

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра системного анализа и автоматического управления

**ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
КОММУТАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 Информатика и вычислительная техника
факультет компьютерных наук и информационных технологий
Негода Даниила Константиновича

Научный руководитель
доцент, к. ф.-м. н.

Е. П. Станкевич

Заведующий кафедрой
к. ф.-м. н., доцент

И. Е. Тананко

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Современное общество невозможно представить без эффективных телекоммуникационных систем, которые обеспечивают передачу информации на большие расстояния за короткие промежутки времени. Коммутационные системы, являющиеся основой телефонных сетей, интернета и других способов связи, играют ключевую роль в этом процессе. В условиях постоянно растущих объемов информации и увеличения числа пользователей проблема анализа и оптимизации данных систем становится все более актуальной. Для эффективного управления и проектирования коммутационных систем разрабатываются математические модели, описывающие их функционирование. Среди них особое место занимают звеньевые коммутационные системы, которые позволяют снизить число точек коммутации по сравнению с простым коммутатором. Анализ таких систем может быть выполнен различными методами, одним из которых является комбинаторный метод К. Якобеуса, позволяющий рассчитать вероятность потерь вызовов.

Цель бакалаврской работы — изучить математическую модель коммутационных систем и провести её анализ.

Поставленная цель определила **следующие задачи**:

1. изучить основные понятия, принципы построения и классификации коммутационных систем;
2. рассмотреть математические модели звеньевых коммутационных систем и методы их анализа;
3. разработать программу для анализа модели коммутационных систем;
4. выполнить численные эксперименты с программой и проанализировать зависимость вероятности потерь от параметров системы.

Методологической основой работы послужили труды отечественных и зарубежных учёных в области теории телетрафика и коммутационных систем, таких как Б. С. Гольдштейн [1], Е. Д. Бычков [2], А.З. Меликов [3], Б. С. Лившиц [4], В.В. Крылов [5] и др.

Практическая значимость бакалаврской работы. В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были разработаны две программы, реализующие расчёт вероятности потерь в двухзвеньевых коммутационных системах по комбинаторному методу Якобеуса с использованием распре-

делений Эрланга и Бернулли. Разработанные программы могут применяться для оптимизации параметров реальных коммутационных систем при проектировании.

Структура и объем работы. Бакалаврская работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы — 48 страниц, из них 42 страницы — основное содержание, включая 22 рисунка и 6 таблиц, список использованных источников информации — 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первый раздел «Коммутационные системы» посвящён описанию основных понятий, принципов построения и классификации коммутационных систем.

В подразделе 1.1 дано определение коммутационной системы, рассмотрен простейший коммутатор, его характеристики (число точек поля коммутации, блокируемость) и ограничения, приводящие к необходимости использования многозвенных схем [6].

В подразделе 1.2 описаны основные компоненты коммутационных систем: коммутаторы, маршрутизаторы, модемы, серверы и клиенты [7].

В подразделе 1.3 рассмотрены принципы работы коммутационных систем: принцип коммутации, принцип маршрутизации, принцип управления потоком, а также основные функции (передача данных, управление потоком, обеспечение качества обслуживания, безопасность данных) [8].

В подразделе 1.4 приведена классификация коммутационных систем по типу сети (локальные, глобальные, метрополитенские) и по типу передачи данных (пакетная коммутация, коммутация каналов, коммутация сообщений) [9].

Второй раздел «Математические модели коммутационных систем» посвящён описанию математических моделей звеньевых коммутационных систем и комбинаторного метода К. Якобеуса для анализа двухзвеньевых схем.

В подразделе 2.1 приведены общие сведения о моделях звеньевых систем. В отличие от простейших однозвеньевых схем, где соединение входа с выходом осуществляется через одну точку коммутации, в звеньевых коммутационных системах соединительный путь содержит два и более звеньев, а

также промежуточные линии. Звеньевая коммутационная система представляет собой структуру, состоящую из коммутаторов, объединенных промежуточными линиями. Каждый соединительный путь в такой системе задается упорядоченным набором промежуточных линий, причем любые две соседние промежуточные линии могут быть соединены между собой в точке коммутации. Рассмотрены условия возникновения потерь вызовов: занятость всех промежуточных линий, доступных для данного вызова; занятость всех выходов требуемого направления; неудачные комбинации свободных промежуточных линий и свободных выходов.

