

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

**МОДЕЛИ ФРАКТАЛЬНЫХ ШУМОВ КАК ИНСТРУМЕНТ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В
ОБЛАСТИ ФИНАНСОВ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Васильева Виталия Алексеевича

Научный руководитель

доцент, к. ф.-м. н.

О. В. Мещерякова

Заведующий кафедрой

доцент, к. ф.-м. н.

Л. Б. Тяпаев

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Финансовые рынки представляют собой сложные динамические системы, поведение которых характеризуется высокой степенью неопределённости, кластеризацией волатильности и «толстыми хвостами» распределения доходностей. Классические методы прогнозирования, основанные на предположении о случайном блуждании цен, не позволяют адекватно описать эти свойства, что обуславливает необходимость поиска новых моделей. В качестве одного из перспективных подходов выступает фрактальный шум, а его внедрение в финансовую аналитику принято обозначать как «фрактальную революцию», начало которой положили работы Б. Мандельброта. В отличие от традиционных гладких моделей, фрактальная геометрия позволяет описывать «дикую» случайность реальных рынков, учитывая долгосрочные зависимости и самоподобие рыночных паттернов. В связи с этим сравнительный анализ фрактальных моделей шума на реальных рыночных данных, а также исследование влияния их параметров на точность прогнозирования представляет собой актуальную научно-прикладную задачу.

Цель работы — разработка и программная реализация шести фрактальных моделей шума (шума Перлина, дробное броуновское движение, турбулентный шум, хребтовый шум, гибридный мультифрактал, неоднородный фрактал) для прогнозирования финансовых временных рядов, а также экспериментальное сравнение их точности на данных различных классов активов.

В рамках достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1. систематизировать современные представления о самоподобии, фрактальной размерности и методах их количественной оценки;
2. выявить математические особенности и спектральные свойства различных типов фрактальных шумов;
3. реализовать приложение на языке Python для параметрической генерации и визуализации фрактальных текстур;
4. провести экспериментальное сравнение шести фрактальных моделей на реальных финансовых данных с оценкой качества по метрикам MAE и RMSE;
5. исследовать влияние параметров моделей (persistence, показатель Хёрста H , lacunarity, α , β) на точность прогнозирования и выявить опти-

мальные конфигурации для каждого типа актива.

Материалы исследования. Для эксперимента использовались исторические данные о ценах закрытия четырёх финансовых инструментов, полученные через API Yahoo Finance за период с 1 апреля 2025 по 1 апреля 2026 года (365 дней): индекс S&P 500 (\hat{GSPC}) как репрезентативный индикатор американского фондового рынка, акции Apple Inc. (AAPL) как типичный представитель технологического сектора, фьючерс на золото (GC=F) как сырьевой актив с эффектом возврата к среднему, а также криптовалюта Ethereum (ETH-USD) как высоковолатильный цифровой актив с иной природой ценообразования. Выбор данных инструментов обеспечивает репрезентативность эксперимента, охватывая различные классы активов с разной степенью волатильности и разными статистическими свойствами.

Структура работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованных источников (20 наименований) и двух приложений.

В первой главе «Фракталы и шумы, основные понятия» рассматриваются фундаментальные понятия фрактальной геометрии: точное и статистическое самоподобие, фрактальная размерность и методы её вычисления (метод коробок, размерности Минковского, Хаусдорфа и корреляционная). Также вводятся основные характеристики шума как случайного и псевдослучайного поля.

Во второй главе «Виды шумов и фрактальные модели» описываются интерполяционные шумы (Value Noise и Gradient Noise), концепция фрактального шума, его параметры (gain, lacunarity, количество октав) и свойства. Дается формальное определение шести исследуемым фрактальным моделям: Perlin-FBM, дробное броуновское движение (fBm), турбулентный шум, хребтовый шум, гибридный мультифрактал и неоднородный фрактал.

В третьей главе «Реализация программного обеспечения и экспериментальные результаты» описана архитектура разработанного приложения на языке Python, исходные данные, проведены два эксперимента: сравнение моделей с фиксированными параметрами и подбор оптимальных параметров методом grid search. Приведены и проанализированы полученные результаты, включая численные значения метрик MAE и RMSE, а также визуализацию прогнозов.

