

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Синхронизация пространственно-временных структур
в многослойных сетях с неоднородными
и динамическими межслойными связями**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2232 группы
направления 03.04.03 Радиофизика
Института физики
Аверьянова Владислава Михайловича

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., доцент _____ Г. И. Стрелкова

Зав. кафедрой радиофизики
и нелинейной динамики,

д.ф.-м.н., доцент _____ Г. И. Стрелкова

Саратов 2026 г.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение динамики многокомпонентных и многослойных сетей, а также исследование эволюции формирующихся в этих сетях пространственно-временных структур и их взаимодействия, играют ключевую роль для понимания поведения реальных систем. В частности, исследование явлений синхронизации в сложных сетях важно для различных областей науки, включая физику, химию, нейронауку и социологию, а также для реальных систем, таких как коммуникационные сети, электроэнергетические системы и транспортные сети. Одним из методов управления такими системами является использование сложных нестационарных связей между подсистемами. Явления синхронизации активно изучаются в сетях фазовых осцилляторов с частотно-зависимыми связями, а также в ансамблях осцилляторов с мигающими и изменяющимися во времени связями.

В настоящее время в сложных сетях обнаружены и исследованы различные формы синхронизации, включая частичную и полную синхронизации, кластерную синхронизацию, вынужденную и взаимную синхронизации, а также взрывную и удаленную синхронизации. Среди структур, связанных с частичной синхронизацией, в настоящее время выделяют два особых типа: химерные состояния и уединенные состояния. Эти режимы представляют собой промежуточные состояния, возникающие при переходе от полной (хаотической) синхронизации к асинхронной динамике (некогерентному хаосу) при уменьшении силы связи между отдельными узлами сети. Данные пространственно-временные структуры могут наблюдаться не только в компьютерных экспериментах, но и в реальных системах. Важно отметить, что проведено большое количество исследований, посвященных взаимодействию химерных и уединенных состояний при различных типах межслойной связи, таких как постоянная связь, разреженная связь, связь с запаздыванием, а также связь, модулируемая шумовыми источниками с различной статистикой. Однако возможность синхронизации этих структур при случайно распределенной в пространстве межслойной связи и/или случайно мигающей (включающейся) связи до настоящего времени не исследовалась.

В связи с вышеизложенным, в данной выпускной квалификационной работе исследуется динамика двухслойной сети с неоднородными статическими

и динамическими межслойными связями, в случае, когда в отсутствие межслойной связи в одном кольце устанавливаются уединенные состояния, а в другом – химерные состояния. В качестве отдельных элементов слоев были выбраны отображения Эно–Лози (Hénon–Lozi maps), которые обеспечивают реализацию различных режимов частичной синхронизации в несвязанных слоях при вариации собственных параметров отображений и параметров связи между ними. В численном моделировании синхронизация анализируется с использованием как случайно распределённых, так и специально подготовленных начальных условий в обоих слоях.

Целью данной выпускной квалификационной работы является выявление особенностей межслойной синхронизации пространственно-временных структур в двухслойной сети нелокально связанных отображений Эно–Лози при различных типах межслойных связей.

Для достижения поставленной цели были поставлены следующие **задачи**:

1. Выбрать параметры двухслойной сети отображений Эно–Лози, при которых в отсутствие межслойной связи в слоях реализуются различные режимы: уединённые и химерные состояния;
2. Исследовать влияние случайно распределённой в пространстве межслойной связи на синхронизацию слоёв и изменение режимов динамики;
3. Проанализировать особенности синхронизации при динамической межслойной связи, случайно изменяющейся во времени и/или в пространстве, с учётом различных типов начальных условий;
4. Исследовать эффект гистерезиса в переходной области между режимами с малой и большой ошибкой синхронизации.

