

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Синхронизация и гашение автоколебаний в генераторах Ван дер Поля
взаимодействующих через линейный колебательный контур.**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 2232 группы
направления 03.04.03 Радиофизика

Института физики

Ревина Максима Дмитриевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н., профессор

_____ В. В. Астахов

Зав. кафедрой д.ф.-м. н., доцент

_____ Г.И. Стрелкова

Саратов 2026

Введение

Синхронизация - нелинейное явление широко наблюдаемое в природе и технике [1,2]. Под синхронизацией понимают подстройку индивидуальных ритмов взаимодействующих систем к единому ритму коллективного поведения ансамбля даже при очень слабых связях [1]. Это явление впервые было описано в 17 веке Х. Гюйгенсом. Оно остается предметом активного теоретического и экспериментального исследования так же и в наше время.

В современной теории синхронизации сформулирован ряд базовых моделей, которые являются носителями характерных универсальных свойств синхронного поведения в системах самой различной природы [2]. Так, например, два связанных генератора Ван дер Поля представляют собой базовую модель теории синхронизации периодических движений автоколебательных систем вблизи бифуркации Андронова-Хопфа.

Поведение связанных осцилляторов Ван дер Поля рассматривается, начиная с 20-30-х годов прошлого столетия [3-5]. При слабой связи они демонстрируют универсальное поведение, которое не зависит от характера, типа взаимодействия. По мере увеличения коэффициента связи универсальная картина синхронизации нарушается, во взаимодействующих осцилляторах могут возникать новые явления, характер которых существенным образом зависит от типа связи. Например, в двух резистивно связанных генераторах Ван дер Поля помимо синхронизации наблюдается явление гашения автоколебаний или амплитудного вымирания. Впервые оно было описано Рэлеем в его знаменитой монографии <<Теория звука>> [6,7]. В настоящее время это явление активно исследуется в системах различной природы [9-12] и его связывают с механизмом формирования диссипативных структур [9]. Состоит явление амплитудного вымирания в том, что по мере увеличения силы связи и расстройки по собственным частотам амплитуда автоколебаний плавно уменьшается до нуля. Автоколебания в связанных системах полностью подавляются, несмотря на то, что в каждом отдельном генераторе они существуют. Однако, в двух генераторах Ван дер Поля с емкостной связью

явление амплитудного вымирания не наблюдается, но возникает бистабильность синхронных режимов. Впервые этот эффект был описан И.И. Блехманом [1]. Заключается он в том, что при определенных фиксированных управляющих параметрах системы при одних начальных условиях возникает режим синфазной синхронизации, а при других - режим противофазной синхронизации.

Для взаимодействующих осцилляторов простейшей является связь по переменным, по первой производной и по второй производной. В механической интерпретации это соответствует связи по координатам, по скоростям и по ускорению. Для радиофизических систем - емкостной, резистивной и индуктивной связи, соответственно [13,14]. Два генератора Ван дер Поля с перечисленными мгновенными, линейными типами связи детально исследованы в квазигармоническом приближении [15,21]. Рассматриваются также мгновенные, нелинейные типы связи [22].

Многие системы радиофизики и электроники при моделировании их динамики требуют использования более сложных связей. При рассмотрении взаимодействующих генераторов часто рассматривают запаздывающую связь [23-26]. Запаздывание существенным образом влияет на динамику взаимодействующих генераторов. В такой системе помимо синхронизации может наблюдаться и амплитудное вымирание, и мультистабильность. Причем оба эффекта характеризуются отличительными особенностями. Амплитудное вымирание наблюдается с увеличением связи в идентичных генераторах с одинаковыми собственными частотами. Мультистабильность может наблюдаться не только для сосуществующих режимов синфазной и противофазной синхронизации, но также для синхронных и квазипериодических режимов [25,34].

Системы с запаздывающими связями непосредственно связаны с распределенными (или волновыми) связями, что впервые было доказано в работах Рубаника с соавторами [27]. Подобные системы активно исследуются в настоящее время [28].