Подраздел 2.2 посвящён комбинаторному методу исследования двухзвеньевых схем, разработанному шведским учёным К. Якобеусом [4]. Рассмотрим односвязную двухзвеньевую схему, у которой каждый коммутатор первого звена соединен с каждым коммутатором второго звена одной промежуточной линией.

Пусть схема содержит k коммутаторов в первом звене с n входами и m выходами каждый, и m коммутаторов во втором звене с k входами и l выходами каждый. Выходы схемы могут быть разбиты на направления; для некоторого направления H_i в каждом коммутаторе второго звена отводится q выходов, так что общее число выходов в направлении составляет mq .

Если вызов поступает на некоторый вход первого коммутатора, то для его обслуживания могут быть использованы m промежуточных линий и m выходов требуемого направления. Соединение может быть установлено только при наличии свободной и взаимно доступной пары "промежуточная линия – выход".

Приведена основная формула метода для вероятности потерь:

$$p = \sum_{i=0}^m W_i H_{m-i}, \quad (2.1)$$

где W_i – вероятность занятия любых i из m промежуточных линий, принадлежащих одному коммутатору первого звена; H_{m-i} – вероятность занятия определённых $m - i$ выходов (соответствующих свободным промежуточным линиям). Описаны два типа распределений, используемых для расчёта этих вероятностей. Распределение Эрланга применяется, когда число источников нагрузки больше числа обслуживаемых приборов; вероятность занятия i лю-

бых соединительных устройств определяется по формуле:

$$W_i = \frac{y^i/i!}{\sum_{j=0}^m (y^j/j!)}. \quad (2.2)$$

Вероятность занятия $m - i$ фиксированных соединительных устройств выражается через отношение потерь Эрланга:

$$H_{m-i} = \frac{E_m(y)}{E_i(y)}. \quad (2.3)$$

Распределение Бернулли применяется при числе источников нагрузки, примерно равном числу соединительных устройств. В этом случае:

$$W_i = C_m^i \eta^i (1 - \eta)^{m-i}, \quad H_{m-i} = \eta^{m-i}, \quad (2.4)$$

где η – средняя нагрузка, обслуженная одним соединительным устройством. Распределение Эрланга применяется при определении вероятности занятия тех соединительных устройств, для которых число источников нагрузки больше числа соединительных устройств, а распределение Бернулли – при числе источников, примерно равном числу соединительных устройств.

В подразделе 2.3 рассмотрены схемы без сжатия и расширения, когда число входов n в коммутатор первого звена равно числу выходов m из него. Для этого случая используются компактные выражения вероятности потерь. При использовании распределения Бернулли как для промежуточных линий, так и для выходов:

$$p = (b + c - bc)^m, \quad (2.5)$$

где b – средняя интенсивность нагрузки, обслуженной одной промежуточной линией, c – средняя интенсивность нагрузки, обслуженной одним выходом рассматриваемого направления. Выражение для потерь, если число коммутаторов в первом звене велико и для выходов целесообразно принять распределение Эрланга:

$$p = \frac{E_m(y)}{E_m(y/b)}. \quad (2.6)$$

Для случая, когда на направление отводится в каждом коммутаторе второго звена q выходов, приведены обобщённые формулы, включающие па-

раметр q .

