МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Меры связности графа

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Курдупова Никиты Денисовича

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор ___________ М. Б. Абросимов

19.01.2026 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор ___________ М. Б. Абросимов

19.01.2026 г.

Саратов 2026

ВВЕДЕНИЕ

В современном информационном обществе, где цифровые технологии играют ключевую роль в различных сферах деятельности, вопросы надёжности и отказоустойчивости систем приобретают особую важность. Непрерывная доступность к данным, обеспечение бесперебойной работы сервисов и защита от потенциальных отказов становятся приоритетными задачами для разработчиков и инженеров.

Отказоустойчивость – это свойство системы сохранять свою работоспособность и доступность даже при возникновении отказов в её компонентах или при нарушении условий функционирования. Она необходима не только для информационных технологий, но и для множества других областей, таких как транспорт, медицина, финансы и т.д.

В контексте информационных технологий, одним из ключевых инструментов обеспечения отказоустойчивости является анализ и оптимизация связности графов, которые моделируют взаимосвязи между компонентами системы. Число вершинной связности определяет минимальное количество вершин, которые необходимо удалить, чтобы разорвать граф на две или более компоненты, тогда как число рёберной связности определяет минимальное количество рёбер, которые нужно удалить, чтобы достичь того же результата.

Цель данной работы состоит в исследовании методов вычисления числа вершинной и рёберной связности в графах и их применении в контексте обеспечения отказоустойчивости информационных систем. В рамках практической части работы будет представлен алгоритм, позволяющий находить вершинную и рёберную связность в произвольных графах, что может послужить основой для разработки инструментов и стратегий обеспечения отказоустойчивости в реальных системах.

Дипломная работа состоит из введения, 5 разделов, заключения, списка использованных источников и 1 приложения. Общий объем работы – 53 страницы, из них 42 страницы – основное содержание, включая 21 рисунок и 29 таблиц, список использованных источников из 23 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

1 Теоретическая часть

Если после удаления любых k вершин вместе с инцидентными им ребрами граф остается связным, то говорят, что он k-вершинносвязный.

Наибольшее k, при котором граф G k-вершинно связный, называется вершинной связностью графа G.

Если после удаления любых λ ребер граф остается связным, то говорят, что он λ-реберносвязный.

Наибольшее λ, при котором граф G λ-реберносвязный, называется реберной связностью графа G.

Теорема 1 (Условие Уитни). Для любого графа G справедливо неравенство: $\mathrm{k} \leq \lambda \leq \delta$.

Теорема 2 (Менгер). Наименьшее число вершин, разделяющих две не смежные вершины s и t, равно наибольшему числу непересекающихся простых $(\mathrm{s} - \mathrm{t})$ цепей.

Теорема 3 (Чартрэнда-Харари). Для любых натуральных чисел $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$, таких, что $0 < \mathrm{a} \leq \mathrm{b} \leq \mathrm{c}$, существует граф G, у которого $k = \mathrm{a}, \lambda = \mathrm{b}, \delta = \mathrm{c}$.

Теорема 4. Граф с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию Уитни при $\mathrm{a} \leq \mathrm{b} < \mathrm{c}$, является графом с числом вершин $2(\mathrm{c} + 1)$.

Теорема 5. Граф с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию Уитни при $\mathrm{a} = \mathrm{b} = \mathrm{c}$, является полным графом с числом вершин $\mathrm{c} + 1$.

Теорема 6. Граф с наименьшим количеством вершин, удовлетворяющий условию Уитни при $\mathrm{a} < \mathrm{b} = \mathrm{c}$, является графом с числом вершин $2(\mathrm{c} + 1) - \mathrm{a}$.

В теории графов существует 14 не решенных задач, они описаны в книге Бержа К. Одиннадцатая задача относится к связности графов и определению минимального числа вершин и рёбер, удаление которых приводит к нарушению связности. Формулировка задачи: Какова наибольшая связность графа с n вершинами и m ребрами.