В заключении сформулированы основные выводы и рекомендации по выбору фрактальных моделей в зависимости от типа актива и рыночного режима. В приложениях представлены полный программный код и дополнительные графики прогнозов для каждой модели.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе «Фракталы и шумы, основные понятия» рассмотрены фундаментальные свойства фрактальных объектов. Введено понятие самоподобия, которое подразделяется на точное (детерминированное) и статистическое. Точное самоподобие характеризуется тем, что объект может быть представлен как объединение уменьшенных копий самого себя. Примерами таких объектов служат множество Кантора, треугольник Серпинского и кривая Коха. Статистическое самоподобие проявляется в сохранении статистических характеристик при изменении масштаба, что характерно для большинства природных и финансовых объектов.

Определено понятие фрактальной размерности как количественной характеристики сложности геометрических объектов. Рассмотрены основные методы её вычисления: метод коробок (box-counting), размерность Минковского, размерность Хаусдорфа и корреляционная размерность. Показано, что фрактальная размерность может принимать дробные значения, что отличает фрактальные объекты от классических геометрических фигур.

Во второй главе «Шум» введено понятие шума как случайного или псевдослучайного поля, определённого на некотором домене. Рассмотрены основные характеристики шума: автокорреляционная функция, спектральная плотность мощности, гладкость и стационарность. Описаны свойства белого шума: нулевое математическое ожидание, дельта-коррелированность и постоянная спектральная плотность мощности. Отмечено, что белый шум является математической абстракцией, нереализуемой в виде непрерывной функции, и используется как базовый источник случайности для построения более сложных коррелированных процессов.

Особое внимание уделено применению фракталов в анализе финансовых рисков. Выделены три ключевых свойства финансовых временных рядов: кластеризация волатильности (эффект Иосифа), долгосрочные зависимости (наличие «памяти» системы) и «толстые хвосты» распределения доходностей (эффект Ноя). Показано, что классические методы, основанные на нормальном распределении, неспособны адекватно описать эти свойства, что обосновывает необходимость применения фрактальных моделей.

В третьей главе «Виды шумов» описаны интерполяционные шумы, разработанные для преодоления ограничений белого шума. Рассмотрен

шум значений (Value Noise), основанный на интерполяции псевдослучайных значений, заданных на регулярной решётке. Для обеспечения непрерывности первой производной применяется fade-функция $f(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3$, предложенная К. Перлином. Описан градиентный шум (Gradient Noise), в котором в узлах решётки хранятся не скалярные значения, а единичные случайные градиентные векторы, что позволяет получать более гладкие и естественные текстуры. Градиентный шум стал фундаментом для последующих алгоритмов: классического шума Перлина, Improved Perlin Noise, Simplex Noise.

В четвёртой главе «Фрактальные шумы и их применение в финансовой сфере» введено понятие фрактального шума как композиционной модели, получаемой рекурсивным суммированием базовых шумовых функций на различных масштабах (октавах). Классическая формула фрактального шума имеет вид:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \text{gain}^i \cdot \text{noise}(\text{lacunarity}^i \cdot x),$$

где N — количество октав, $\text{gain} \in (0, 1)$ — коэффициент затухания амплитуды, $\text{lacunarity} > 1$ — коэффициент увеличения частоты. Показано, что фрактальный шум аппроксимирует $1/f^\beta$ -спектры, широко распространённые в природных и экономических системах, причём показатель β связан с параметрами модели соотношением $\beta = -2 \log_{\text{lacunarity}}(\text{gain})$.

Дано формальное описание шести фрактальных моделей, реализованных в работе:

1. **Perlin-FBM** — базовое суммирование октав шума Перлина.
2. **Дробное броуновское движение (fBm)** — гауссовский процесс с ковариационной функцией $\mathbb{E}[B_H(t)B_H(s)] = \frac{\sigma^2}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H})$, где $H \in (0, 1)$ — показатель Хёрста. При $H > 0,5$ процесс персистентен (трендовый), при $H = 0,5$ соответствует классическому броуновскому движению, при $H < 0,5$ — антиперсистентен (возврат к среднему).
3. **Турбулентный шум (Turbulence)** — модификация Perlin-FBM с взятием модуля от каждой октавы: $T(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \text{gain}^i \cdot |\text{noise}(\text{lacunarity}^i \cdot x)|$.
4. **Хребтовый шум (Ridge)** — нелинейное преобразование, создающее локальные экстремумы: $R(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \text{gain}^i \cdot (1 - |1 - 2 \cdot \text{noise}(\text{lacunarity}^i \cdot x)|)$.

$x)|)$.