Для выполнения поставленных задач применялось численное моделирование, включающее разработку программного кода на языке C, расчет ошибки синхронизации и анализ пространственно-временных режимов, а также визуализацию полученных данных с использованием программы Gnuplot.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Главным объектом исследования в данной выпускной квалификационной работе является двухслойная сеть, состоящая из двух колец нелокально связанных отображений Эно–Лози со случайной межслойной связью. Исследуемая сеть описывается следующей системой итерационных уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_{1,i}(n+1) &= f(x_{1,i}(n), y_{1,i}(n)) + & (1) \\
 &+ \frac{\sigma_1}{2R_1} \sum_{j=i-R_1}^{i+R_1} [f(x_{1,j}(n), y_{1,j}(n)) - f(x_{1,i}(n), y_{1,i}(n))] + \\
 &+ \gamma_{1,i}(n, P_\gamma) [f(x_{2,i}(n), y_{2,i}(n)) - f(x_{1,i}(n), y_{1,i}(n))] \\
 y_{1,i}(n+1) &= g(x_{1,i}(n), y_{1,i}(n))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_{2,i}(n+1) &= f(x_{2,i}(n), y_{2,i}(n)) + \\
 &+ \frac{\sigma_2}{2R_2} \sum_{j=i-R_2}^{i+R_2} [f(x_{2,j}(n), y_{2,j}(n)) - f(x_{2,i}(n), y_{2,i}(n))] + \\
 &+ \gamma_{2,i}(n, P_\gamma) [f(x_{1,i}(n), y_{1,i}(n)) - f(x_{2,i}(n), y_{2,i}(n))] \\
 y_{2,i}(n+1) &= g(x_{2,i}(n), y_{2,i}(n)).
 \end{aligned}$$

Здесь $x_{l,i}(n)$ и $y_{l,i}(n)$ — динамические переменные элемента с номером $i = 1, 2, \dots, N$ в кольце с номером $l = 1, 2$, $N = 1000$ — число элементов в каждом слое, n — дискретное время. Граничные условия в каждом слое периодические: $x_{l,i} \equiv x_{l,i+N} \equiv x_{l,i-N}$, что соответствует кольцевой топологии слоев. Первый член в уравнениях системы (1) определяет собственную динамику отдельных элементов. Функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ задаются правыми частями отображения Эно–Лози и определяют локальную динамику отдельного элемента сети. Второй член в уравнениях для переменных x отвечает за внутрислойную нелокальную связь с силой σ_l и радиусом $r_l = R_l/N$ ($l = 1, 2$). Последний член описывает локальную межслойную связь с силой $\gamma_{l,i}$ между одноименными элементами двух слоев. Величина P_γ характеризует вероятность включения однонаправленной межслойной связи между элементами в i -м узле.

Для анализа пространственно-временной динамики сети используются мгновенные профили, пространственно-временные диаграммы, сечения и проекции многомерных аттракторов изучаемой системы на плоскости динамических переменных (x, y) . Для оценки степени синхронизации между слоями рассчитывается ошибка синхронизации

$$\delta = \frac{1}{T_{it}} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{T_{it}} \sum_{i=1}^N (x_{1,i}(n) - x_{2,i}(n))^2, \quad (2)$$

где $T_{it} = 10000$ — число итераций, соответствующее времени усреднения после переходного процесса длиной $T_{trans} = 90000$. Ошибка синхронизации характеризует степень различия пространственно-временных режимов в двух связанных слоях; в случае полной синхронизации $\delta = 0$.

