармоническом воздействии такой генератор может переходить в режим вынужденной синхронизации, когда средняя частота его колебаний совпадает с частотой внешнего сигнала.

Важным способом описания вынужденной синхронизации являются области захвата на плоскости параметров «амплитуда — частота воздействия». Эти области называют языками Арнольда. Внутри языка Арнольда реализуется синхронный режим, вне него возможны квазипериодические или более сложные режимы движения. Форма, положение и ширина языков синхронизации зависят от параметров генератора и от характера нелинейностей.

В настоящей работе рассматривается не только базовый генератор Ван дер Поля, но и его обобщения: генератор Ван дер Поля — Матье, генератор Ван дер Поля — Дуффинга и генератор Ван дер Поля — Матье — Дуффинга. Эти модели позволяют последовательно учесть параметрическую модуляцию и кубическую нелинейность жёсткости. Совместное действие нелинейного трения, параметрического возбуждения и нелинейной жёсткости усложняет структуру режимов и влияет на области вынужденной синхронизации.

Актуальность работы связана с необходимостью изучения механизмов синхронизации нелинейных автогенераторов при одновременном действии нескольких факторов: внешнего гармонического воздействия, параметрической модуляции и кубической нелинейности. Такие модели важны для анализа нелинейных радиотехнических и электронных систем, а также для учебного и методического описания эффектов синхронизации.

Степень разработанности темы. Синхронизация генератора Ван дер Поля хорошо изучена в классической теории нелинейных колебаний. Для сла-

бой нелинейности и малого внешнего воздействия известны аналитические приближения, позволяющие описывать границы основной области захвата. Осциллятор Дуффинга и генератор Ван дер Поля — Дуффинга также подробно рассмотрены в литературе: известно, что кубическая нелинейность приводит к зависимости собственной частоты от амплитуды и тем самым смещает резонансные области. Генератор Ван дер Поля — Матье позволяет исследовать влияние параметрической модуляции и параметрических резонансов. Однако совместное влияние параметрической модуляции и кубической нелинейности на структуру областей вынужденной синхронизации требует отдельного численного анализа.

Объектом исследования является генератор Ван дер Поля — Матье — Дуффинга с внешним гармоническим воздействием, описываемый системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y + (\rho \sin(\omega_1 t) - 1)x - \beta x^3 + b \sin(\omega t), \end{cases} \quad (1)$$

где x — обобщённая координата, y — обобщённая скорость, μ — параметр нелинейного трения, ρ — глубина параметрической модуляции, ω_1 — частота параметрической модуляции, β — коэффициент кубической нелинейности, b — амплитуда внешнего гармонического воздействия, ω — его частота.

При $\rho = 0$ и $\beta = 0$ система сводится к генератору Ван дер Поля. При $\beta = 0$ она описывает генератор Ван дер Поля — Матье. При $\rho = 0$ получается генератор Ван дер Поля — Дуффинга. Поэтому редуцированные модели являются частными случаями исследуемой системы.

Предметом исследования служит структура областей вынужденной синхронизации, то есть языков Арнольда, на плоскости параметров (b, ω) , а также изменение этих областей при варьировании параметров μ, ρ, ω_1 и β .

Целью работы является выявление особенностей синхронизации генератора Ван дер Поля — Матье — Дуффинга внешним гармоническим воздействием.

Для достижения цели были поставлены следующие **задачи**:

а) Изучить автономную динамику генераторов Ван дер Поля, Ван дер Поля — Матье, Ван дер Поля — Дуффинга и Ван дер Поля — Матье — Дуффинга.

б) Исследовать вынужденную синхронизацию указанных генераторов внешним гармоническим воздействием.

в) Провести сравнительный анализ динамики генератора Ван дер Поля — Матье — Дуффинга под внешним воздействием с динамикой его частных случаев.

Методы исследования. В работе использовались численные методы анализа систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование проводилось методом Рунге — Кутты 4-го порядка. Для диагностики автономных режимов применялся расчёт показателей Ляпунова по алгоритму Бенеттина. Вынужденная синхронизация определялась по совпадению средней частоты генератора с частотой внешнего воздействия.