В подразделе 2.4 рассмотрены схемы при наличии сжатия (концентрации) или расширения. В схемах со сжатием число входов n больше числа выходов m . Потери возникают как из-за неудачных сочетаний занятых промежуточных линий и выходов, так и при поступлении на входы коммутатора первого звена более m вызовов. Для двухэтапного искания свободных выходов получены приближённые выражения:

$$p = b^m + (b + c - bc)^{mq}, \quad (2.7)$$

$$p = b^m + \frac{E_{mq}(y)}{E_{mq}(y/b)}. \quad (2.8)$$

В схемах с расширением ($n < m$) число одновременных вызовов не превышает n , что меньше m , поэтому потери имеют место только за счёт неудачных сочетаний и рассчитывается по формуле:

$$p = c^{q(m-n)}(a + c^q - ac^q)^n, \quad (2.9)$$

$$p = \frac{E_{mq}(y)}{E_{nq}(y/a)}. \quad (2.10)$$

Третий раздел «Программная реализация модели Якобеуса» посвящён описанию программы для анализа модели коммутационной системы для базового случая.

В подразделе 3.1 описан алгоритм расчёта вероятности потерь, включающий 5 блоков: ввод параметров, проверка корректности данных, расчёт для распределения Эрланга, расчёт для распределения Бернулли, вывод результатов. Приведены формулы, реализованные в алгоритме.

Подраздел 3.2 содержит описание программы, написанной на языке Python. Перечислены используемые библиотеки (`math`, `scipy.special`), описаны реализованные функции. Приведён список основных идентификаторов.

В подразделе 3.3 описан пример использования программы с оконным интерфейсом.

Представлены результаты численных экспериментов в виде таблицы и графиков зависимости вероятности потерь от числа промежуточных линий m (рисунок 1) и интенсивности нагрузки y (рисунок 2).