5. **Гибридный мультифрактал (Hybrid MF)** — модель, в которой амплитуда последующих октав зависит от накопленной суммы предыдущих, что позволяет адаптировать детализацию под текущую структуру ряда.
6. **Неоднородный фрактал (Heterogeneous)** — модель, связывающая амплитуду с текущим значением «высоты» (накопленной суммой), моделируя положительную обратную связь.

В пятой главе «Реализация программного обеспечения и экспериментальные результаты» описана архитектура разработанного приложения на языке Python. Программа реализует модули: загрузки и очистки данных через API Yahoo Finance, генерации шести фрактальных моделей, вычисления метрик качества MAE и RMSE, визуализации прогнозов и сохранения графиков.

Разработанное приложение имеет модульную структуру, включающую следующие компоненты:

- **Модуль загрузки данных (data loader)** — осуществляет загрузку исторических котировок через API Yahoo Finance, удаляет пропуски и дубликаты цен, формирует обучающую и тестовую выборки.
- **Модуль фрактальных моделей (fractal models)** — содержит реализации шести моделей: Perlin-FBM, fBm, Turbulence, Ridge, Hybrid MF и Heterogeneous. Каждая модель реализована в виде отдельной функции с параметрами, управляющими её поведением.
- **Модуль оценки качества (evaluation)** — вычисляет метрики MAE и RMSE для сопоставления точности прогнозов различных моделей.
- **Модуль визуализации** — строит графики сравнения прогнозов, сохраняет их в формате PNG для последующего анализа.

Для количественной оценки точности прогнозирования использовались две стандартные метрики. Средняя абсолютная ошибка (Mean Absolute Error, MAE) определяется как среднее арифметическое модулей разностей между прогнозируемыми и реальными значениями:

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|,$$

где y_i — реальное значение, \hat{y}_i — прогноз, n — количество точек прогноза. MAE менее чувствителен к выбросам и интерпретируется как средняя ошибка прогноза в тех же единицах, что и исходные данные.

Корень из среднеквадратичной ошибки (Root Mean Squared Error, RMSE) вычисляется как квадратный корень из среднего квадратов отклонений:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

RMSE усиливает влияние крупных ошибок, что делает его более строгой мерой качества, особенно важной при анализе финансовых рисков.

Эксперимент проводился на исторических данных четырёх финансовых инструментов за период с 1 апреля 2025 по 1 апреля 2026 года (365 дней): индекс S&P 500 (^GSPC), акции Apple Inc. (AAPL), фьючерс на золото (GC=F) и криптовалюта Ethereum (ETH-USD). Обучающая выборка составила 75% данных (273 дня), тестовая — 25% (92 дня). Калибровка моделей осуществлялась путём масштабирования амплитуды шумовых приращений под эмпирическую волатильность обучающей выборки.

Эксперимент 1 проводился с фиксированными параметрами: $N = 6$ октав, $\text{gain} = 0,7$, $\text{lacunarity} = 2,5$, $H = 0,6$ (для fBm). Результаты представлены в таблице 1.

Анализ результатов показал, что ни одна модель не является универсально лучшей. Для S&P 500 минимальную ошибку продемонстрировал Ridge Noise (MAE = 171,44), что объясняется его способностью точно воспроизводить локальные экстремумы. Для Apple наилучший результат показал Perlin-FBM (MAE = 8,18). Для золота — Turbulence Noise (MAE = 508,14), что указывает на наличие резких всплесков волатильности в анализируемый период. Для Ethereum также лидировал Ridge Noise (MAE = 558,70). fBm с фиксированным параметром $H = 0,6$ во всех случаях показала наихудшую точность, что подтверждает неадекватность фиксированного параметра Хёрста для краткосрочного прогнозирования.

Эксперимент 2 заключался в подборе оптимальных параметров методом grid search. Для дробного броуновского движения (fbm) исследовался параметр Хёрста $H \in \{0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8\}$. Для моделей Perlin-FBM, Turbulence и Ridge Noise проводился перебор persistence $\in \{0,5; 0,6; 0,7; 0,8\}$

Таблица 1 – Сравнение моделей по метрикам MAE и RMSE (Эксперимент 1)

Модель	S&P 500	AAPL	Золото	Ethereum
Perlin-FBM	186,64 / 240,31	8,18 / 10,01	639,11 / 718,22	594,89 / 653,23
fBm ($H = 0,6$)	1340,86 / 1536,13	106,29 / 122,49	523,44 / 657,59	561,04 / 657,31
Turbulence	333,47 / 373,64	20,75 / 24,62	508,14 / 563,60	1128,41 / 1326,76
Ridge Noise	171,44 / 209,76	9,70 / 11,36	589,71 / 671,71	558,70 / 617,20
Hybrid MF	185,38 / 238,75	8,20 / 10,02	637,35 / 716,58	594,56 / 652,87
Heterogeneous	190,36 / 246,62	8,44 / 10,41	635,66 / 714,96	582,45 / 641,84

и lacunarity $\in \{1, 5; 2, 0; 2, 5; 3, 0\}$. Для Hybrid MF и Heterogeneous подбирались параметры α и β соответственно.