Для исключения влияния переходных процессов анализ проводился на установившихся участках траекторий. При построении карт режимов параметры изменялись на равномерных сетках, а в каждой точке сетки вычислялся диагностический критерий. Такой подход позволил сопоставить качественные признаки движения, наблюдаемые на фазовых портретах и в амплитудных спектрах, с количественными признаками синхронизации.

Практическая значимость работы состоит в том, что полученные результаты могут использоваться при анализе и проектировании нелинейных автогенераторов в радиотехнике и электронике, а также как иллюстративный материал при изучении нелинейной динамики и теории синхронизации.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух разделов, заключения и списка использованных источников. В первом разделе рассматривается автономная динамика исследуемых генераторов. Во втором разделе изучается их вынужденная синхронизация внешним гармоническим воздействием.

Основное содержание работы

В первом разделе исследована автономная динамика четырёх моделей: генератора Ван дер Поля, генератора Ван дер Поля — Матье, генератора Ван дер Поля — Дуффинга и генератора Ван дер Поля — Матье — Дуффинга.

Базовая модель Ван дер Поля описывается системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x. \end{cases} \quad (2)$$

Параметр μ определяет характер колебаний. При $\mu < 0$ траектории сходятся к устойчивому фокусу. При $\mu > 0$ формируется устойчивый предельный цикл. При малых положительных значениях μ колебания близки к гармоническим, а при больших значениях переходят к релаксационному режиму. Расчёт спектра показателей Ляпунова подтверждает эту картину: для предельного цикла старший показатель близок к нулю, а второй показатель отрицателен.

Для генератора Ван дер Поля — Матье учитывается параметрическая модуляция:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y + (\rho \sin(\omega_1 t) - 1)x. \end{cases} \quad (3)$$

Для анализа этой системы построены карты режимов на плоскости параметров (ω_1, ρ) . Режимы классифицировались по сигнатурам спектра показателей Ляпунова. Было показано, что параметрическая модуляция приводит к появлению периодических, квазипериодических и хаотических режимов. Фазовые портреты подтверждают классификацию, полученную по показателям Ляпунова.

Генератор Ван дер Поля — Дуффинга описывается системой:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x - \beta x^3. \end{cases} \quad (4)$$

Кубическая нелинейность β изменяет форму предельного цикла и собственную частоту автоколебаний. При $\beta > 0$ нелинейная жёсткость является «жёсткой», поэтому эффективная частота генератора возрастает. Это обстоятельство становится существенным при анализе вынужденной синхронизации, поскольку положение языка Арнольда определяется собственной частотой системы.

Для автономного генератора Ван дер Поля — Матъе — Дуффинга исследовалась система:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y + (\rho \sin(\omega_1 t) - 1)x - \beta x^3. \end{cases} \quad (5)$$

Построенные карты режимов показывают, что совместное действие параметрической модуляции и кубической нелинейности усложняет структуру автономной динамики. При $\mu = 0.1$ наблюдаются периодические, квазипериодические и хаотические режимы. При $\mu = 3$ система демонстрирует режимы, характерные для релаксационных колебаний, причём влияние параметрической модуляции проявляется иначе, чем в квазигармоническом случае.

На рисунках 1 и 2 приведены карты режимов автономного генератора Ван дер Поля — Матъе — Дуффинга при фиксированном значении $\beta = 0.5$.