Упрощением волновых связей являются цепочки различных пассивных элементов (из RC-звеньев или линейных осцилляторов). В таких системах наблюдается так называемая отдаленная синхронизация (distinct synchronization) [29]. Часто используется простейший случай одного пассивного инерционного элемента (описываемого дифференциальными уравнениями) в канале связи. Такая схема связи имеет много приложений в биологии [30], электронике [31], механике [32].

Цели работы — бифуркационный анализ системы двух генераторов Ван дер Поля, взаимодействующих через линейный осциллятор при диссипативной связи, исследование режимов и бифуркаций. Анализ областей синхронизации и гашения для более простых систем состоящих из этих элементов и такой же связи, чтобы проследить влияние введения в систему колебательного контура в качестве канала связи.

Основное содержание работы

Предметом данной работы является система двух генераторов Ван дер Поля, взаимодействующих через линейный осциллятор при диссипативной связи, которая задаётся системой уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1(\varepsilon_1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \gamma_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \gamma_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \gamma_{32}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ \ddot{x}_3(\varepsilon_3 - x_3^2)\dot{x}_3 + \omega_3^3 x_3 &= \gamma_{32}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \end{aligned} \quad (1)$$

где $x_{1,2,3}$ динамические переменные которые описывают мгновенное состояние системы;

$\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ — параметр возбуждения каждого осциллятора;

γ_{12}, γ_{32} — коэффициенты связи между осцилляторами Ван дер Поля и линейным осциллятором;

$\omega_{1,3}$ — собственная частота колебаний осцилляторов Ван дер Поля,

ω_2 — собственная частота связывающего линейного осциллятора.

Пусть $\omega_2 = \omega_3 = 1$, для данной работы этого достаточно, чтобы параметром ω_1 охарактеризовать расстройку по частоте.

Для более глубокого понимания влияния диссипативной связи на

систему (1), был проведён анализ устойчивости парциального линейного осциллятора методом Ван дер Поля. Осцилляторная форма этого уравнения:

$$\ddot{x}_2 = -\alpha \dot{x}_2 - \omega_2^2 x_2$$

Согласно решению - в зависимости от параметра α режим осциллятора может быть устойчивым фокусом, а может быть устойчивым узлом. В данной работе рассматриваются только значения α , при которых существует устойчивый фокус, то есть малые положительные.

Далее рассмотрено поведение парциального осциллятора Ван дер Поля:

$$\ddot{x}_1 (\varepsilon_1 - x_1^2) \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0.$$

В рамках работы для него методом медленно меняющихся комплексных амплитуд получено решение в результате которого получается бифуркационная диаграмма, она представляет собой суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа рождения устойчивого предельного цикла в зависимости от параметра возбуждения автоколебаний ε_1 . Соответствующие результаты построены и численно.

Для дальнейшей работы выбран параметр возбуждения $\varepsilon_1 = 0.1$, при котором характер колебаний квазигармонический.

Рассмотрен случай, когда только один коэффициент связи, например γ_{32} равен нулю, тогда система преобразуется в вариант (3), где она состоит из диссипативно связанных генератора Ван дер Поля и колебательного контура:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 (e - x_1^2) \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \gamma_{12} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \gamma_{12} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{aligned} \quad (3)$$

В этом сегменте описано также явление затягивания частоты, он обусловлен бистабильностью в системе. Бифуркационный механизм этой бистабильности определён в работах [33]

Следующая рассмотренная система - генератор Ван дер Поля, резистивно связанный с колебательным контуром. На Рис.1 построена диаграмма, характеризующая возбуждение колебаний при разной расстройке частот взаимодействующих генераторов.

