

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

**РАЗРАБОТКА WEB-ПРИЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ
УСТОЙЧИВЫХ ПАРОСОЧЕТАНИЙ НА ОСНОВЕ
АЛГОРИТМА ГЕЙЛА – ШЕПЛИ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
направления 09.03.01 — Информатика и вычислительная техника
факультета КНиИТ
Филиппова Михаила Владимировича

Научный руководитель

к. э. н., доцент

Г. Ю. Чернышова

Заведующий кафедрой

к. ф.-м. н., доцент

Л. Б. Тяпаев

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире ускоряются процессы цифровизации и усложняются социально-экономические системы, вследствие чего возрастают задачи эффективного распределения ограниченных ресурсов. К ним относятся распределение ординаторов по больницам, распределение абитуриентов по вузам, подбор сотрудников для компаний, распределение социальных услуг, распределение инвестиционных проектов по регионам и многие другие. Во всех этих случаях необходимо учитывать предпочтения участников процесса, что существенно усложняет задачу распределения.

В ходе решения задачи распределения появляется новая проблема – проблема нестабильных паросочетаний, при которой стороны не удовлетворены результатами и существуют блокирующие пары, участники которых имеют рациональный стимул разрушить существующую пару и объединиться друг с другом, что запускает цепную реакцию разрушения и образования новых пар. В разрушении существующей пары проявляется неустойчивость паросочетания.

Классические методы оптимизации максимизируют суммарную ценность распределения, но не гарантируют его устойчивости. Для решения проблемы появления блокирующих пар применяется алгоритм Гейла – Шепли. Он решает задачу о стабильном паросочетании двух множеств элементов на основе их предпочтений. В ходе применения алгоритма в зависимости от выбирающей стороны достигается наилучший возможный результат для этой группы. Двойственность алгоритма делает его гибким инструментом, который легко адаптируется к различным сценариям распределения. Свойства алгоритма позволяют применять его в социально значимых задачах, для которых важно избегать недовольства со стороны заинтересованных сторон, а оптимальность итогового распределения показывает его экономическую эффективность. Все эти свойства позволяют рассмотреть алгоритм к применению в государственных органах. В мире, где растёт конкуренция за ограниченные ресурсы, алгоритм Гейла – Шепли становится всё более ценным инструментом в задачах распределения ресурсов с перспективой применения в различных сферах. Для работы алгоритма Гейла – Шепли на вход требуется подать линейно упорядоченные списки предпочтений для каждого агента стороны *A* и стороны *B*. В реальных задачах распределения предпочтения не всегда

заранее известны, часто задача определяется несколькими разными критериями одновременно. Агрегирование таких критериев позволяет построить списки предпочтений для агентов и объектов.

Практическое применение алгоритма Гейла – Шепли требует доступного инструмента, не предполагающего у пользователя специальных технических знаний. Web-приложение обеспечивает независимость платформы пользователя, централизованное хранение данных и возможность совместного доступа нескольких сторон к единому интерфейсу. В отличие от реализации в виде настольного приложения, web-приложение может быть использовано без установки дополнительного программного обеспечения на стороне пользователя.

Цель работы – разработка web-приложения для построения устойчивых паросочетаний на основе алгоритма Гейла – Шепли.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- проанализировать алгоритмы построения устойчивых паросочетаний;
- разработать метод формирования устойчивых паросочетаний в условиях многокритериальной оценки;
- спроектировать архитектуру web-приложения и выполнить его программную реализацию;
- апробировать приложение на примере распределения инвестиционных проектов по регионам России.

В качестве объекта исследования выступают алгоритмы формирования устойчивых паросочетаний при двустороннем распределении агентов и объектов по их предпочтениям с учётом квот объектов принимающей стороны. Предметом исследования является применение модификации алгоритма Гейла – Шепли при многокритериальной оценке.

Бакалаврская работа состоит из четырёх разделов.

В первом разделе представлены теоретические основы задачи нахождения устойчивых паросочетаний, сформулированы и доказаны ключевые теоремы алгоритма, рассмотрены альтернативные подходы к решению задач о назначениях – венгерский метод и метод линейного программирования. Проанализированы существующие реализации алгоритма с отложенным принятием.

Во втором разделе представлена методика, позволяющая перейти от многокритериальной оценки совместимости к устойчивым паросочетаниям. Систематизированы существующие модификации классического алгоритма. Предложена методика, в которой для каждой пары вычисляются оценки по правилам сравнения либо извлекаются из контекстно-зависимых критериев, оценки агрегируются в две итоговые матрицы совместимости с разделением критериев по сторонам-ранжирующим, из матриц выводятся списки предпочтений, применяется алгоритм Гейла – Шепли с квотами, формируется тепловая карта устойчивости с классификацией несопоставленных пар по четырём зонам.

В третьем разделе описана программная реализация. Спроектирована клиент-серверная архитектура на платформе Python. Разработана реляционная модель данных, поддерживающая произвольную предметную область. Спроектирован программный интерфейс REST. Реализована клиентская часть приложения.