Получены следующие результаты:

- Для всех активов минимальная ошибка fBm достигается при $H = 0, 3$, что указывает на антиперсистентный характер рынка в анализируемый период. Наибольшее абсолютное улучшение при подборе параметров наблюдается для золота (снижение MAE с 523,44 до 383,55) и Ethereum (с 561,04 до 419,93).
- Для S&P 500 наилучший результат показал Ridge Noise с параметрами persistence = 0, 8, lacunarity = 1, 5 (MAE = 127,33), что значительно превосходит базовую конфигурацию (MAE = 171,44).
- Для Apple абсолютное преимущество имеют модели Perlin-FBM и Hybrid MF (MAE = 7,55). Подбор параметров позволил улучшить точность прогнозирования более чем на 7% по сравнению с базовой конфигурацией.
- Для Ethereum неожиданным результатом стало превосходство fBm с $H = 0, 3$ (MAE = 419,93) над всеми остальными моделями, что указывает на антиперсистентный характер крипторынка.
- Для золота абсолютное преимущество демонстрирует Turbulence Noise с параметрами persistence = 0, 5, lacunarity = 3, 0 (MAE = 348,13), что подтверждает способность данной модели моделировать резкие всплески волатильности. Подбор параметров позволил снизить ошибку более чем на 31%.

Примечание к таблице 2: в скобках указаны оптимальные значения параметров: для Perlin-FBM, Turbulence, Ridge — persistence/lacunarity, для fBm — H

Результаты подбора параметров визуализированы на рисунках 11 и 12.

Таблица 2 – Оптимальные параметры и ошибки моделей (Эксперимент 2)

Модель	S&P 500	AAPL	Золото	Ethereum
fBm (H_{opt})	1114,80 (0,3)	88,24 (0,3)	383,55 (0,3)	419,93 (0,3)
Perlin-FBM	158,50 (0,8/1,5)	7,55 (0,8/1,5)	583,54 (0,8/3,0)	545,17 (0,8/3,0)
Turbulence	218,05 (0,5/1,5)	14,21 (0,6/1,5)	348,13 (0,5/3,0)	463,51 (0,8/1,5)
Ridge Noise	127,33 (0,8/1,5)	8,68 (0,6/2,5)	550,72 (0,8/2,5)	518,65 (0,8/3,0)
Hybrid MF	158,48	7,55	583,72	545,28
Heterogeneous	180,28	7,77	616,32	506,11

На рисунке 11 представлено сравнение MAE моделей до и после подбора параметров, на рисунке 12 — процент улучшения качества прогнозирования. Наибольшее относительное улучшение достигнуто для турбулентного шума на Ethereum (снижение MAE на 58,9%), что объясняется способностью данной модели генерировать нелинейные всплески, совпавшие с высокой волатильностью крипторынка.

Проведённое исследование позволяет сформулировать следующие рекомендации по выбору фрактальной модели в зависимости от типа актива: для традиционных трендовых рынков (S&P 500, Apple) предпочтителен Ridge Noise; для активов с резкими всплесками волатильности (золото) — Turbulence Noise; для антиперсистентных рынков (криптовалюта) — дробное броуновское движение с оптимизированным параметром Хёрста $H = 0,3$; для общего применения в качестве надёжной базовой модели может использоваться Perlin-FBM.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были систематизированы современные представления о фрактальных шумах и их применении в финансовом моделировании. Реализовано приложение на языке Python, позволяющее генерировать и сравнивать шесть фрактальных моделей: Perlin-fBm, дробное броуновское движение, турбулентный шум, хребтовый шум, гибридный мультифрактал и неоднородный фрактал.