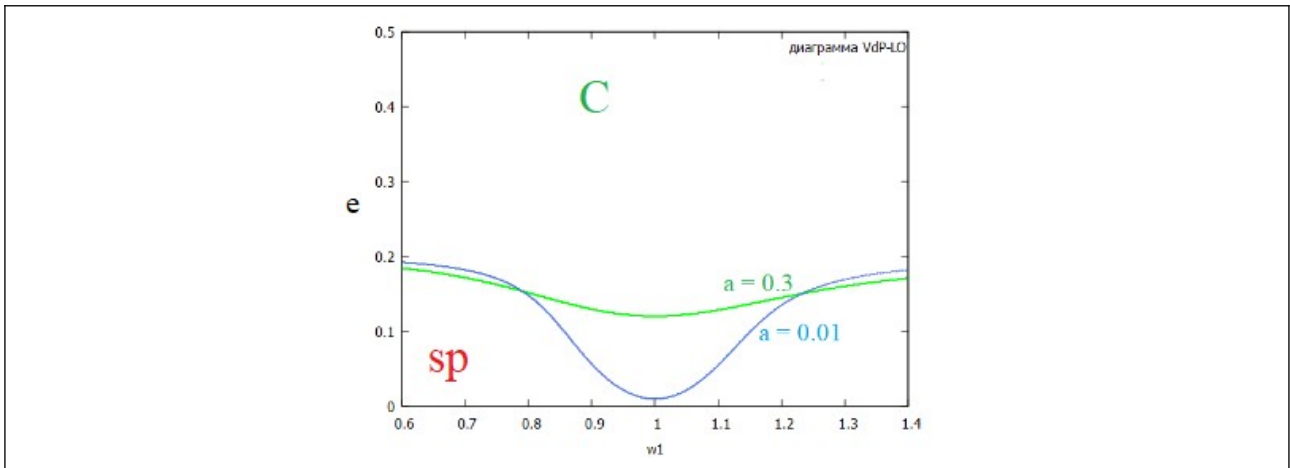


Рис.1 Двупараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости параметра возбуждения ε_1 и расстройки ω_1 и фиксированных $\alpha=0.01$ и $\alpha=0.3$, $\gamma=0.2$.

Построены двупараметрические бифуркационные диаграммы Рис.1 на плоскости параметров силы связи γ и параметра возбуждения ε_1 и Рис.2(а,б) на плоскости параметров силы связи γ и частотной расстройки ω_1 . Рассмотрен первый для этой работы случай явления гашения колебаний (AD).