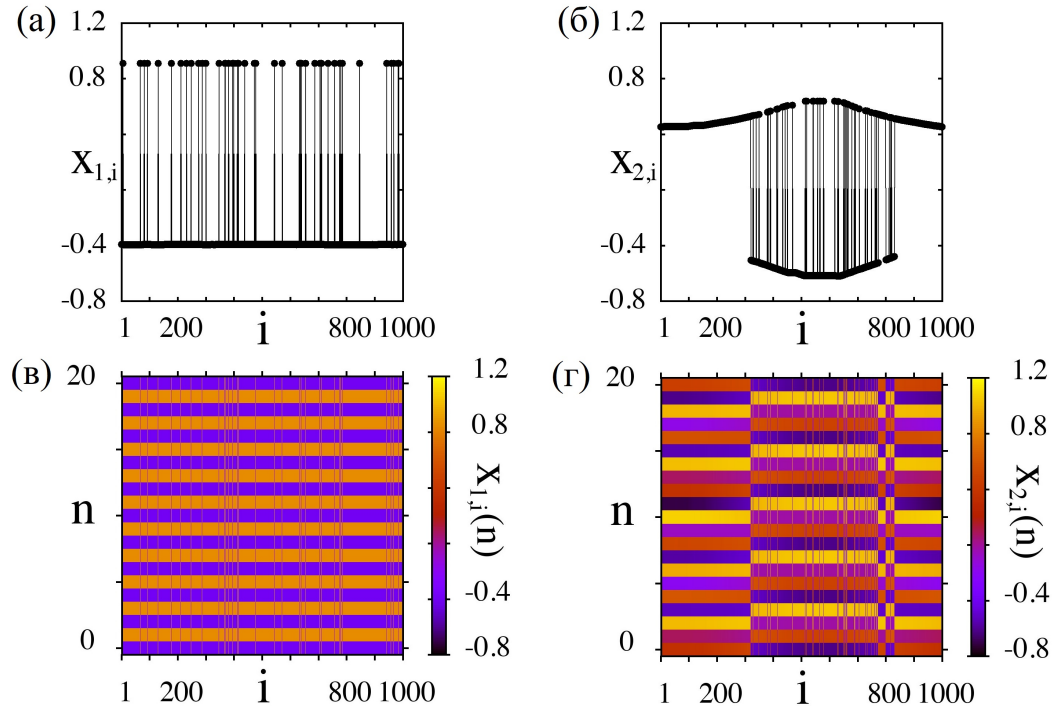


Рисунок 1 — Мгновенные профили (а),(б) и пространственно-временные диаграммы (в),(г) для $x_{l,i}$ ($l = 1, 2$): (а),(в) для первого изолированного слоя при $\alpha_1 = 1.45$, $\beta_1 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $R = 320$; (б),(г) для второго изолированного слоя при $\alpha_2 = 1.63$, $\beta_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $R = 320$. Межслойная связь $\gamma_{1,i}(n) = \gamma_{2,i}(n) = 0$.

В настоящем разделе исследуется межслойная синхронизация при наличии различных кластерных режимов в каждом слое. Для этого управляющие

параметры в первом и втором кольцах выбираются различными. Мгновенные профили и пространственно-временные диаграммы для обоих слоев без межслойной связи, т.е. при $\gamma_{1,i}(n) = \gamma_{2,i}(n) = 0$, приведены на рисунке 1. Первое кольцо демонстрирует уединенное состояние, а во втором слое наблюдается химерное состояние, включающее один когерентный и один некогерентный кластер. Внутрислойные параметры связи выбраны одинаковыми в обоих слоях: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $R_1 = R_2 = R$.

Начальные условия для динамических переменных в обоих кольцах выбираются двумя способами: случайное и равномерное распределение в интервалах $x_{l,i}(0) \in [-0.5, 0.5]$, $y_{l,i}(0) \in [-0.5, 0.5]$ и специально подготовленные начальные условия, соответствующие установившемуся режиму уединенного состояния в первом слое и химерному состоянию во втором слое. Межслойная связь задается с использованием трех различных подходов: случайно распределенная в пространстве, случайная во времени и пространстве, а также случайная только во времени.

Случайно распределенная в пространстве межслойная связь

Этот тип межслойной связи определяется неоднородным распределением параметров связи. В начальный момент времени ($n = 0$) генератор случайных чисел для каждого элемента задает либо нулевую ($\gamma_{l,i} = 0$), либо ненулевую ($\gamma_{l,i} \neq 0$) силу межслойной связи, и это случайное распределение остается неизменным в течение всего времени наблюдения. На рисунке 2 представлено распределение ошибки синхронизации (рисунок 2(а) $\delta(2)$) и карта режимов (2(б)) на плоскости параметров «вероятность межслойной связи (P_γ) — сила межслойной связи (γ)» для случайно распределенных начальных условий.