Экспериментальное сравнение на данных S&P 500, Apple, Ethereum и золота показало, что ни одна модель не является универсально лучшей. Выбор оптимального метода зависит от типа актива и характера рыночного режима:

- Для традиционных трендовых рынков (S&P 500, AAPL) предпочтительнее Ridge Noise, обеспечивающий наименьшую ошибку прогнозирования (MAE = 127,33 и 8,68 соответственно).
- Для активов с резкими всплесками волатильности (золото) наилучшие результаты демонстрирует Turbulence Noise (MAE = 348,13), что подтверждает его способность моделировать «толстые хвосты» распределения доходностей.
- Для криптовалюты Ethereum неожиданным результатом стало превосходство дробного броуновского движения с оптимальным параметром $H = 0,3$ (MAE = 419,93), что указывает на антиперсистентный характер крипторынка в анализируемый период.

Подбор параметров моделей позволил значительно улучшить точность прогнозирования: наиболее существенное улучшение достигнуто для золота (снижение MAE на 31,5%) и Ethereum (снижение MAE на 25,1%). Наибольшее относительное улучшение показал турбулентный шум на Ethereum — снижение MAE на 58,9%. Для всех активов минимальная ошибка fBm достигается при $H = 0,3$, что свидетельствует об антиперсистентности рынка в анализируемый период.

Полученные результаты могут быть использованы для построения адаптивных систем прогнозирования, учитывающих тип актива и текущий рыночный режим. Разработанное программное обеспечение может найти применение в учебном процессе при изучении методов прогнозирования временных рядов, а также в аналитических подразделениях финансовых организаций.

Основные источники информации:

1. Гелашвили Д. Б., Иудин Д. И., Розенберг Г. С., Якимов В. Н., Солнцев Л. А. 2.3. Регулярные фракталы // Фракталы и мультифракталы в биоэкологии. — Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2013. — С. 49. — 370 с. — ISBN 978-5-91326-246-2.
2. А. А. Потапов, Ю. В. Гуляев, С. А. Никитов, А. А. Пахомов, В. А. Герман. Классические фрактальные кривые и множества // Новейшие методы обработки изображений / А. А. Потапов. — М.: «Физматлит», 2008. — С. 82. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-0841-6.
3. Абачиев С. К. О треугольнике Паскаля, простых делителях и фрактальных структурах // В мире науки, 1989, № 9.
4. Энгелькинг Р. . Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.
5. Мандельброт Б. Б. Фракталы и возрождение теории итераций // Пайген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. С. 131–140.
6. Mandelbrot B.B., The fractal geometry of nature, San Francisco, Freeman, 1982.
7. Fractals & the Fractal Dimension [Электронный ресурс] URL: <https://www.vanderbilt.edu/fractals/> (дата обращения 26.02.2026).
8. C. Douketis, Z. Wang, T. L. Haslett, M. Moskovits: Fractal character of cold-deposited silver films determined by low-temperature scanning tunneling microscopy. Physical Review B 51 (1995) 11022
9. W. Zahn, A. Zösch: The dependence of fractal dimension on measuring conditions of scanning probe microscopy. Fresenius J Analen Chem 365 (1999) 168-172
10. Peleg Shmuel, Naor Joseph, Hartley Ralph, Avnir David. Multiple Resolution Texture Analysis and Classification. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. PAMI-6, No.4, 1984. P. 518–523.
11. Tang Y. Y., Hong Ma, Dihua Xi, Xiaogang Mao, Suen C. Y. Modified Fractal Signature (MFS): A New Approach to Document Analysis for Automatic Knowledge Acquisition. IEEE Trans. Knowledge and Data Eng., vol. 9. No. 5. 1997. P. 742–762.
12. Федер Е. Фракталы / Е. Федер. — М. : МИР, 1991. — 254 с. — ISBN 5-03-001712-7.

13. Головкин В.А. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов. // В книге «Лекции по нейроинформатике». – М.: МИФИ, 2005. С. 43-88.
14. Takens F. On the numerical determination of the dimension of an attractor. In: Dynamical systems and bifurcations (Eds. B.L.J. Braaksma, H.W. Broer and F. Takens). Lect. Notes in Math. 1125, Springer, Heidelberg. 1985.
15. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. Москва. УРСС.2002, 358 с
16. David Ebert, Kent Musgrave, Darwyn Peachey, Ken Perlin, and Worley. Texturing and Modeling: A Procedural Approach. Academic Press, October 1994. ISBN 0-12-228760-6
17. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение / П. Леви. — М. : Наука, 1972.
18. Беран Дж. Статистика для процессов с долговременной памятью / Дж. Беран. — Л. : Chapman & Hall, 1994.
19. Колпаков И. Ю. Эконофизика и ее применение в анализе фондовых рынков // Вестник Алтайской академии экономики и права. – 2019. – № 9-1. – С. 100-105.
20. Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. — М.: Радио и связь, 1985.