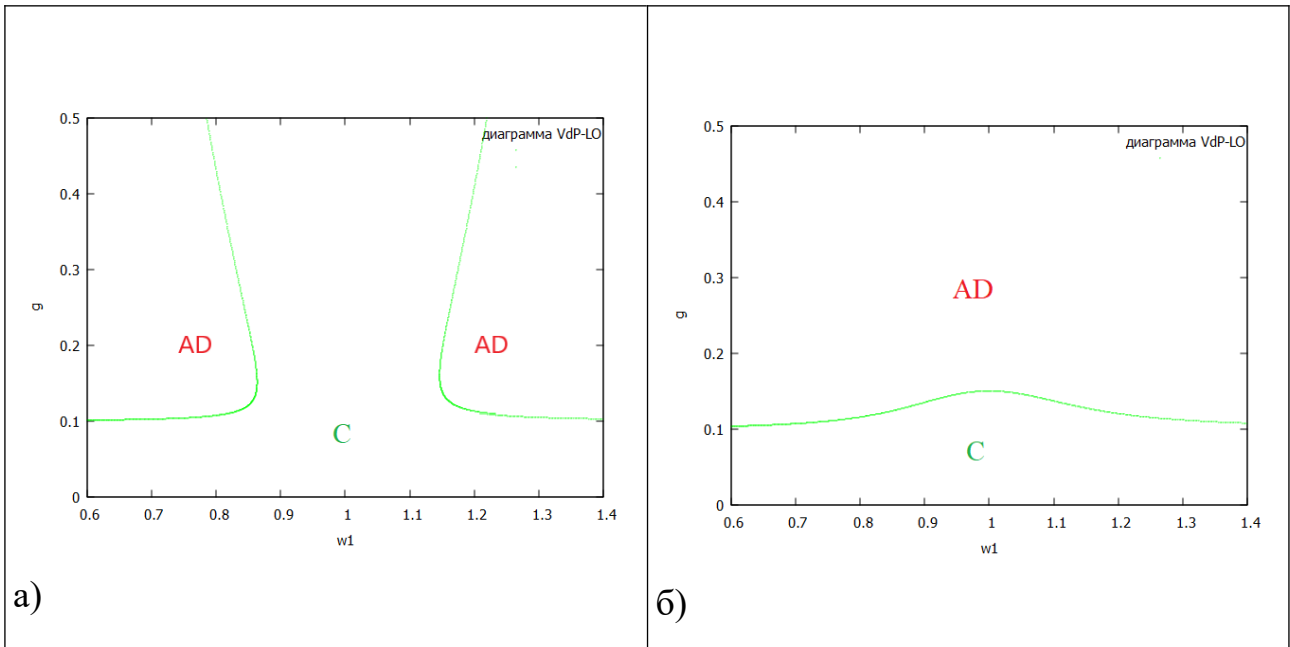


Рис.2 Двупараметрическая бифуркационная диаграмма на плоскости ($\varepsilon - \omega_1$) и при фиксированных $\varepsilon=0.1$ а) $\alpha=0.01$, б) $\alpha=0.3$.

Следующим рассмотрен вариант, когда в системе (1) коэффициенты

связи γ_{12}, γ_{32} имеют бесконечно большие значения, из чего следует, то что генераторы на краях цепочки воздействуют друг на друга не инерционно через колебательный контур, а мгновенно, то есть влияние колебательного контура на связь будет стремиться к минимуму. Получилась система в осцилляторной форме:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 - (\varepsilon_1 - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = \gamma(\dot{x}_3 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_3 - (\varepsilon_3 - x_3^2)\dot{x}_3 + \omega_3^2 x_3 = \gamma(\dot{x}_1 - \dot{x}_3), \end{cases}$$

К этой системе был применён метод Ван дер Поля для анализа устойчивости и исходя из аналитических результатов были построены области синхронизации и гашения колебаний Рис.3(а,б).