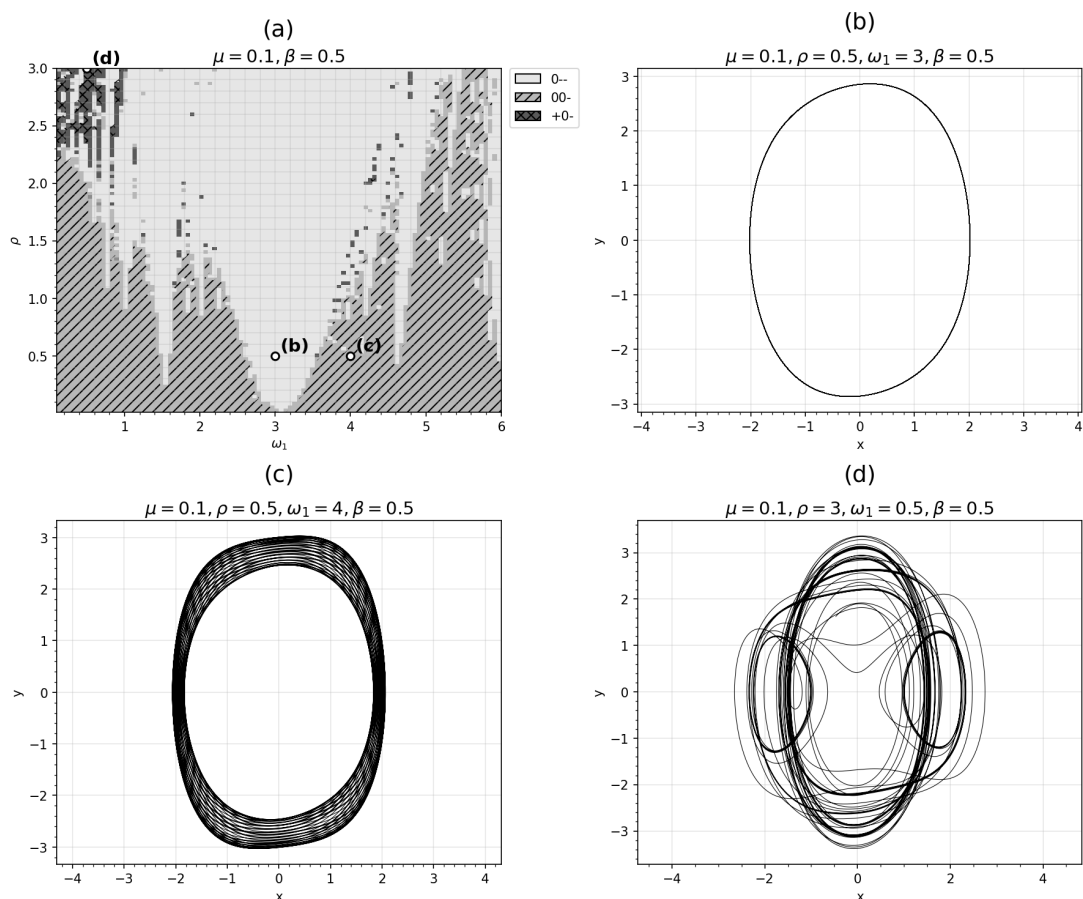


Рисунок 1 — Автономная динамика генератора Ван дер Поля — Матъе — Дуффинга при $\mu = 0.1, \beta = 0.5$: карта режимов на плоскости (ω_1, ρ) и фазовые портреты в выбранных точках