Как видно из рисунка 2(а), существует область оптимальных значений параметров межслойной связи, в которой ошибка синхронизации удовлетворяет условию $\delta < 0.01$. Этот тип синхронизации обычно называют эффективным, так как из-за неоднородности изучаемой сети невозможно добиться полной синхронизации (идентичности) систем и необходимо вводить некоторое условия. В наших исследованиях мы берем значение ошибки синхронизации

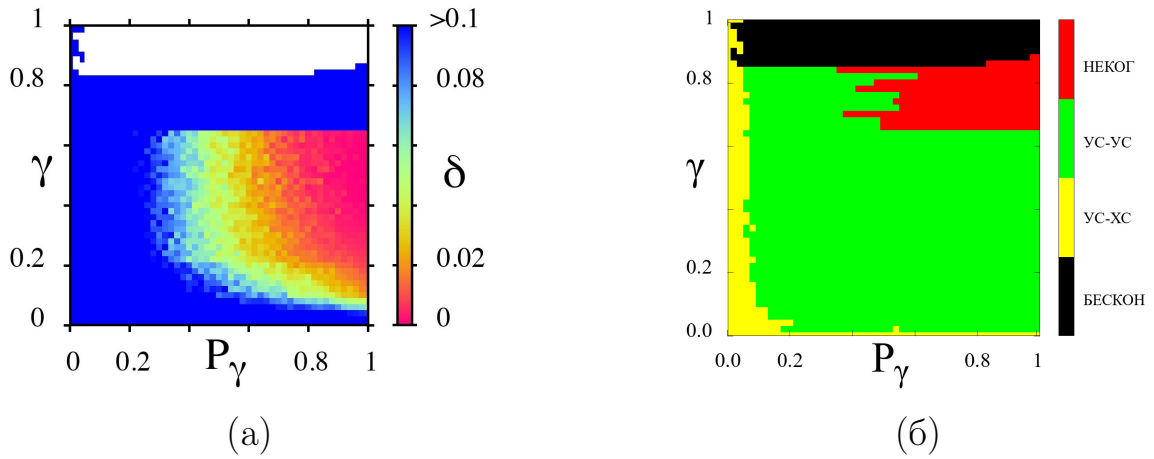


Рисунок 2 – (а) Распределение ошибки синхронизации δ на плоскости параметров (P_γ, γ) для случая случайно распределенной межслойной связи (статическое распределение) при случайно распределенных начальных условиях. (б) Карта режимов на плоскости параметров (P_γ, γ) для случая случайно распределенной межслойной связи (статическое распределение) при случайно распределенных начальных условиях. Белые области соответствуют уходу траекторий на бесконечность. Другие параметры: $\alpha_1 = 1.45$, $\alpha_2 = 1.63$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $R = 320$, $N = 1000$.

ции $\delta < 0.01$ в качестве условия установления эффективной синхронизации. Слои эффективно синхронизируются в диапазоне $\gamma \in [0.2, 0.63]$.

Теперь рассмотрим карту режимов на рисунке 2(б). При малых значениях вероятности межслойной связи $P_\gamma < 0.2$ сохраняется исходный режим УС-УС: в первом кольце наблюдаются уединенные состояния, а во втором – химерное состояние. При увеличении P_γ система переходит в область уединенных состояний в обоих кольцах (УС-УС), затем – в область некогерентного состояния (НЕКОГ). При дальнейшем увеличении силы межслойной связи, когда $\gamma > 0.84$, почти во всем диапазоне P_γ траектории уходят на бесконечность. Таким образом, при случайно распределенной межслойной связи наблюдается последовательность переходов УС-УС \rightarrow УС-УС \rightarrow НЕКОГ \rightarrow БЕСКОН.

Случайная во времени и пространстве межслойная связь

Для случайной во времени и пространстве межслойной связи на каждой итерации для каждой пары одноименных узлов двух слоев заново опреде-

ляется, включена или выключена межслойная связь. Таким образом, пространственное распределение связей изменяется во времени. На рисунке 3 представлено распределение ошибки синхронизации (рисунок 3(а)) и карта режимов (рисунок 3(б)) на плоскости параметров (P_γ, γ) для случайно распределенных начальных условий.