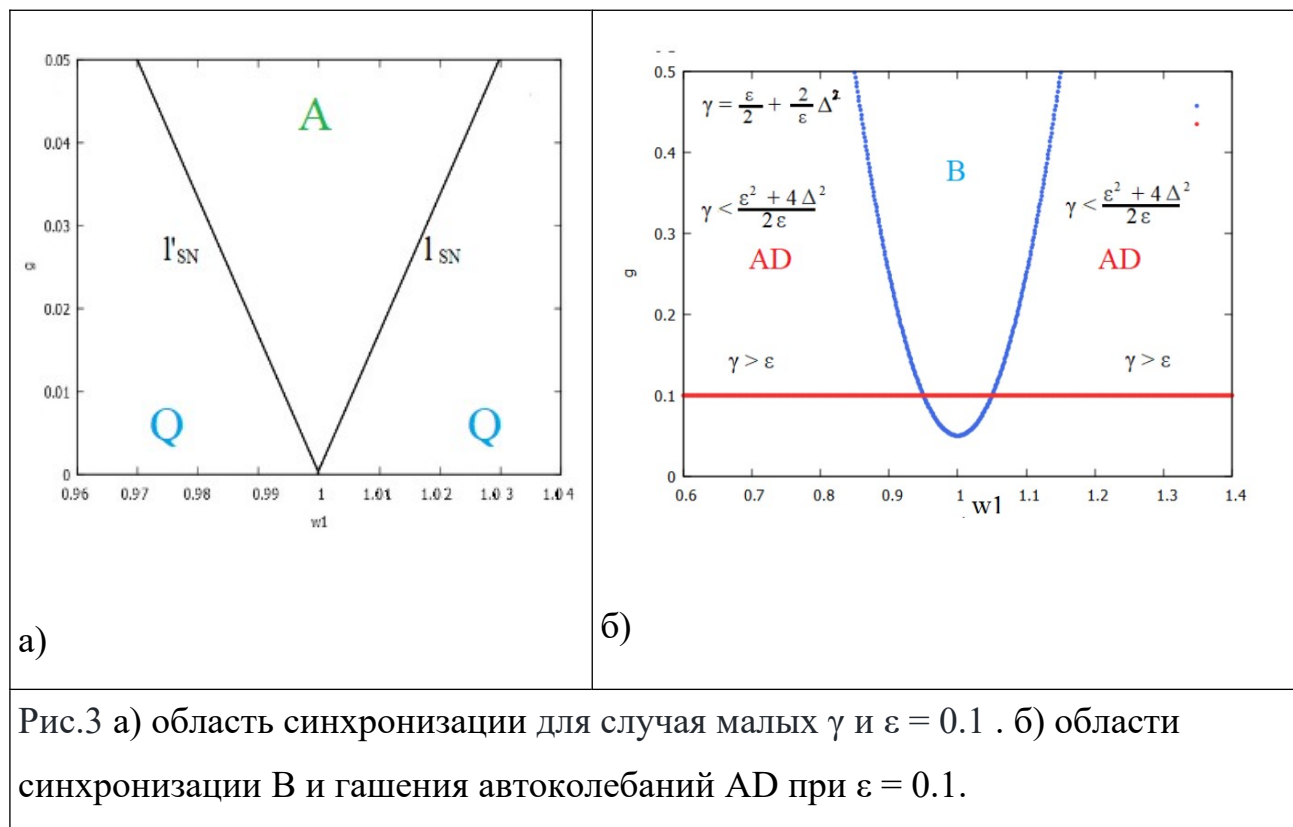


Рис.3 а) область синхронизации для случая малых γ и $\varepsilon = 0.1$. б) области синхронизации B и гашения автоколебаний AD при $\varepsilon = 0.1$.

Проведён численный бифуркационный анализ с использованием пакета программ XppAut. Рассмотрено поведение режимов системы в зависимости от γ и расстройки ω_1 Рис.4(а,б) для случаев идентичных и неидентичных осцилляторов.