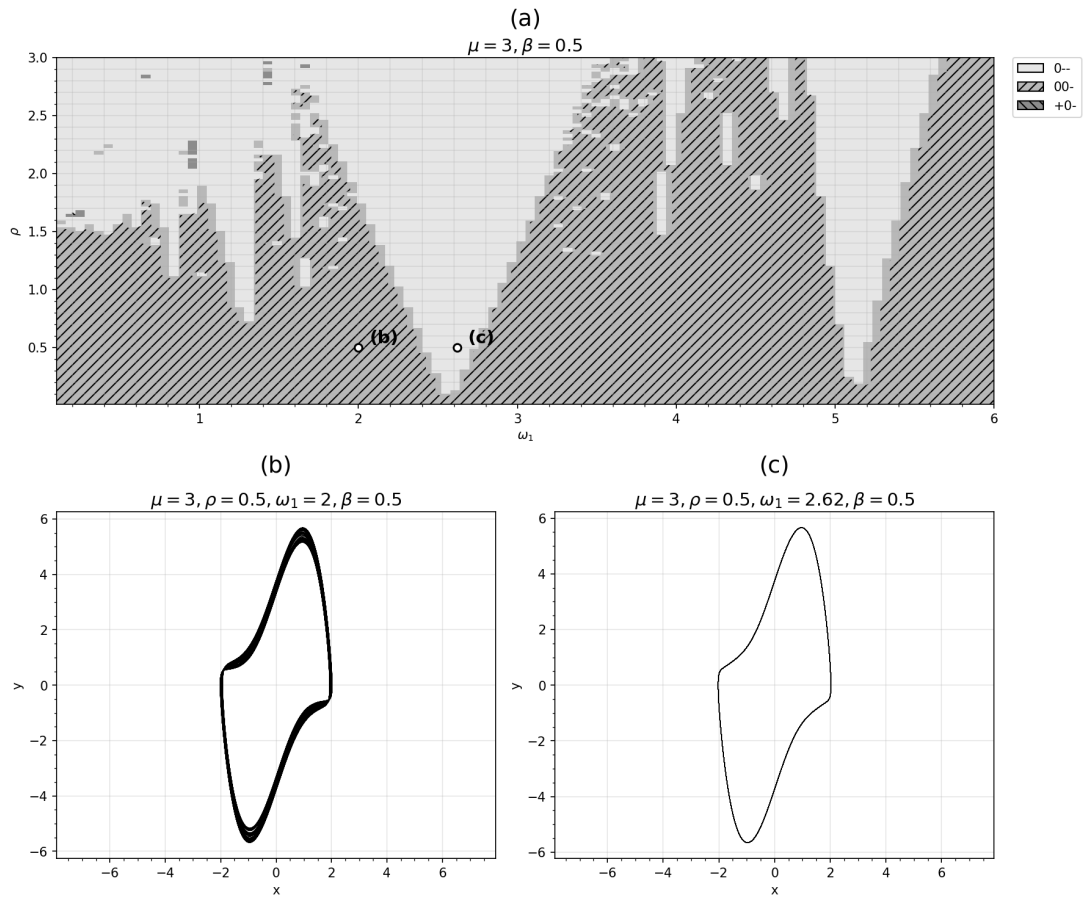


Рисунок 2 — Автономная динамика генератора Ван дер Поля — Матье — Дуффинга при $\mu = 3, \beta = 0.5$: карта режимов на плоскости (ω_1, ρ) и фазовые портреты в выбранных точках

Во втором разделе исследована вынужденная синхронизация. Основным критерием синхронизации выбрано совпадение средней частоты генератора ω_{avg} с частотой внешнего воздействия ω . Фаза вычислялась по переменным x и y :

$$\varphi_{\text{raw}} = \text{atan2}(-y, x), \quad (6)$$

после чего выполнялась развёртка фазы. Средняя частота определялась по приращению развёрнутой фазы на установившемся участке:

$$\omega_{\text{avg}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \quad (7)$$

Рассогласование частот задавалось выражением:

$$\Omega = \omega_{\text{avg}} - \omega. \quad (8)$$

Если $\Omega \approx 0$, режим считался синхронным. Карты синхронизации строились на плоскости параметров (b, ω) .

Дополнительно для выбранных точек плоскости параметров строились фазовые портреты и амплитудные спектры. Это позволило сравнить поведение системы внутри области синхронизации и вне неё. В синхронном режиме движение становится согласованным с внешним воздействием, а в спектре выделяется частота внешней силы. В несинхронных режимах сохраняется рассогласование частот, что отражается в изменении формы фазового портрета и спектрального состава сигнала.

Для генератора Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \mu(1 - x^2)y - x + b \sin(\omega t), \end{cases} \quad (9)$$

получена классическая область захвата. При малых μ и b численная граница области синхронизации согласуется с аналитическим выражением:

$$b = 2|\omega^2 - 1|. \quad (10)$$

При $\mu = 0.1$ язык синхронизации имеет клинообразную форму и расположен вблизи собственной частоты генератора. При $\mu = 3$ центр языка смещается в сторону меньших частот, что связано с изменением собственной частоты релаксационных колебаний.

Для генератора Ван дер Поля — Матъе с внешним воздействием показано, что параметрическая модуляция влияет на области синхронизации по-разному в квазигармоническом и релаксационном режимах. При $\mu = 0.1$ параметрический резонанс может подавлять синхронизацию и деформировать язык захвата. При $\mu = 3$ влияние параметрической модуляции на синхронизацию оказывается менее выраженным.