Как видно из рисунка 3(а), случайная во времени и пространстве межслойная связь также приводит к появлению области малой ошибки синхронизации. По сравнению со случайно распределенной в пространстве межслойной связью синхронизация достигается при меньших значениях параметров межслойного взаимодействия. Это связано с тем, что структура межслойной связи изменяется на каждой итерации, и влияние межслойного взаимодействия фактически усредняется по времени и пространству. Различия между случайными и специально подготовленными начальными условиями при этом становятся менее выраженными.

Карта режимов на рисунке 3(б) показывает, что при малых P_γ и γ сохраняется исходный режим УС-ХС. При увеличении параметров связи возникают режимы УС-ХУС и УС-НЕКОГ, а затем область уединенных состояний

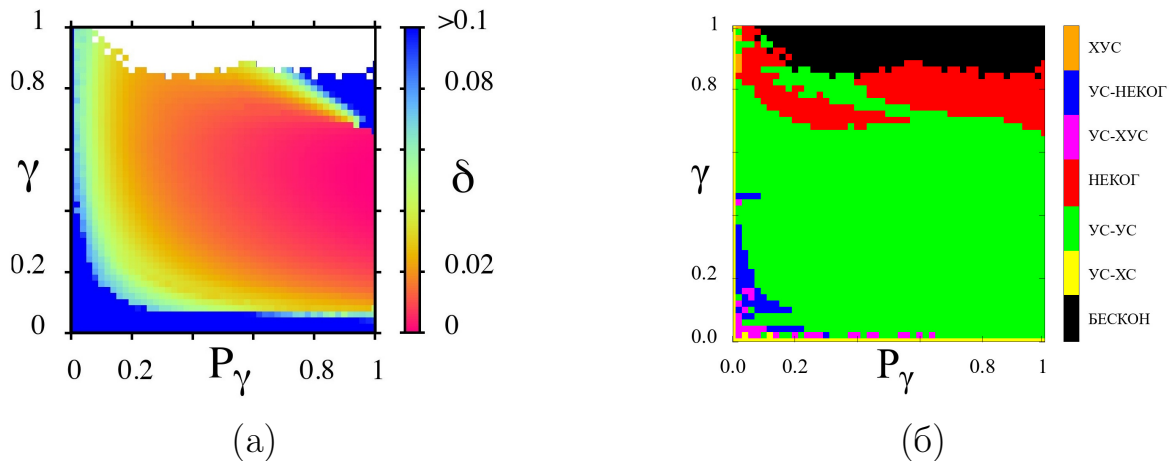


Рисунок 3 – (а) Распределение ошибки синхронизации δ на плоскости параметров (P_γ, γ) для случая случайной во времени и пространстве межслойной связи при случайно распределенных начальных условиях. (б) Карта режимов на плоскости параметров (P_γ, γ) для случая случайной во времени и пространстве межслойной связи при случайно распределенных начальных условиях. Белые области соответствуют уходу траекторий на бесконечность. Другие параметры: $\alpha_1 = 1.45$, $\alpha_2 = 1.63$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $R = 320$, $N = 1000$.

в обоих кольцах (УС-УС). При $0.7 < \gamma < 0.85$ наблюдается переход к некогерентному состоянию, тогда как при $\gamma > 0.85$ траектории уходят на бесконечность. В области больших γ и малых P_γ также формируются химеры уединенных состояний в обоих кольцах.

Случайная во времени межслойная связь

При случайной во времени межслойной связи на каждой итерации включается или выключается связь между всеми одноименными узлами двух слоев. На рисунке 4 представлено распределение ошибки синхронизации δ (рисунок 4(а)) и карта режимов (рисунок 4(б)) на плоскости параметров (P_γ, γ) для случайной во времени межслойной связи при случайно распределенных начальных условиях.