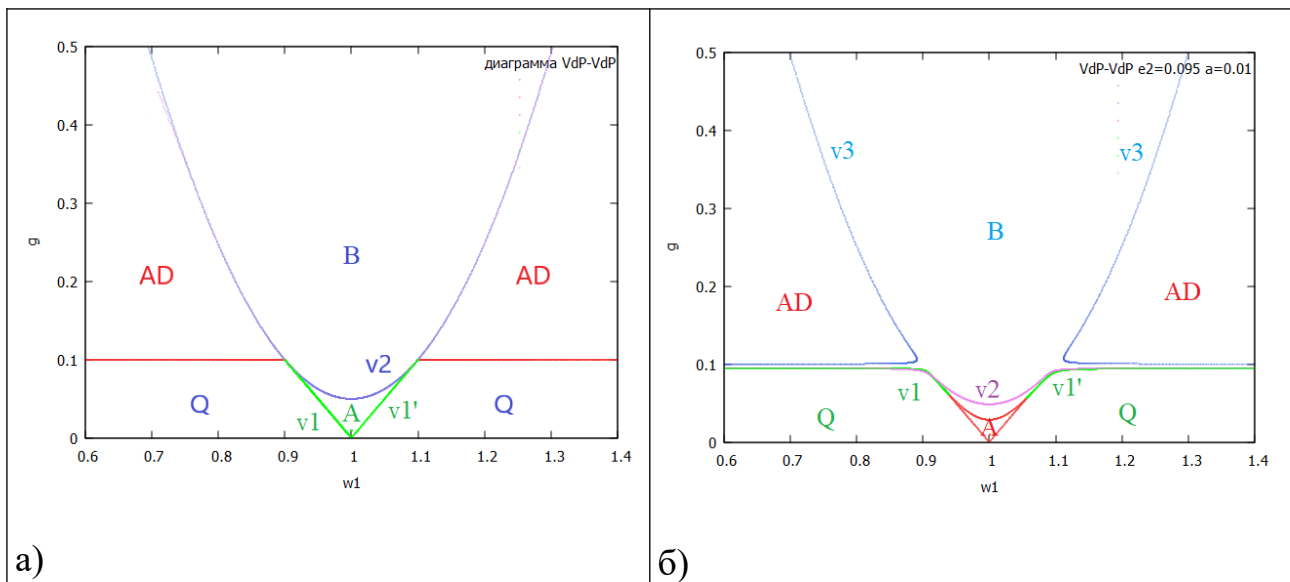


Рис.4 двухпараметрическая бифуркационная диаграмма при $\alpha = 0.01$ а) $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.1$, б) $\varepsilon_1 = 0.1, \varepsilon_3 = 0.095$

Вернувшись к исследованию основной системы осцилляторов (1)

рассмотрели её карты режимов Рис.5, в том числе в зависимости от некоторого диапазона значений коэффициента диссипации α . Карты режимов позволяют оценить бифуркации, связанные с устойчивыми состояниями равновесия.