В квазигармоническом режиме генератор чувствительнее к изменению параметров модуляции, поскольку собственные колебания близки к гармоническим и легче перестраиваются под внешние и параметрические воздействия. В релаксационном режиме форма колебаний существенно отличается от синусоидальной, а движение определяется чередованием медленных участков и быстрых переходов. Поэтому параметрическая модуляция не приводит к столь сильному разрушению области захвата.

Для генератора Ван дер Поля — Дуффинга установлено, что увеличение параметра β смещает центр области синхронизации вправо по оси частоты внешнего воздействия. Это соответствует росту эффективной собственной частоты генератора при положительной кубической нелинейности. При $\mu = 3$ смещение и изменение формы области захвата выражены сильнее, чем при $\mu = 0.1$.

Такое поведение согласуется с физическим смыслом нелинейной жёсткости. При положительном коэффициенте β восстанавливающая сила увеличивается быстрее, чем в линейном осцилляторе. В результате частота автоколебаний становится выше, и для захвата требуется воздействие с большей частотой. Поэтому язык синхронизации меняет не только положение, но и форму.

Для полной модели Ван дер Поля — Матье — Дуффинга были построены карты областей синхронизации при различных значениях μ , ρ , β и ω_1 . В квазигармоническом режиме совместное действие параметрической модуляции и кубической нелинейности приводит к более заметному нарушению синхронизации. В релаксационном режиме области синхронизации сохраняются устойчивее, хотя их форма и положение также зависят от параметров системы.

На рисунках 3 и 4 показаны карты вынужденной синхронизации полной модели Ван дер Поля — Матье — Дуффинга, фазовые портреты и амплитудные спектры в выбранных точках.