Решение было найдено Френком Харари в середине XX века. Наибольшая вершинная связность k графа с n вершинами и m ребрами равна $\frac{2m}{n}$ при $m \geq n-1$.

На основе этого решения выделяют отдельный класс графов, графы Харари $H_{k,n}$. В графах этого класса степень всех вершин равна k, если kn четно, или одна из вершин может иметь степень $k+1$, если kn нечетно.

Также Френком Харари были сформулированы следующие теоремы:

Теорема 7. У любого графа вершинная связность k равна 0, когда $m < n-1$, и равна $\frac{2m}{n}$, когда $m \geq n-1$.

Теорема 8. У любого графа реберная связность λ равна 0, когда $m < n-1$, и равна $\frac{2m}{n}$, когда $m \geq n-1$.

Таким образом, получаем, что граф Харари – это граф с минимальным числом ребер, у которого вершинная и реберная связности равны.

Диагональю порядка i, где $i = 0, 1, 2, \dots$, назовем множество пар (k, λ), удовлетворяющих следующим условием:

1. $\lambda - k = i$;

2. для заданных k и λ можно построить граф с вершинной связностью k и рёберной связностью λ;

3. граф из условия 2 является либо λ-регулярным, либо одна из его вершин степени $\lambda + 1$, а остальные вершины имеют степени λ;

4. условие 3 должно выполняться для графов с любым числом вершин $n \geq N_{k,\lambda}$.

Множество диагоналей всех порядков обозначим D.

Пара значений (k, λ), удовлетворяющая условиям из определения диагонали порядка и являющаяся наименьшим значением для соответствующей диагонали называется образующим элементом и обозначается $(k_{min(i)}, \lambda_{min(i)})$.

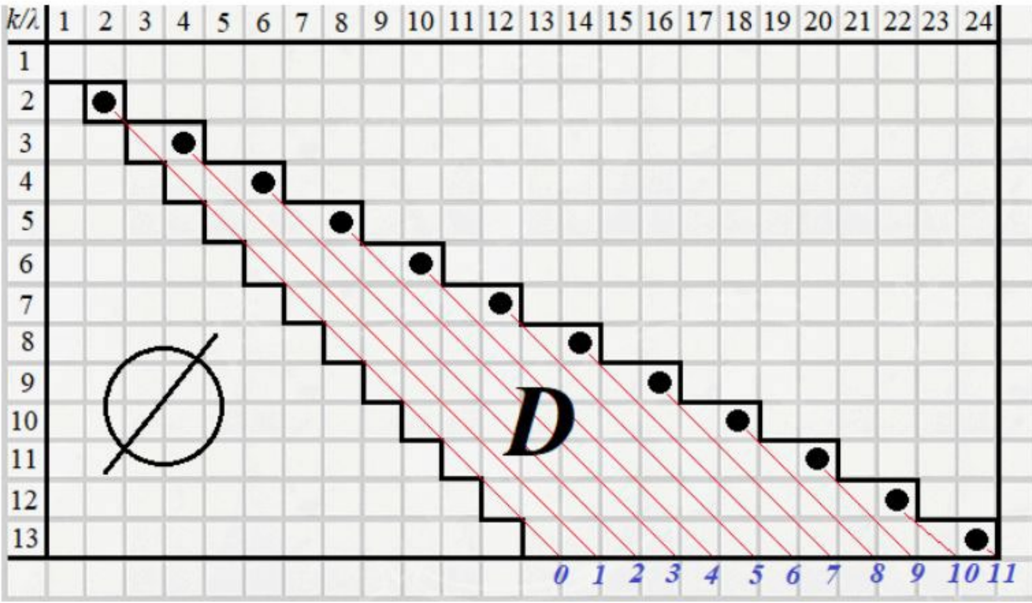

Рисунок 9 – Множество D

На рисунке 9 показана схема множества D. По вертикали отмечены значения вершинной связности, а по горизонтали – реберной. Линиями выделены диагонали, а точками образующие элементы. Снизу подписан порядок диагонали.