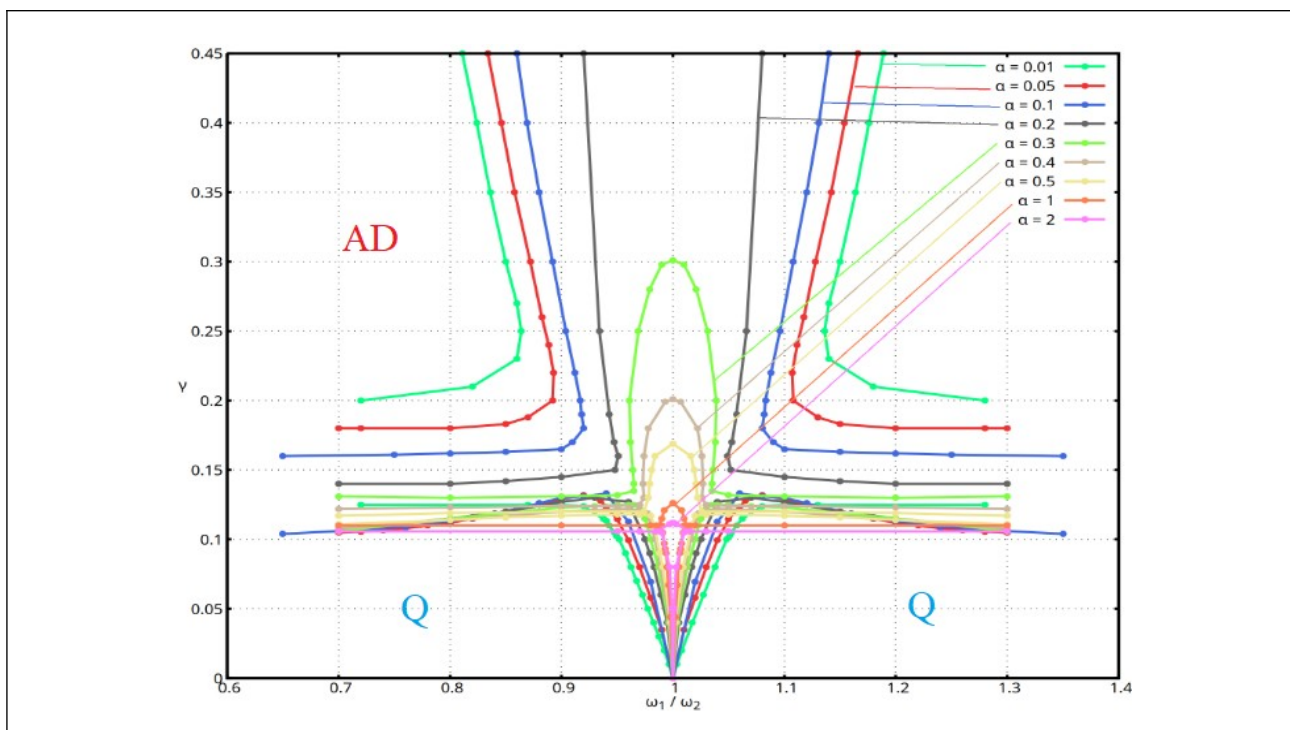


Рис.5 Карты режимов для системы (1) в зависимости от α .

Для поиска и исследования других стационарных состояний проведён бифуркационный анализ системы, что включает в себя определение всех

стационарных состояний и анализ их бифуркаций в пределах выбранного диапазона. Дополнительное внимание уделено явлению мультистабильности в области синхронизации через захват Рис.6 и Рис.7

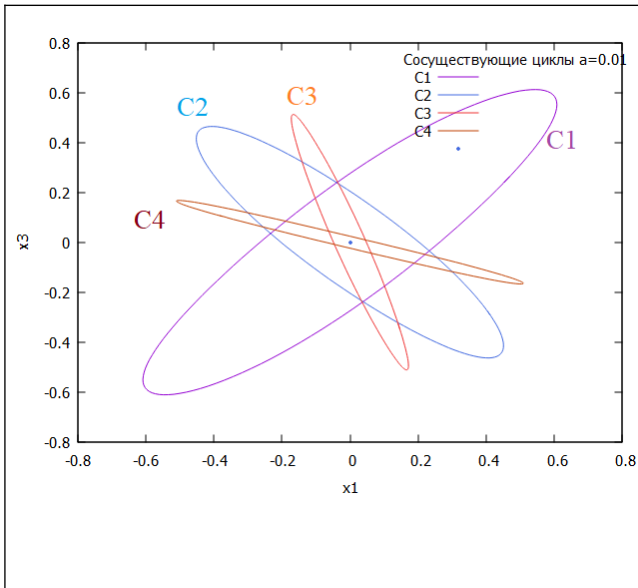


Рис.6 проекция фазовых портретов на плоскость (x_1-x_3) в области синхронизации через захват, при $\alpha=0,01, \varepsilon=0,1, \omega_1=0,99, \gamma=0,05$