В четвёртом разделе приведен пример применения разработанного приложения, подготовлены исходные данные, выполнены вычислительные этапы и проанализированы результаты построения устойчивого распределения.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первом разделе представлены теоретические основы задачи нахождения устойчивых паросочетаний. Задача формулируется на двудольном графе $G = (A \cup B, E)$, где доли A и B соответствуют двум сторонам распределения. Приведён алгоритм с отложенным принятием в интерпретации Клейнберга и Тардос и введены ключевые понятия: паросочетание, блокирующая пара, стабильное паросочетание. Показано принципиальное отличие задачи о стабильном паросочетании от задач о наибольшем паросочетании и о паросочетании наименьшего веса, в которых оптимизируется глобальная характеристика, тогда как стабильность является локальным условием. Рассмотрены альтернативные подходы к решению задач о назначениях – венгерский метод Куна и метод целочисленного линейного программирования; показано, что они обеспечивают оптимальность по суммарной стоимости, но не учитывают индивидуальные предпочтения и не гарантируют устойчивости. Проанализированы существующие крупномасштабные реализации алгоритма: американская система NRMP, канадская CaRMS, японская JRMP и централизованные системы зачисления в школы Нью-Йорка. Выявлены ограничения существующих систем: они работают с уже сформированными списками предпочтений, имеют узкую предметную специализацию и не готовы к непосредственной работе с многокритериальной оценкой.

Во втором разделе систематизированы существующие модификации классического алгоритма. На основе классификации предложена методика, переводящая многокритериальную оценку совместимости в устойчивые паросочетания. Критерии разделяются на два класса: независимые парные и контекстно-зависимые, а каждому критерию назначается ранжирующая сторона. Для пары (a_i, b_j) вычисляются оценки участников сторон по критерию $s_k(a_i, b_j)$ либо по одному из правил сравнения значений – близость значений, покрытие требования агентов объектами, покрытие требования объектов агентами, – либо непосредственно по значению контекстно-зависимого критерия; все оценки нормируются к диапазону $[0, 1]$. Частные оценки агрегируются в две матрицы совместимости усреднением по критериям соответствующей ранжирующей стороны:

$$S_A(a_i, b_j) = \frac{1}{|K_A|} \sum_{k \in K_A} s_k(a_i, b_j), \quad S_B(a_i, b_j) = \frac{1}{|K_B|} \sum_{k \in K_B} s_k(a_i, b_j),$$

где K_A и K_B – непересекающиеся множества критериев, ранжирующих стороны A и B . По матрицам S^A и S^B детерминированной устойчивой сортировкой строятся согласованные списки предпочтений, к которым применяется алгоритм Гейла – Шепли с квотами. После построения распределения формируется тепловая карта устойчивости на основе метрики расстояния до блокирования $BD(a_i, b_j) = \max(\Delta_A(a_i, b_j), \Delta_B(a_i, b_j))$, где Δ_A и Δ_B – отклонения со стороны агента и со стороны объекта. Несопоставленные пары классифицируются по четырём зонам устойчивости: «Безопасно», «Умеренно», «Рискованно» и «Блокирование». Предложенная модификация оставляет сам алгоритм Гейла – Шепли без изменений, но добавляет к нему предваряющий этап расчёта предпочтений из многокритериальной оценки и завершающий этап количественного анализа устойчивости.

В третьем разделе описана программная реализация методики в виде клиент-серверного web-приложения. Серверная часть реализована на языке Python 3.12 с использованием фреймворка FastAPI; вычислительное ядро, содержащее расчёт частных оценок, построение матриц совместимости, формирование списков предпочтений, алгоритм Гейла – Шепли и анализ устойчивости, выделено в отдельный слой из независимых функций с применением библиотеки NumPy. Инфраструктурный слой построен на SQLAlchemy, реляционной базе данных PostgreSQL 16 с управлением миграциями через Alembic и кеширующем слое Redis. Разработана реляционная модель данных с универсальными уникальными идентификаторами и разреженным хранением оценок, поддерживающая произвольную предметную область без изменения схемы базы данных. Спроектирован программный интерфейс по архитектурному стилю REST, маршруты которого соответствуют этапам вычислительного конвейера. Клиентская часть реализована на React 18 с TypeScript и сборщиком Vite и построена как пошаговый мастер настройки проекта: создание проекта, ввод агентов и объектов двух сторон, задание критериев, ввод числовых оценок, расчёт совместимости и построение распределения, анализ карты устойчивости с экспортом результатов в форматах PNG и PDF. Реализована аутентификация на основе временных ключей доступа и обновления с разграничением доступа на уровне привязки проекта к автору.