2 Отказоустойчивость и связность графа

Отказоустойчивость – это способность системы продолжать функционировать в случае частичных отказов или неисправностей в её компонентах. В условиях, когда надёжность и доступность информации являются критически важными, обеспечение отказоустойчивости становится одной из первоочередных задач. Отказоустойчивость охватывает как аппаратные, так и программные аспекты, обеспечивая системам возможность восстанавливаться после различных сбоев без существенных потерь в производительности или данных.

Изучение графов с высокими значениями вершинной и реберной связности востребовано в вопросе амортизации отказов.

Применение теории графов позволяет строго формализовать задачи анализа отказоустойчивости. Вершины и ребра в графовой модели интерпретируются как элементы системы и связи между ними, а отказ отдельного элемента или связи – как удаление вершины или ребра.

3 Алгоритм нахождения реберной связности

В разделе описывается алгоритм нахождения реберной связности и способ его оптимизации.

4 Алгоритм нахождения вершинной связности

В разделе описывается алгоритм нахождения вершинной связности и способ его оптимизации.

А так же библиотеки для работы с графами. На языке *Python* разработана библиотека *NetworkX*, а на языке *C++* – *Graph-tool*. Обе библиотеки облегчают работу с графами. Библиотеку *Graph-tool* лучше использовать в крупных профессиональных проектах. Она сложнее в изучении, но на больших данных показывает лучший результат. А для маленьких проектов подойдет *NetworkX*, разница в работе программ будет несущественной, а освоение библиотеки и реализация программы будет проще и быстрее.

5 Программная реализация

В работе был использован программный комплекс *nauty*, разработанный Бренданом Макеем, и входящий в него генератор *geng*. Запуск осуществлялся посредством использования *Cygwin* – UNIX-подобной оболочки для командной строки *Microsoft Windows*. Данное решение позволяет генерировать базу графов с учетом необходимых параметров. Для целей этой работы генерировались связные графы с n-числом вершин, где n от 3 до 11.

Программа написана на языке *Python*. Преимуществом языка является большое количество встроенных библиотек. Так же *Python* поддерживает многопоточность, что позволяет оптимизировать работу программы с большими данными. Для написания, тестирования и отладки кода была выбрана среда программирования *IDE*.

В качестве практического применения эта программа подойдет для нахождения оптимального с точки зрения отказоустойчивости графа. Для этого проанализируем связные графы с заданным числом вершин. С помощью инструментов *nauty* были сгенерированы графы с числом вершин от 3 до 11.

На основе этих данных была составлена таблица, в которой строки соответствуют значению вершинной связности, а столбцы – значению реберной связности. На пересечении i-ой строки и j-ого столбца указанно количество графов, у которых значение вершинной связности равно i, а реберной j.

Ниже приведена таблица для 11-вершинных графов. В работе так же присутствуют таблицы для графов с числом вершин от 3 до 10.

Таблица 9 – Данные о распределении 11-вершинных графов в зависимости от значений вершинной и реберной связностей

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	102193699	3533405	4363	6	1	0	0	0	0	0
2	0	316730892	10951153	13524	17	0	0	0	0	0
3	0	0	375620743	12987304	16039	20	0	0	0	0
4	0	0	0	158853246	3460563	4279	0	0	0	0
5	0	0	0	0	21041467	458381	567	0	0	0
6	0	0	0	0	0	816567	4389	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	9769	44	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	121	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Так же по итогам работы получены таблицы с наименьшим числом ребер в графе для пар (k, λ) и таблицы, показывающие количество графов с минимальным значение ребер для пар (k, λ). Ниже приведены результаты для 11-вершинных графов. В работе так же присутствуют таблицы с результатами для графов с числом вершин от 3 до 10.