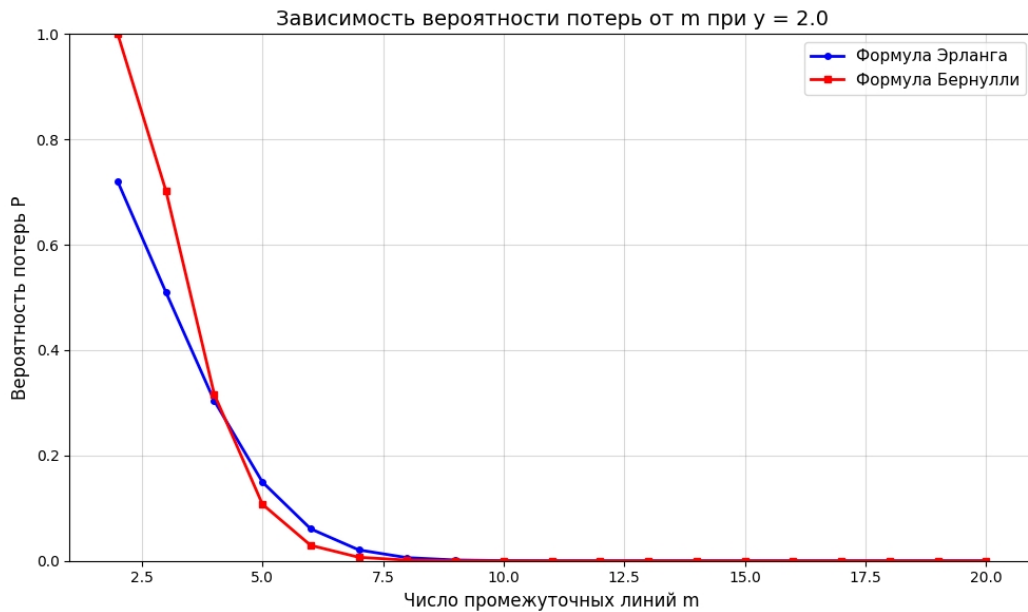


Рисунок 1 – Зависимость вероятности потерь p от числа промежуточных линий m

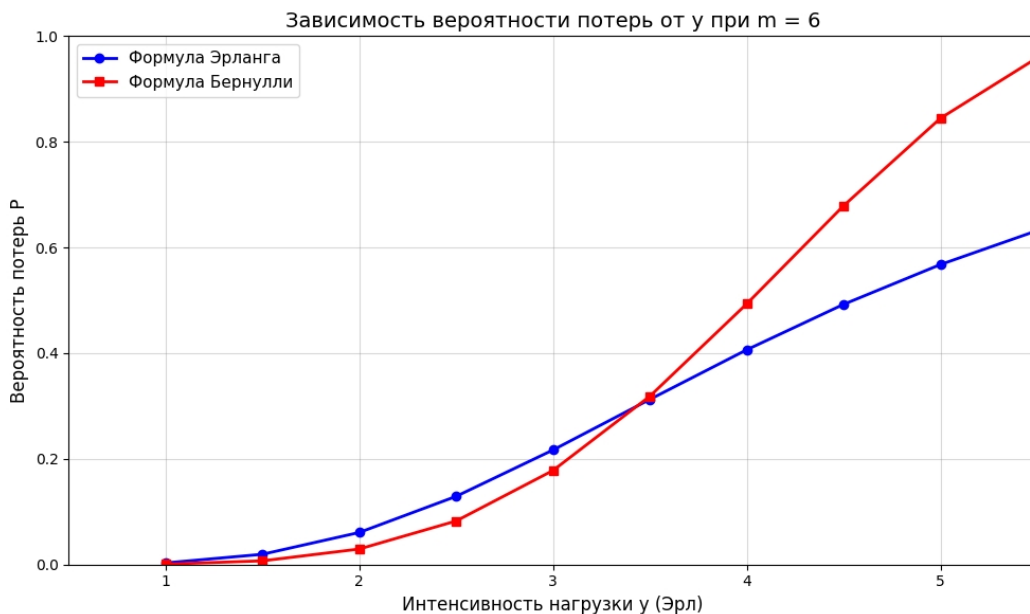


Рисунок 2 – Зависимость вероятности потерь p от интенсивности нагрузки y

В ходе экспериментов при фиксированной интенсивности нагрузки $y = 2.0$ установлено, что с ростом m вероятность потерь монотонно убывает для обеих моделей. При фиксированном числе промежуточных линий $m = 6$ установлено, что вероятность потерь возрастает с увеличением y . Модель Эрланга даёт более высокие оценки потерь, чем модель Бернулли, особенно при высокой нагрузке.

Четвертый раздел «Программная реализация модели коммутационных систем с учётом сжатия и расширения» посвящён разработке программы для анализа коммутационных систем в режимах сжатия, расширения и без сжатия/расширения.

В подразделе 4.1 описан алгоритм расчёта вероятности потерь, включающий 7 блоков: ввод параметров (n, m, q, a, y) , проверка корректности данных, определение режима работы (по соотношению n и m), расчёт для каждого из трёх режимов, вывод результатов.

Подраздел 4.2 содержит описание программы. Приведён список идентификаторов, описание основной функции, реализующей выбор формул в зависимости от режима работы.

В подразделе 4.3 описан пример использования программы с оконным интерфейсом.

В подразделе 4.4 приведены результаты численных экспериментов в виде трёх таблиц (для режимов без сжатия/расширения, сжатия и расширения). Проведён анализ зависимостей вероятности потерь от параметров системы для каждого режима.

Для режима без сжатия и расширения при фиксированных $b = 0.2$ и $y = 5.0$ установлено, что с ростом m вероятность потерь убывает; при фиксированных $m = 10$ и $y = 5.0$ установлено, что с ростом b вероятность потерь возрастает; при фиксированных $m = 10$ и $b = 0.2$ установлено, что с ростом y вероятность потерь возрастает.

Для режима сжатия при фиксированных $m = 8, q = 2, a = 0.5$ и $y = 8.0$ установлено, что с ростом n вероятность потерь возрастает; при фиксированных $n = 12, q = 2, a = 0.5$ и $y = 8.0$ установлено, что с ростом m вероятность потерь убывает; при фиксированных $n = 12, m = 8, a = 0.5$ и $y = 8.0$ установлено, что с ростом q вероятность потерь убывает; при фиксированных $n = 12, m = 8, q = 2$ и $y = 8.0$ установлено, что с ростом a вероятность потерь возрастает; при фиксированных $n = 12, m = 8, q = 2$ и $a = 0.5$ установлено, что с ростом y вероятность потерь возрастает.