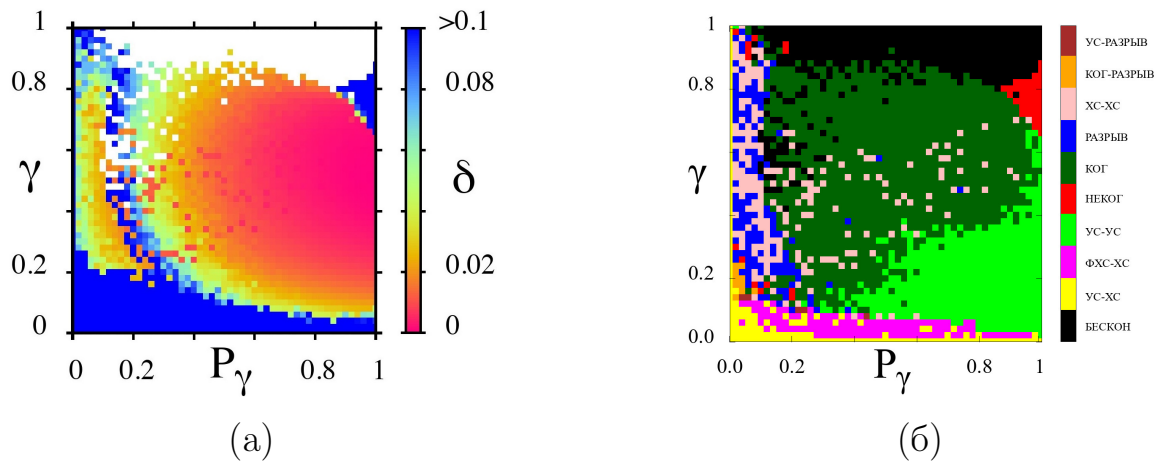


Рисунок 4 – (а) Распределение ошибки синхронизации δ на плоскости параметров (P_γ, γ) для случая случайной во времени межслойной связи при случайно распределенных начальных условиях. (б) Карта режимов на плоскости параметров (P_γ, γ) для случая случайной во времени межслойной связи при случайно распределенных начальных условиях. Белые области соответствуют уходу траекторий на бесконечность. Другие параметры: $\alpha_1 = 1.45$, $\alpha_2 = 1.63$, $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\sigma = 0.2$, $R = 320$, $N = 1000$.

Особенность распределения ошибки синхронизации на рисунке 4(а) состоит в том, что область малой ошибки разделяется узким каналом, где δ принимает большие значения или наблюдается уход траектории на бесконечность. Поскольку распределение межслойной связи изменяется на каждой

итерации, возникающие в слоях структуры подавляются уже при слабой связи и малой вероятности ее включения.

При случайной во времени межслойной связи наблюдается несколько типов режимов, представленных на карте режимов (рисунок 4(б)). При малых $P_\gamma < 0.2$ исходное состояние УС-ХС может сохраняться, однако в этой области также возникают режимы с профилями разрыва, когерентной динамикой и химерными состояниями в обоих кольцах. При $P_\gamma > 0.2$ динамика системы меняется: при малых γ наблюдается режим ФХС-ХС, затем с ростом γ устанавливаются уединенные состояния в обоих кольцах. При дальнейшем увеличении силы связи преобладает когерентная динамика, а в области больших P_γ и γ возникает некогерентное состояние.

Для более детального анализа режимов, возникающих при случайной во времени межслойной связи, был исследован эффект гистерезиса в зависимости ошибки синхронизации δ от вероятности включения межслойной связи P_γ при фиксированных значениях силы связи γ . Для выбранного значения γ строились две зависимости $\delta(P_\gamma)$: первая соответствует последовательному увеличению P_γ , а вторая — последовательному уменьшению этого параметра.