Таблица 26 – Наименьшее число ребер в 11-вершинных графах для пары (k, λ)

λ / k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	12	18	24	30	-	-	-	-	-
2	-	11	17	22	29	-	-	-	-	-
3	-	-	17	22	28	36	-	-	-	-
4	-	-	-	22	28	33	-	-	-	-
5	-	-	-	-	28	33	39	-	-	-
6	-	-	-	-	-	33	39	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	39	44	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	44	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55

Таблица 27 – Данные о распределении 11-вершинных графов с минимальным числом ребер зависимости от значений вершинной и реберной связностей

λ / k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	235	4	11	4	1	-	-	-	-	-
2	-	1	21	3	2	-	-	-	-	-
3	-	-	138	55	9	1	-	-	-	-
4	-	-	-	204	528	1	-	-	-	-
5	-	-	-	-	3212	55	1	-	-	-
6	-	-	-	-	-	210	26	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	93	2	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

Для анализа результатов рассмотрим ранее описанное диагональное множество D и множество графов со значением вершинной связности равном 1, обозначим его H_1 (Рисунок 19). Графы, находящиеся в полученных множествах, имеют оптимальное число ребер.

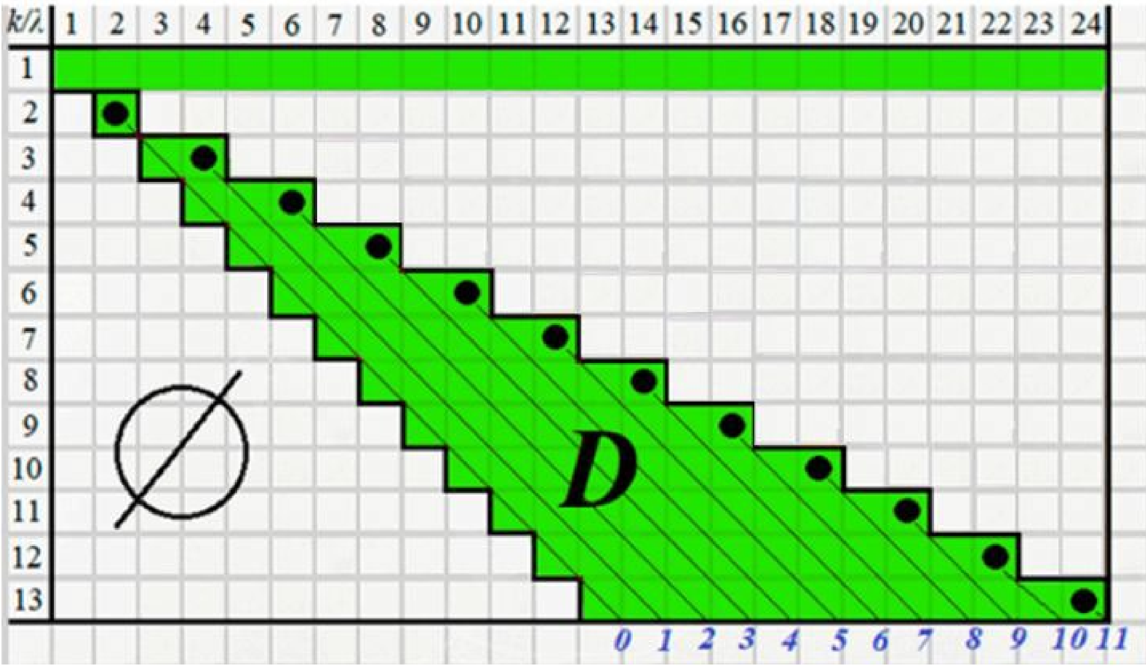

Рисунок 19 – Схема множества графов

Для анализа возьмем результаты, полученные на 11-вершинных графах, и сопоставим их со схемой. На таблицах ниже отмечены ячейки в соответствие со схемой.