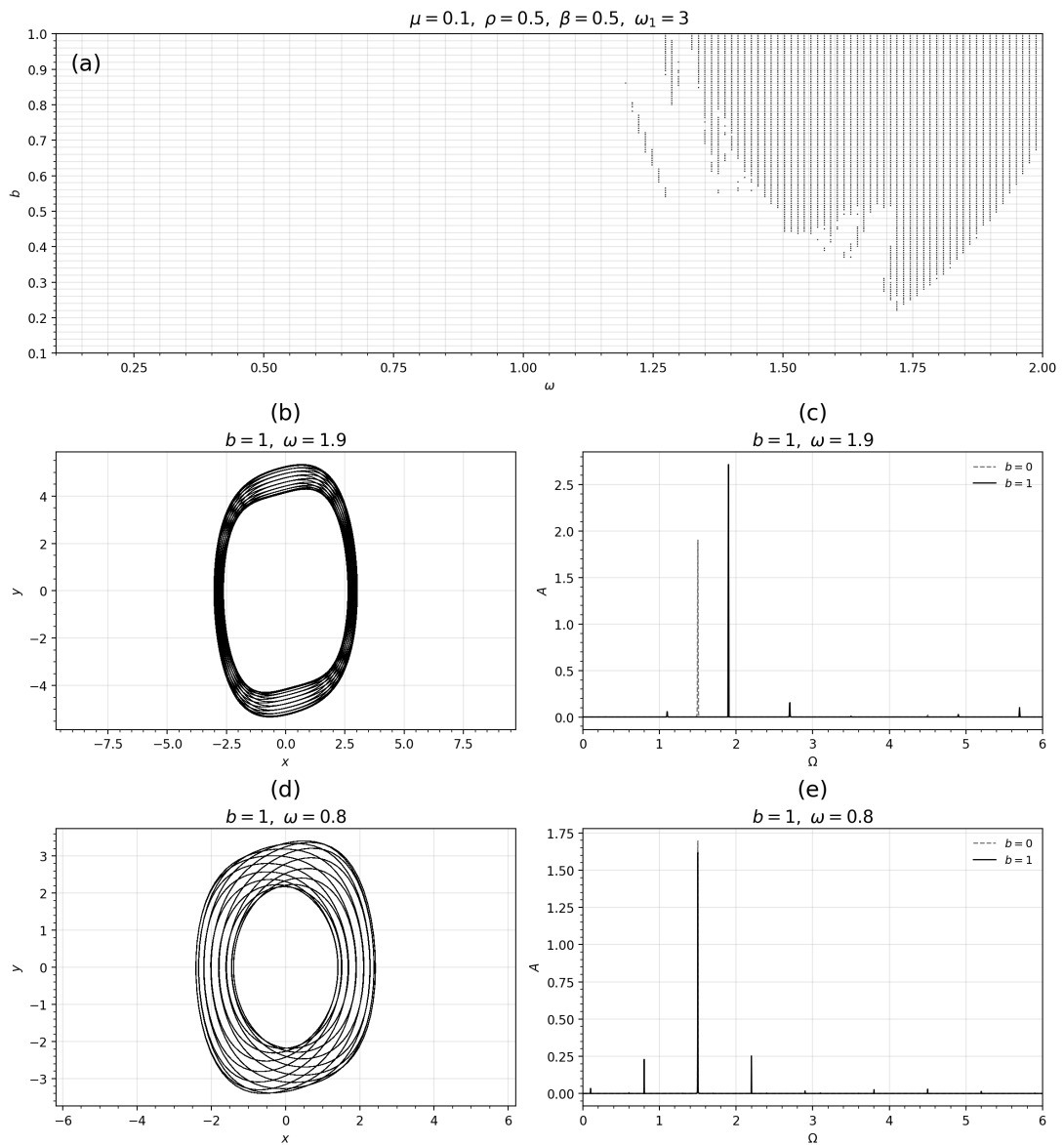


Рисунок 3 — Вынужденная синхронизация генератора Ван дер Поля — Матье — Дуффинга при $\mu = 0.1, \rho = 0.5, \beta = 0.5, \omega_1 = 3$: карта области синхронизации, фазовые портреты и амплитудные спектры

