

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и
криптографии

Гамильтоновы графы

АВТОРЕФЕРАТ
дипломной работы

студента 6 курса 631 группы
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность
факультета компьютерных наук и информационных технологий

Костенко Владислава Денисовича

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

М. Б. Абросимов

19.01.2026 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор

М. Б. Абросимов

19.01.2026 г.

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

Задачи класса NP-полных – это важнейшая категория задач в теории вычислительной сложности, характеризующаяся тем, что решение такой задачи можно проверить за полиномиальное время, однако, неизвестен алгоритм, который бы находил решение за полиномиальное время в общем случае.

Одним из наиболее известных примеров таких задач является задача коммивояжера, в которой требуется найти кратчайший возможный маршрут, проходящий через все города из заданного списка.

Задача коммивояжера является классическим примером NP-полной задачи, и тесно связана с задачей гамильтонова цикла. Фактически, нахождение гамильтонова цикла в графе – это частный случай задачи коммивояжера, когда веса рёбер не учитываются или равны единице.

Практическое же применение задачи о гамильтоновом цикле весьма широко. Она используется в логистике и транспортных системах для оптимизации маршрутов, где необходимо посетить множество пунктов без повторений и вернуться к исходной точке. Также задача встречается в биоинформатике, например, при анализе последовательностей и структур биомолекул, в компьютерных сетях для оптимального управления потоками и передаче данных, а также в робототехнике для планирования путей автономных систем.

В компьютерной безопасности задача применяется в протоколах доказательства с нулевым разглашением знания гамильтонова цикла: доказывающая сторона убеждает проверяющую в существовании цикла, не раскрывая путь, путём интерактивного протокола с изоморфизмом графов и раундами вызовов. Такие протоколы усиливают аутентификацию и криптосистемы, опираясь на NP-полноту проблемы для стойкости к атакам.

В контексте таких становится важным исследование альтернативных подходов к их решению, например, эвристических методов или методов машинного обучения.

Целью данной работы является – комплексное исследование

существующих методов определения гамильтонова цикла, включая классические алгоритмические подходы и новейшие решения на базе искусственного интеллекта. Такой анализ позволит оценить возможности каждого метода и определить наиболее эффективные способы решения задачи.

Дипломная работа состоит из введения, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 4 приложений. Общий объем работы – 93 страниц, из них 54 страниц – основное содержание, включая 25 рисунков и 2 таблиц, список использованных источников из 20 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Первый раздел дипломной работы «Теоретические основы» содержит четыре подраздела, в которых систематически изложены базовые понятия теории графов, необходимые для понимания проблемы гамильтоновых циклов.

В первом подразделе даны определения неориентированных графов, связности, полного графа, пути, цепи в графе и другие.

Во втором подразделе определяется гамильтонов граф как связный граф, содержащий гамильтонов цикл (замкнутый путь через все вершины ровно один раз), и формализует задачу нахождения гамильтонова цикла как NP-полную проблему, эквивалентную задаче коммивояжера в метрических графах.

В третьем подразделе приведены основные теоремы о достаточных условиях гамильтоновости графа, такие как теорема Г. Дерека, теоремы О. Оре, теоремы Л. Поше, теорема В. Хватала, теоремы о графах Бонди Хватала, а также приведена вычислительная сложность алгоритма необходимая для проверки условия Бонди Хватала.

Второй раздел дипломной работы «Методы проверки гамильтоновости графа» состоит из четырех подразделов, в которых систематически рассмотрены теоретические, эвристические и точные подходы к решению проблемы нахождения гамильтонова цикл.

В подразделе 2.1 кратко дана характеристика теоретических методов, прежде описанных в первом разделе.

Во подразделе 2.2 рассмотрены эвристические методы, которые не могут гарантировать нахождение цикла, однако на практике являются эффективными алгоритмами для поиска, особенно на больших графах.

Среди таких методов представлен анализ гибридного эвристического алгоритма HybridHAM, сочетающего локальный поиск с метаэвристиками для построения гамильтоновых циклов, с описанием его ключевых этапов и областей применимости. Био-вдохновленный алгоритм Hamiltonant, основанный на муравьиной колонии с вероятностным выбором соседей, феромонным обновлением и локальным поиском. А также очень подробно

рассмотрена эвристика Snakes and Ladders – детерминистическая эвристика для нахождения гамильтоновых циклов, которая итеративно минимизирует разрывы в упорядочивании вершин графа путем преобразований упорядочивания вершин графа на окружности.