Таблица 28 – Наименьшее число ребер в 11-вершинных графах для пары (k, λ) с отмеченными множествами D и H_1

k \ λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	10	12	18	24	30	-	-	-	-	-
2	-	11	17	22	29	-	-	-	-	-
3	-	-	17	22	28	36	-	-	-	-
4	-	-	-	22	28	33	-	-	-	-
5	-	-	-	-	28	33	39	-	-	-
6	-	-	-	-	-	33	39	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	39	44	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	44	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	55

Таблица 29 – Данные о распределении 11-вершинных графов с минимальным числом ребер зависимости от значений вершинной и реберной связностей с отмеченными множествами D и H_1

λ / k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	235	4	11	4	1	-	-	-	-	-
2	-	1	21	3	2	-	-	-	-	-
3	-	-	138	55	9	1	-	-	-	-
4	-	-	-	204	528	1	-	-	-	-
5	-	-	-	-	3212	55	1	-	-	-
6	-	-	-	-	-	210	26	-	-	-
7	-	-	-	-	-	-	93	2	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-
9	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1

Большинство графов относится к множеству D. Так же видно, что число ребер в графах, относящихся к множеству D и имеющих одинаковое значение реберной связности, равно. Рассмотрим один из графов не входящий ни в одно из множеств D и H1. Единственный граф со значением вершинной связности 3 и реберной 6. Граф представлен на рисунке 20.

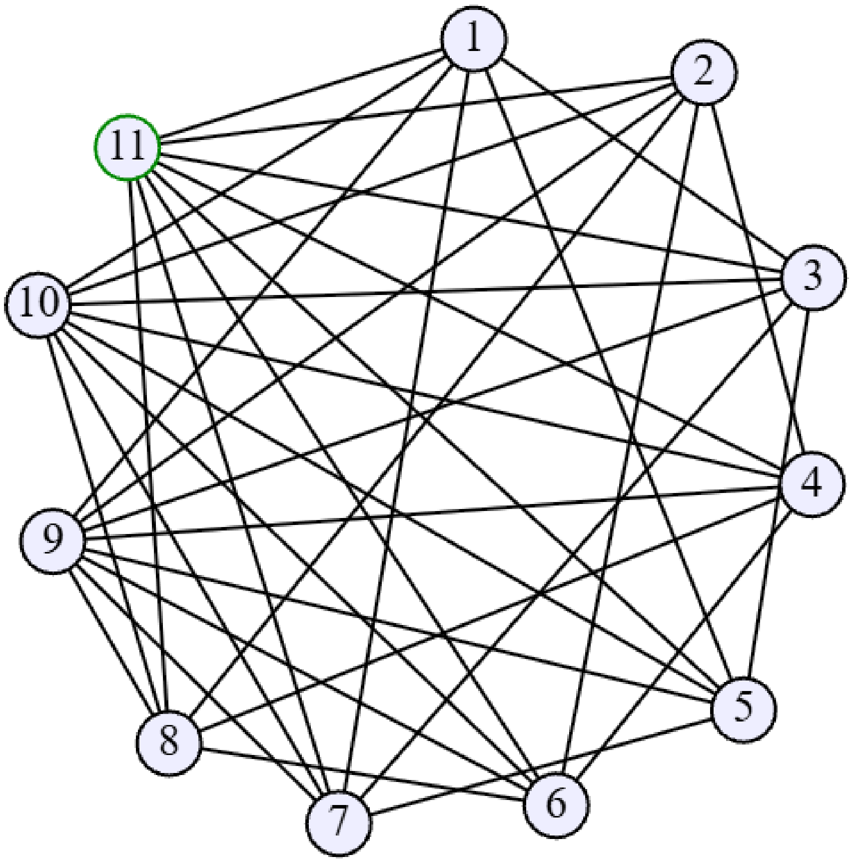

Рисунок 20 – Граф со значением вершинной связности 3 и реберной 6

Данному графу соответствует следующий вектор степеней: (6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 8, 8, 8). Можно заметить, что у графа $n - k$ вершин имеют степень λ и k вершин степень $n\ - k$.

Так же возьмем граф входящий во множество D. Единственный граф с числом вершинной связности 5 и реберной 7 (Рисунок 21).