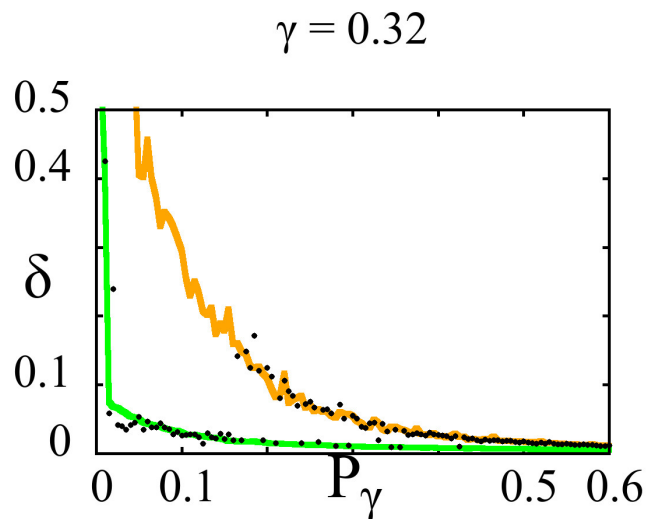


Рисунок 5 — Зависимость ошибки синхронизации δ от вероятности включения межслойной связи P_γ при фиксированном значении силы межслойной связи $\gamma = 0.32$. Зелёная кривая соответствует увеличению P_γ , оранжевая кривая — уменьшению P_γ . Остальные параметры как на рисунке 4.

Из рисунка 5 видно, что зависимости $\delta(P_\gamma)$, полученные при увеличении и уменьшении P_γ , не совпадают. При одних и тех же значениях вероятности межслойной связи ошибка синхронизации может принимать различные значения в зависимости от предыстории изменения параметра. Следовательно, при $\gamma = 0.32$ на зависимости $\delta(P_\gamma)$ наблюдается петля гистерезиса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках представленной выпускной квалификационной работы была численно исследована динамика двухслойной сети нелокально связанных отображений Эно–Лози при наличии неоднородных и динамических межслойных связей. Параметры двухслойной сети были выбраны таким образом, что в отсутствие межслойной связи в первом кольце устанавливаются уединённые состояния, а во втором кольце — химерное состояние.

Показано, что при случайно распределённой межслойной связи увеличение вероятности включения связи и её силы приводит к подавлению химерного состояния во втором слое и формированию уединённых состояний в обоих кольцах. При дальнейшем изменении параметров межслойного взаимодействия уединённые состояния синхронизируются между слоями. При этом начальные условия оказывают заметное влияние на размер области синхронизации.

Для случайной во времени и пространстве межслойной связи было показано, что динамика сети качественно близка к случаю статически распределённой случайной связи. Однако из-за того, что распределение межслойной связи изменяется на каждой итерации, подавление химерного состояния и синхронизация уединённых состояний происходят при меньших значениях вероятности и силы связи. Различия между случайными и специально подготовленными начальными условиями в этом случае становятся менее выраженными.

Наиболее сложная картина режимов была обнаружена при случайной во времени межслойной связи. В отличие от двух предыдущих случаев, данный тип связи способен приводить не только к синхронизации уединённых состояний, но и к синхронизации химерных состояний. Также могут возникать смешанные режимы с различной динамикой в разных кольцах.

Отдельно был исследован эффект гистерезиса в зависимости ошибки синхронизации от вероятности включения межслойной связи. Показано, что для больших значений силы межслойного взаимодействия прямая и обратная ветви зависимости $\delta(P_\gamma)$ не совпадают, что свидетельствует о наличии петли гистерезиса. Для меньших значений силы связи выраженный гистерезис не наблюдается.

Полученные результаты показывают, что неоднородная и динамическая межслойная связь является эффективным механизмом управления пространственно-временными структурами в многослойных сетях. В работе выявлены основные закономерности межслойной синхронизации уединённых и химерных состояний в двухслойной сети нелокально связанных отображений Эно–Лози при случайно распределённых и динамически изменяющихся межслойных связях.

По результатам исследований была опубликована статья в журнале **Chaos, Solitons & Fractals**: Rybalova E., **Averyanov V.**, Strelkova G, Lozi R. Peculiarities of the spatio-temporal dynamics of a Hénon–Lozi map network in the presence of Lévy noise //Chaos, Solitons & Fractals. – 2024. – V. 184. – P. 115051.

Также принята к публикации статья в сборнике конференции **The Fourth International Nonlinear Dynamics Conference** (22-25 июня, 2025, Нью-Джерси, США): Rybalova E., **Averyanov V.**, Strelkova G., Peculiarities of synchronization of randomly interlayer coupled networks of chaotic maps// W. Lacarbonara (ed.), Advances in Nonlinear Dynamics, NODYCON Conference Proceedings Series, Springer Nature Switzerland AG 2026. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-032-16536-7_1.