В подразделе 2.3 описаны точные методы, то есть алгоритмы полного перебора, гарантированно находящие гамильтонов цикл или доказывающие его отсутствие путём систематического исследования пространства решений с отсечением заведомо неоптимальных ветвей. В качестве примера такого алгоритма приведен Concorde – точный решатель задач коммивояжера, который также прекрасно подходит и для проблемы нахождения гамильтонова цикла.

В подразделе 2.4 представлена подробная сравнительная таблица методов, включающая следующие ключевые параметры оценки:

- Гарантия нахождения оптимального гамильтонова цикла (абсолютная/аппроксимационная/отсутствие)
- Основная идея алгоритма
- Асимптотическая вычислительная сложность в нотации O
- Типы графов с наилучшей производительностью
- Типы графов с худшей производительностью
- Экспериментальные результаты тестирования

Третий раздел «Графовые нейронные сети» систематически излагает архитектуры и принципы графовых нейронных сетей (GNN) как перспективного подхода к решению графовых задач, включая проблему нахождения гамильтонова цикла. Раздел последовательно раскрывает эволюцию нейронных сетей от базовых архитектур к специализированным графовым методам для решения задач на нерегулярных структурах данных.

В подразделе 3.1 изложены основные понятия нейронных сетей как математических моделей, имитирующих биологические нейроны через слои (входные, скрытые, выходные), с описанием работы нейронов (взвешенная сумма + активация) и универсальных задач применения: классификация, регрессия, кластеризация, генерация данных, обработка последовательностей.

Подраздел 3.2 рассматривает сверточные нейронные сети (CNN) как архитектуры глубокого обучения для пространственных данных (изображения), состоящие из чередующихся сверточных слоев (локальная агрегация через скользящее ядро-фильтр для выявления краёв/текстур) и пулинговых слоев. Отмечается их эффективность для регулярных сеток, но ограниченность на нерегулярных графовых структурах, что обосновывает переход к графовым нейронным сетям (GNN).

В подразделе 3.3 рассмотрены графовые нейронные сети (GNN) как обобщение CNN для нерегулярных графовых структур, использующие слои представления (embeddings), графовые свертки (агрегация соседей) и полносвязные классификаторы без пулинга для сохранения структуры графа.

Описаны две парадигмы сверток: спектральная (для глобального представления) и пространственная (для локальной агрегации соседей). Для задачи поиска гамильтонова цикла предпочтителен пространственный подход из-за авторегрессионной природы (последовательное построение пути) и индуктивности, в отличие от спектрального, лучше подходящего для классификации гамильтоновости.

Подразделе 3.4 описывает подход передачи сообщения (message passing) как итеративное обновление внутреннего состояния каждой вершины на основе состояний её соседей: собираются тройки (состояние вершины, состояние соседа, тип ребра), преобразуются в сообщения через операцию агрегации и обновляют состояние вершины. Подход обеспечивает локальную обработку графовой топологии с обучаемыми функциями, адаптированными под конкретные задачи, в том числе и задачу поиска гамильтоновых циклов.

Четвертый раздел дипломной работы «Практическая часть» описывает разработку и экспериментальную оценку графовой нейронной модели для решения задачи поиска гамильтоновых циклов с использованием архитектуры, основанной на принципах подхода передачи сообщения (message passing).

В подразделе 4.1 сформулированы цели практической работы: разработка GNN-модели для поиска гамильтоновых циклов и классификации графов,

формирование обучающей выборки, анализ результатов тестирования и реализация эвристики Snakes and Ladders для сравнения.

Приведено обоснование актуальности генерации циклов, выбраны графовые нейронные сети за способность работать с графовой топологией и генерировать подграфы (циклы как частный случай), а также подчеркнута необходимость подбора архитектуры, данных и валидации.

В подразделе 4.2 приведена архитектура выбранной модель – авторегрессионная GNN-архитектура Encode-Process-Decode:

- encoder – формирует начальные представления вершин
- processor – обрабатывает графовую топологию
- decoder – предсказывает следующую вершину пути

Модель получилась компактная, использует one-hot кодирование позиций (старт, текущий конец, посещенные) и случайные признаки для симметрий, обеспечивая сложность $O(n^2 \log n)$ против экспоненциальной у точных методов.