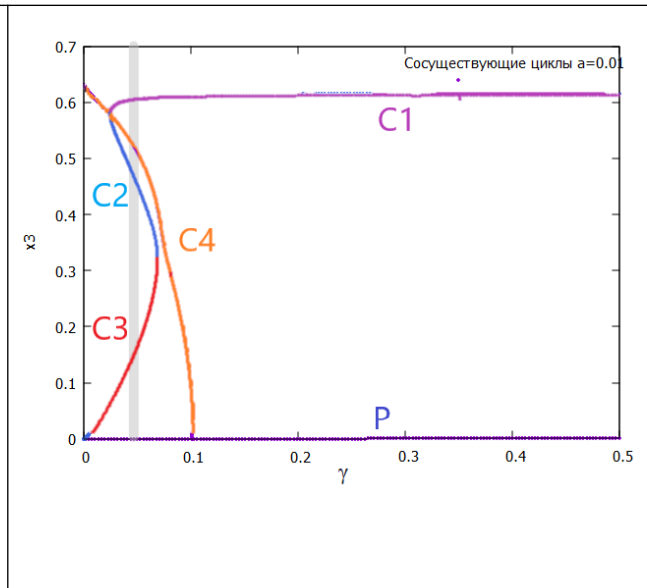
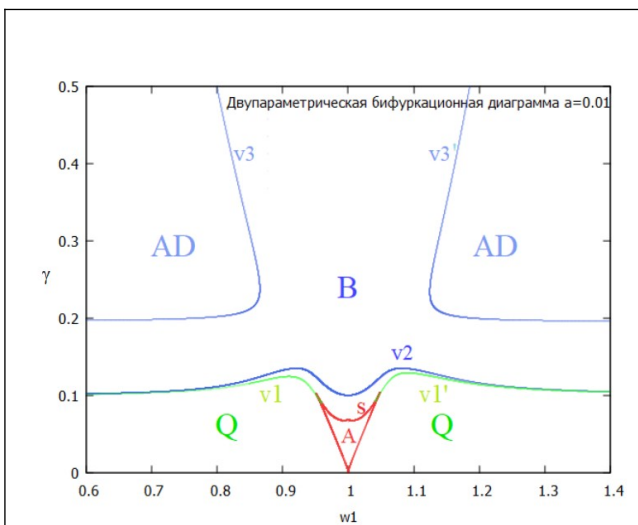
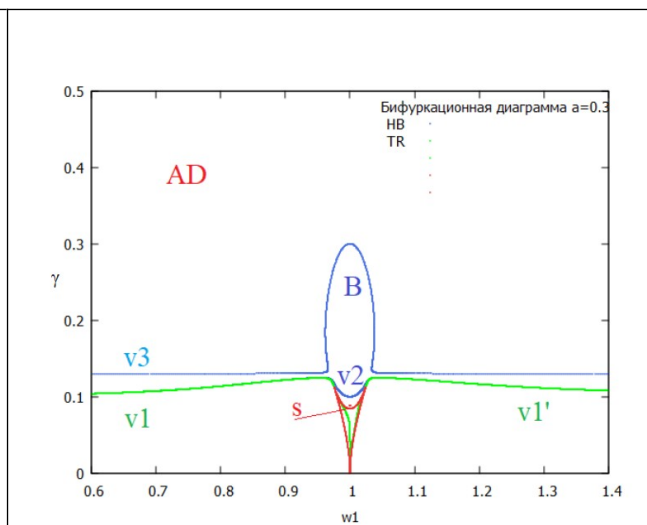


Рис.7 бифуркационная диаграмма в зависимости от коэффициента связи γ при фиксированных, $\alpha = 0,01, \varepsilon = 0,1, \omega_1 = 0,99$.

В бифуркационный анализ в том числе вошло построение бифуркационных линий на плоскости $(\omega_1 - \gamma)$ Рис.8, и описание областей соответствующих исследуемым режимам, таким как синхронизация и гашение колебаний.



а)



б)

Рис.8 Двупараметрическая бифуркационная диаграмма, при $\varepsilon=0.1$ а) $\alpha=0.01$ б) $\alpha=0.3$.

Заключение

В данной работе исследуется синхронизация и гашение автоколебаний в двух генераторах Ван дер Поля, взаимодействующих через линейный осциллятор при диссипативной связи. Предварительно рассмотрены индивидуальные осцилляторы ансамбля. Затем исследована система из генератора с дополнительным контуром и система из двух резистивно связанных генераторов. Использовались аналитические методы теории колебаний, методы теории устойчивости и бифуркаций, численные методы бифуркационного анализа динамических систем. Выявлены характерные режимы и переходы, построены карты режимов на плоскости управляющих параметров при различных значениях коэффициента диссипации линейного осциллятора, проведен детальный однопараметрический и двухпараметрический бифуркационный анализ состояний равновесия, устойчивых и седловых предельных циклов. Выявлены бифуркации, приводящие к режиму амплитудного вымирания, к синхронизации через подавление и синхронизации через захват, к разрушению резонансного тора и к формированию канала <<широкополосной синхронизации>>. Показано, что включение линейного осциллятора в канал связи между генераторами Ван дер Поля с увеличением параметра диссипации приводит к объединению левой и правой области амплитудного вымирания. В результате чего гашение автоколебаний может наблюдаться в идентичных генераторах с одинаковыми собственными частотами. Наблюдается аналогичный эффект как и в генераторах с запаздывающей взаимной связью по мере увеличения времени задержки.