Для режима расширения при фиксированных $m = 12, q = 2, a = 0.5$ и $y = 8.0$ установлено, что с ростом n вероятность потерь возрастает; при фиксированных $n = 8, q = 2, a = 0.5$ и $y = 8.0$ установлено, что с ростом m вероятность потерь убывает; при фиксированных $n = 8, m = 12, a =$

0.5 и $y = 8.0$ установлено, что с ростом q вероятность потерь убывает; при фиксированных $n = 8$, $m = 12$, $q = 2$ и $y = 8.0$ установлено, что с ростом a вероятность потерь возрастает; при фиксированных $n = 8$, $m = 12$, $q = 2$ и $a = 0.5$ установлено, что с ростом y вероятность потерь возрастает. Значения вероятности потерь в режиме расширения на несколько порядков ниже, чем в других режимах. Модель Эрланга во всех рассмотренных режимах даёт более высокие оценки вероятности потерь по сравнению с моделью Бернулли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была исследована математическая модель двухзвеневой коммутационной системы на основе комбинаторного метода К. Якобеуса. Проведён анализ вероятности потерь вызовов в зависимости от структуры системы (числа входов, выходов, промежуточных линий) и параметров нагрузки. Рассмотрены три режима работы: сжатие, расширение и режим без преобразования, что позволило выявить основные факторы, влияющие на эффективность обслуживания.

Разработаны две программы на языке Python, реализующие расчёт вероятности потерь с использованием распределений Эрланга и Бернулли. Первая программа предназначена для базового случая, вторая — для режимов концентрации и расширения с возможностью учёта числа выходов на направление.

Выполненные численные эксперименты показали, что модель Эрланга даёт более высокие оценки потерь, чем модель Бернулли, особенно при высокой нагрузке. Разработанные программы могут применяться для оптимизации параметров реальных коммутационных систем при проектировании.

Основные источники информации:

1. Гольдштейн, Б.С. Сети связи / Б.С. Гольдштейн, Н.А. Соколов, Г.Г. Яновский. – СПб.: БХВ-Санкт-Петербург, 2010. — 400 с.
2. Бычков, Е. Д. Основы инфокоммуникационных технологий. Теория телетрафика : учебное пособие / Е. Д. Бычков, В. А. Майстренко, О. Н. Коваленко, Д. Н. Коваленко ; под редакцией В. А. Майстренко. – М.: Ай Пи Ар Медиа, 2023. — 154 с.
3. Меликов, А.З. Телетрафик: Модели, методы, оптимизация / А.З. Меликов, Л.А. Пономаренко, В.В. Паладюк. – К.: ИПК "Политехника 2007. — 256 с.

4. Лившиц, Б.С. Теория телетрафика/ Б. С. Лившиц, А. П. Пшеничников, А. Д. Харкевич. – М.: Связь, 1979. — 224 с.
5. Крылов, В.В. Теория телетрафика и её приложение/ В.В. Крылов С.С. Самохвалова // Теория телетрафика и её приложение. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 288 с.
6. Баланов, А. Н. Телекоммуникационные системы. Управление, оптимизация и интеграция : учебное пособие для вузов / А. Н. Баланов. – Санкт-Петербург : Лань, 2024. — 376 с.
7. Лапшин, С. М. Системы коммутации и протоколы сигнализации / С. М. Лапшин // учеб.-метод. пособие. - Минск: БГУИР, 2017. - 80 с.
8. Корниенко, В.Т. Основы построения коммутаторов сетей связи/ В.Т. Корниенко. – Кисловодск: Издательство КГТИ, 2018. – 113 с.
9. Винокуров, В.М. СЕТИ СВЯЗИ И СИСТЕМЫ КОММУТАЦИИ/ В.М. Винокуров. – Томск.: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2012. — 304 с.