В подразделе 4.3 описан метод генерации обучающих данных: создание гамильтонова цикла по случайной перестановке вершин с последующим добавлением случайных ребер (модель Эрдёша-Ренъи с гарантированной гамильтоновостью). Приведено обоснование выбора малых графов (3-25 вершин), отказ от не гамильтоновых примеров для ускорения генерации и приемлемость авторегрессионных путей/циклов как результата модели.

В подразделе 4.4 приведены результаты тестирования модели на контрастных графах, статистическая оценка модели на сбалансированном датасете Эрдёша-Ренъи от 10 до 30 вершин по 100 гамильтоновых/не гамильтоновых, со следующими результатами:

- accuracy 85%
- recall 100%
- precision 76.9%
- specificity 70%

Результаты показывают, что модель настроена максимально чувствительно к наличию циклов — она гарантированно не пропускает ни одного положительного примера, но может видеть циклы там, где их нет.

Анализ перезапусков показал стабильное нахождение циклов несмотря на недетерминистичность, с измерением среднего количества попыток до успеха.

На FHCP датасете (1001 граф, 66-9528 вершин) модель нашла циклы в ранее нерешенных графах, где число попыток зависит от структуры графа, а не размерности, демонстрируя уникальную способность к исследованию сложных случаев.

В последнем подразделе представлена реализация эвристики Snakes and Ladders на Python (NumPy) с классами Graph, Ordering, Gap, SLHSolver (закрывающие/плавающие/открывающие трансформации, 4 стадии алгоритма) и CLI-интерфейсом. Программа успешно протестирована на небольших графах, но на FHCP реализация не смогла найти циклы, останавливалась на 5-6 разрывах, не достигая полного решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы было проведено комплексное исследование задачи поиска гамильтонова цикла, охватывающее как классические алгоритмические методы, так и современные подходы, основанные на использовании моделей искусственного интеллекта. Анализ традиционных методов показал, что, несмотря на их строгую теоретическую обоснованность и гарантии корректности, они характеризуются высокой вычислительной сложностью и плохо масштабируются при увеличении размерности графа, что существенно ограничивает их практическое применение.

Особое внимание в работе было уделено методам машинного обучения на графах, в частности нейронным сетям на графах, способным не только определять существование гамильтонова цикла, но и непосредственно строить предполагаемый маршрут. Такой переход от бинарной классификации к задаче конструктивного поиска является принципиально важным, поскольку именно наличие явного цикла представляет практическую ценность в прикладных задачах. Рассмотренные авторегрессионные модели демонстрируют, что формулировка задачи как последовательного построения решения позволяет эффективно аппроксимировать сложное комбинаторное пространство возможных обходов.

В ходе практической части работы была подробно исследована проблема формирования обучающей выборки для подобных моделей. Показано, что прямое использование точных решателей для разметки данных является вычислительно затратным и плохо масштабируемым. В качестве альтернативы была рассмотрена стратегия генерации гамильтоновых графов с априорно встроенным циклом, позволяющая получать большие объемы корректно размеченных данных без привлечения внешних решателей. Эмпирические результаты подтверждают, что обучение на таких выборках обеспечивает хорошую обобщающую способность моделей и позволяет эффективно переносить знания на графы большего размера.

Дополнительно в рамках работы была реализована и исследована

эвристика Snakes and Ladders, предназначенная для ускорения поиска гамильтонова цикла за счет направленного перебора и динамической адаптации стратегии обхода графа. Реализация данного подхода позволила оценить его поведение на различных типах графов и использовать полученные результаты для более глубокого анализа особенностей задачи и сравнения принципов работы классических и нейросетевых методов.

Таким образом, в работе показано, что сочетание авторегрессионных нейросетевых моделей и специализированных стратегий генерации данных представляет собой перспективный подход к решению задачи поиска гамильтонова цикла. Полученные результаты позволяют сделать вывод о практической применимости методов машинного обучения для решения сложных NP-полных задач и задают направление для дальнейших исследований, связанных с повышением точности, устойчивости и интерпретируемости подобных моделей.