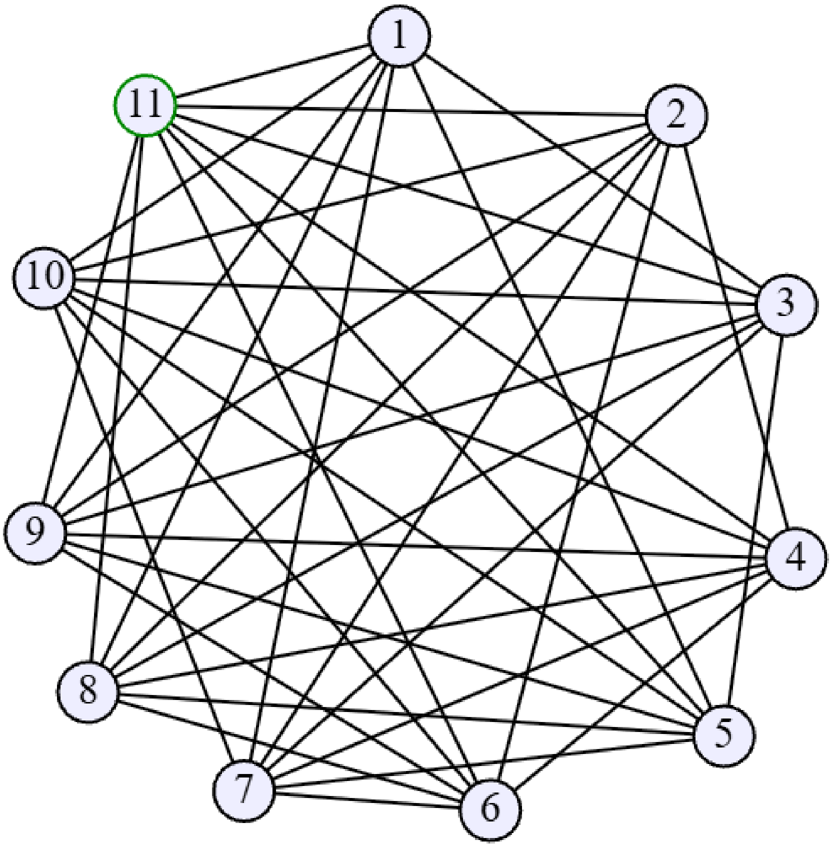

Рисунок 21 – Граф со значением вершинной связности 5 и реберной 7

У этого графа вектор степеней – (7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 8). Видно, что граф полностью соответствует требованиям диагонального множества. Одна вершина имеет степень $\lambda\ + 1$, а остальные – степень λ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена тема отказоустойчивости в контексте теории графов, с акцентом на вершинную и рёберную связность. Работа включала в себя теоретический обзор ключевых понятий, а также практическую реализацию алгоритмов для вычисления этих характеристик графов.

В практической части работы была разработана программа на языке *Python*, в среде программирования *IDE*, реализующая алгоритмы для вычисления вершинной и рёберной связности. Эта программа была использована для анализа всех связных графов с числом вершин, равным 11, которые были сгенерированы с помощью *nauty*.

В ходе работы были сделаны следующие выводы:

— Определения и свойства вершинной и рёберной связности были рас смотрены в контексте различных типов графов, включая тор, решетку и гиперкуб. Эти графовые структуры продемонстрировали разнообразие в устойчивости к отказам благодаря своим топологическим свойствам.

— Разработанная программа показала свою эффективность в вычислении вершинной и рёберной связности для большого набора графов. Генерация и последующий анализ всех связных графов с 11 вершинами позволили получить статистические данные.

— Результаты экспериментов показали, что вершинная и рёберная связность тесно связаны с топологическими особенностями графов. Графы с высокой степенью симметрии и регулярности, как правило, обладают высокой связностью, что делает их более устойчивыми к отказам.

В заключение, данная работа продемонстрировала важность вершинной и рёберной связности для оценки отказоустойчивости графов. Разработанные методы и программные инструменты могут быть использованы для дальнейшего исследования и оптимизации сетевых структур, что имеет практическое значение для различных областей, включая информационные технологии, телекоммуникации и распределенные системы.