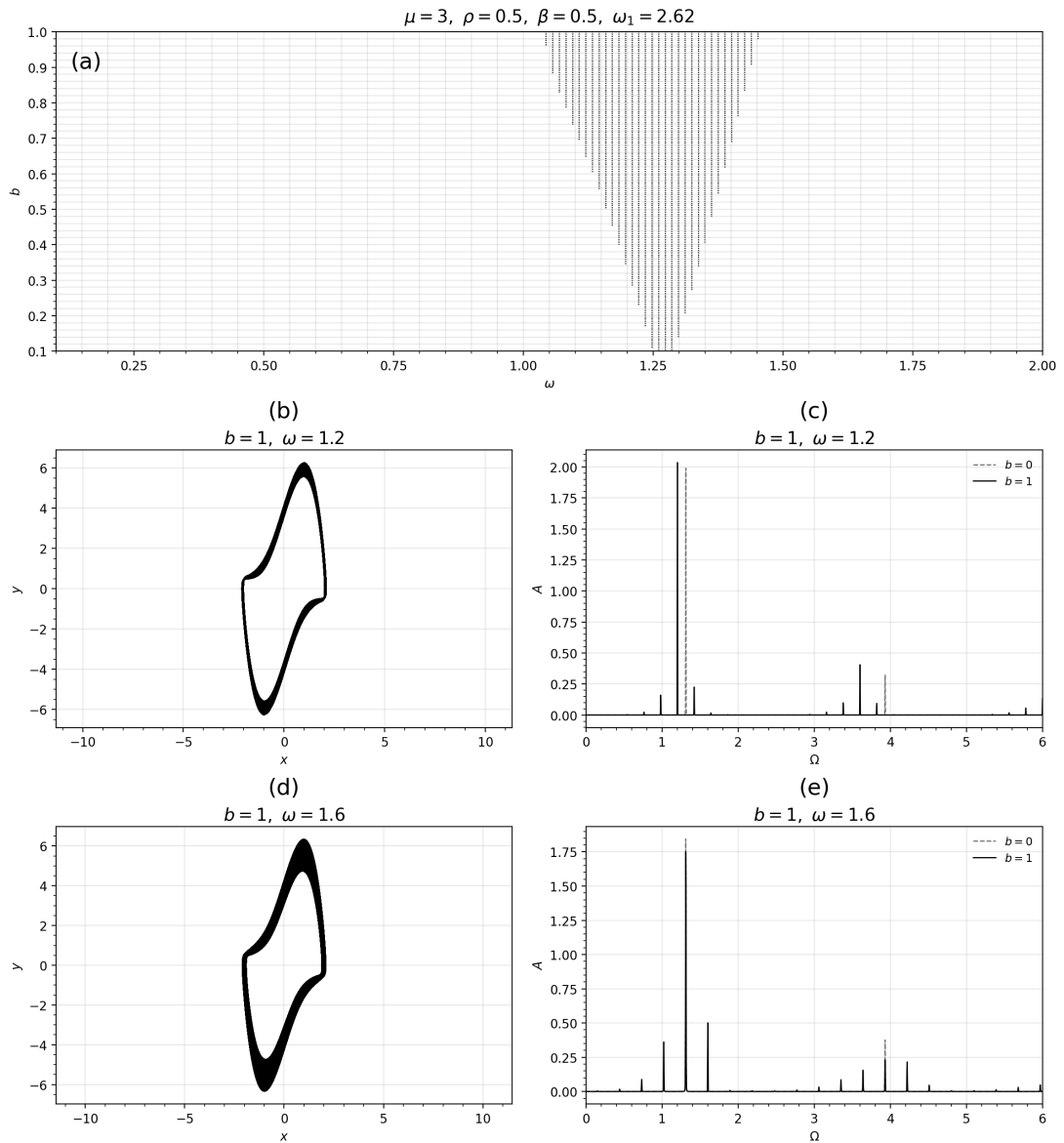


Рисунок 4 — Вынужденная синхронизация генератора Ван дер Поля — Матье — Дуффинга при $\mu = 3, \rho = 0.5, \beta = 0.5, \omega_1 = 2.62$: карта области синхронизации, фазовые портреты и амплитудные спектры

Сравнение всех моделей показывает, что каждый добавленный механизм изменяет картину синхронизации. Нелинейное трение задаёт автоколебательный режим и переход от квазигармонических к релаксационным колебаниям. Параметрическая модуляция создаёт дополнительные режимы автономной динамики и может подавлять захват частоты. Кубическая нелинейность меняет эффективную частоту генератора и смещает языки Арнольда. В полной модели эти эффекты действуют совместно, поэтому структура областей синхронизации становится наиболее сложной.

Заключение

В выпускной квалификационной работе исследована автономная динамика и вынужденная синхронизация генераторов Ван дер Поля, Ван дер Поля — Матье, Ван дер Поля — Дуффинга и Ван дер Поля — Матье — Дуффинга.

В автономном режиме показано, что генератор Ван дер Поля при $\mu < 0$ имеет устойчивый фокус, а при $\mu > 0$ — устойчивый предельный цикл. Увеличение μ переводит систему от квазигармонических колебаний к релаксационным. Для генератора Ван дер Поля — Матье параметрическая модуляция приводит к появлению периодических, квазипериодических и хаотических режимов. Для генератора Ван дер Поля — Дуффинга кубическая нелинейность деформирует предельный цикл и изменяет собственную частоту. В полной модели Ван дер Поля — Матье — Дуффинга совместное действие параметрической модуляции и кубической нелинейности усложняет структуру режимов.

При исследовании вынужденной синхронизации построены карты областей захвата на плоскости параметров (b, ω) . Для генератора Ван дер Поля при малых значениях μ и b численные результаты согласуются с аналитической границей основной области синхронизации. Для генератора Ван дер Поля — Матье установлено, что параметрический резонанс подавляет синхронизацию в квазигармоническом режиме и слабее влияет на неё в релаксационном режиме. Для генератора Ван дер Поля — Дуффинга показано, что увеличение β смещает центр языка синхронизации в сторону больших частот. Для генератора Ван дер Поля — Матье — Дуффинга выявлено, что в квазигармоническом режиме синхронизация нарушается сильнее, чем в релаксационном.

Полученные результаты демонстрируют, что форма и положение языков Арнольда существенно зависят от параметров нелинейного трения, параметрической модуляции и кубической нелинейности. Работа подтверждает, что полная модель Ван дер Поля — Матье — Дуффинга является удобным объектом для сравнительного анализа механизмов вынужденной синхронизации в нелинейных автоколебательных системах.

Результаты также показывают, какие параметры сильнее всего меняют устойчивость синхронного режима в расчётной модели.