В четвёртом разделе приведена апробация приложения на задаче распределения инвестиционных проектов по регионам Российской Федера-

ции. Сформированы две группы агентов – пять инвестиционных проектов и четыре региона с заданными квотами. Выбраны пять критериев оценки, согласованных с Постановлением Правительства Российской Федерации № 1602 от 13 сентября 2022 года и Национальным рейтингом состояния инвестиционного климата субъектов Российской Федерации, формируемым Агентством стратегических инициатив; критерии распределены по сторонам-ранжирующим в соответствии с содержательной асимметрией задачи. Выполнены все вычислительные этапы: расчёт частных оценок по правилам сравнения, агрегирование в две матрицы совместимости, построение списков предпочтений и запуск алгоритма Гейла – Шепли с квотами. В построенном распределении все пять проектов получили назначения, квоты регионов учтены корректно, а распределение является стабильным, что подтверждено встроенной проверкой на отсутствие блокирующих пар. Анализ карты устойчивости показал, что блокирующих пар нет, а большинство несопоставленных пар находится в рискованной зоне со значениями BD , близкими к нулю, что объясняется выбором критериев и подтверждает работоспособность количественной диагностики устойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В бакалаврской работе классифицированы существующие методы решения задачи построения устойчивых паросочетаний. Предложен способ перехода от многокритериального сравнения к стабильным паросочетаниям. Он заключается в том, что для применения алгоритма Гейла – Шепли в условиях, когда совместимость участников оценивается по множеству различных критериев, разработаны дополнительные этапы, предваряющие вычисление стабильных пар. На этих этапах разнородные исходные оценки агентов и объектов сводятся к двум матрицам совместимости пар, отражающим интересы каждой из сторон при ранжировании; на основании этих матриц формируются согласованные списки предпочтений обеих сторон, и далее запускается классический алгоритм отложенного принятия.

Разработано web-приложение, реализующее предложенную методику. Пользователь может настроить алгоритм путём добавления связанных критериев, сформировать на их основе списки предпочтений и оценить итоговое распределение по тепловой карте устойчивости. Полученное распределение сопровождается количественной оценкой запаса прочности каждой пары – расстоянием до блокирования.

Возможно дальнейшее расширение вычислительных возможностей приложения за счет добавления новых модулей, таких как новые функции отношения критериев, добавление критериям весов, добавление дополнительных правил агрегирования оценок и инструментов анализа чувствительности результата к изменениям входных данных.

В настоящей работе программа применена к актуальной задаче размещения инвестиционных проектов по регионам Российской Федерации с использованием критериев, заданных Постановлением Правительства РФ № 1602 и Национальным рейтингом состояния инвестиционного климата АСИ. Круг подобных задач может быть существенно расширен при условии формализации признаков совместимости участников в виде набора критериев с правилом парного сравнения. К таким задачам относятся, например, распределение абитуриентов по образовательным учреждениям, формирование команд проектов, назначение научных руководителей и другие постановки задач двустороннего сопоставления.

Основные источники информации:

- 1 Gale, D. College Admissions and the Stability of Marriage / D. Gale, L. S. Shapley // The American Mathematical Monthly. – 1962. – Vol. 69, No. 1. – P. 9–15. – DOI: 10.1080/00029890.1962.11989827.
- 2 Kleinberg, J. Algorithm Design / J. Kleinberg, É. Tardos. – Boston : Pearson/Addison-Wesley, 2005. – 838 p.
- 3 Roth, A. E. Two-Sided Matching : A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis / A. E. Roth, M. A. O. Sotomayor. – Cambridge : Cambridge University Press, 1990. – 265 p. – DOI: 10.1017/CCOL052139015X.
- 4 Gusfield, D. The Stable Marriage Problem : Structure and Algorithms / D. Gusfield, R. W. Irving. – Cambridge, MA : MIT Press, 1989. – 240 p.
- 5 Kuhn, H. W. The Hungarian Method for the Assignment Problem / H. W. Kuhn // Naval Research Logistics Quarterly. – 1955. – Vol. 2, No. 1–2. – P. 83–97. – DOI: 10.1002/nav.3800020109.
- 6 Roth, A. E. Marketplaces, Markets, and Market Design / A. E. Roth // American Economic Review. – 2018. – Vol. 108, No. 7. – P. 1609–1658. – DOI: 10.1257/aer.108.7.1609.
- 7 Klaus, B. Matching under Preferences / B. Klaus, D. F. Manlove, F. Rossi // Handbook of Computational Social Choice. – Cambridge : Cambridge University Press, 2016. – P. 284–310. – DOI: 10.1017/CBO9781107446984.014.
- 8 Hosseini, H. Strategic Aspects of Stable Matching Markets : A Survey / H. Hosseini, S. Pathak // Proceedings of the Thirty-Third International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2024). – 2024. – P. 8077–8085. – DOI: 10.24963/ijcai.2024/893.
- 9 О соглашениях о защите и поощрении капиталовложений [Электронный ресурс] : постановление Правительства Российской Федерации от 13.09.2022 № 1602. – URL: <https://rg.ru/documents/2022/09/20/pravitelstv.html> (дата обращения: 14.05.2026). – Загл. с экрана. – Яз. рус.
- 10 Национальный рейтинг состояния инвестиционного климата в субъектах Российской Федерации : результаты и методология 2025 года [Электронный ресурс] / Агентство стратегических инициатив. – URL: https://asi.ru/government_officials/rating/ (дата обращения: 14.05.2026). – Загл. с экрана. – Яз. рус.