

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ  
компьютерной безопасности и  
криптографии

**Короли в турнирах**

**АВТОРЕФЕРАТ**

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы  
специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность  
факультета компьютерных наук и информационных технологий

Сметанкина Никиты Артуровича

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

\_\_\_\_\_

М. Б. Абросимов

19.01.2026 г.

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., профессор

\_\_\_\_\_

М. Б. Абросимов

19.01.2026 г.

Саратов 2026

## ВВЕДЕНИЕ

Графы играют важную роль в современном мире, поскольку они позволяют моделировать и анализировать сложные взаимосвязи и структуры. Они широко применяются в различных областях, таких как социальные сети, транспортные системы, интернет, финансовые сети, а также в научных отраслях, таких как биология и химия. Графы помогают в анализе и понимании сложных систем, позволяя оптимизировать процессы и принимать более эффективные решения в реальных задачах.

В условиях стремительного развития информационных технологий и роста объёмов обрабатываемых данных возрастает необходимость в использовании строгих математических моделей для анализа сложных систем. Одним из наиболее универсальных и наглядных инструментов такого анализа являются графы, позволяющие формализовать отношения между объектами и исследовать их структуру. Графовые модели применяются в самых различных областях: при анализе социальных и коммуникационных сетей, транспортных и логистических систем, в биоинформатике, химии, экономике, а также в задачах искусственного интеллекта и анализа больших данных. Их использование способствует выявлению скрытых закономерностей, оптимизации процессов и повышению эффективности принимаемых решений.

Особое место в теории ориентированных графов занимают турниры – графы, в которых между каждой парой вершин существует ровно одно направленное ребро. Турниры естественным образом возникают в задачах попарного сравнения, ранжирования и коллективного выбора и широко используются при моделировании конкурентных отношений, в алгоритмах машинного обучения, анализе предпочтений и принятии решений. Их структура позволяет формализовать ситуации, в которых требуется определить наиболее значимые или предпочтительные элементы системы.

Одной из важнейших характеристик турнира является его диаметр, определяющий максимальную длину кратчайшего ориентированного пути

между вершинами. Диаметр отражает степень связности турнира и может быть интерпретирован как показатель эффективности передачи информации или влияния в сетевых моделях. В задачах анализа больших ориентированных графов малый диаметр часто ассоциируется с высокой степенью структурной упорядоченности.

Значимым структурным элементом турниров являются короли – вершины, из которых до любой другой вершины существует ориентированный путь длины не более двух. Наличие королей связано с центральностью и устойчивостью структуры турнира и имеет интерпретацию в задачах ранжирования, выбора лидеров и анализа предпочтений. В данной работе рассматриваются  $d$ -короли как обобщение понятия короля, позволяющее более детально исследовать свойства турниров и их внутреннюю организацию.

Актуальность данной работы обусловлена необходимостью теоретического исследования турниров с заданными структурными свойствами, такими как наличие  $d$ -королей и определённые значения диаметра. Быстрый рост размерности ориентированных графов в задачах анализа данных и искусственного интеллекта делает невозможным перебор всех вариантов, что повышает значимость строгих теоретических результатов, позволяющих описывать и строить турниры с нужными характеристиками. Полученные результаты могут служить теоретической основой для дальнейших исследований и практических приложений в задачах анализа сетей, ранжирования и принятия решений.

Целью данной работы является исследование свойств  $d$ -королей в турнирах, анализ того, в какой степени известные определения и характеристики королей распространяются на  $d$ -королей, а также изучение структурных особенностей турниров на основе построения и анализа таблиц распределения с использованием различных графовых инвариантов для выдвижения и обоснования гипотез.

В соответствии с поставленной целью в работе предполагается решение следующих задач:

- рассмотреть понятие короля турнира и его основные свойства;
- ввести и проанализировать понятие  $d$ -короля как обобщение понятия короля;
- исследовать, какие свойства и определения, характерные для обычных королей, сохраняются или модифицируются в случае  $d$ -королей;
- провести вычислительное исследование турниров малой размерности (до 11 вершин);
- определить для рассматриваемых турниров значения основных структурных инвариантов;
- построить таблицы распределения  $d$ -королей по различным инвариантам турниров;
- проанализировать полученные распределения с целью выявления закономерностей;
- на основе анализа результатов сформулировать гипотезы о свойствах турниров с  $d$ -королями.

Дипломная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Общий объем работы – 48 страниц, из них 42 страниц – основное содержание, включая 14 рисунков и 3 таблиц, список использованных источников из 12 наименований.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

### 1 Основные определения.

#### 1.1 Ориентированные графы и турниры

**Содержимое:** формальные определения орграфа, направленного графа, полного графа; определение турнира; понятия пути, простого пути, контура, подтурнира; ввод обозначений  $V(T)$ ,  $d(u, v)$ ,  $D(T)$ .

**Выводы:** установлена формальная база и обозначения, необходимые для дальнейшего изложения; показано, что турнир – естественная модель для задач попарного сравнения и ранжирования.

#### 1.2 Король, император, $d$ -король

Дипломная работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Общий объем работы – 48 страниц, из них 42 страниц – основное содержание, включая 14 рисунков и 3 таблиц, список использованных источников из 12 наименований.

**Содержимое:** определение императора (1-короля), классического короля (2-короля) и обобщённого понятия  $d$ -короля; примеры и иллюстрации; связь с радиусом и эксцентриситетом.

**Выводы:**  $d$ -король формально обобщает классические понятия; введённый язык позволяет сравнивать разные уровни «центральности» вершин и формализовать задачи поиска лидеров в турнирах.

### 2 Алгоритмы и вычислительные методы исследования

#### 2.1 Алгоритм преобразования формата digraph6 в матрицу смежности

**Содержимое:** описание формата digraph6, декодирование заголовка (число вершин), преобразование байтов в битовую последовательность, восстановление матрицы смежности.

**Выводы:** реализован надёжный и детализированный алгоритм преобразования, позволяющий корректно получать матрицу смежности для последующего анализа; оценена временная сложность  $O(n^2)$  для декодирования.

#### 2.2 Алгоритмы анализа турниров

**Содержимое:** применение BFS и алгоритма Флойда–Уоршелла для вычисления кратчайших расстояний; методы определения  $d$ -королей; использование NetworkX для манипуляций с графами.

**Выводы:** для задач поиска  $d$ -королей и диаметра целесообразно сочетать BFS (для отдельных стартовых вершин) и Флойда–Уоршелла (для полного матричного анализа); оценены временные затраты и выбраны оптимальные подходы для перебора малых  $n$ .

## 2.3 Оптимизация вычислений

**Содержимое:** приёмы сокращения вычислений (использование симметрий, неизоморфных представлений, ранняя остановка при достижении порогов), организация хранения результатов.

**Выводы:** оптимизации позволяют существенно снизить время перебора турниров до 11 вершин и аккуратно собирать статистику по  $d$ -королям.

## 3 Известные свойства классических королей и их анализ

**Содержимое:** классические теоремы о существовании короля в любом турнире; свойства множества королей (включая нечётность мощности для классического случая); доказательства и ссылки на литературу.

**Выводы:** базовые теоретические результаты подтверждают устойчивость понятия короля и служат опорой для обобщений на  $d$ -королей.

## 4 Экспериментальное исследование $d$ -королей

### 4.1 Процедура вычисления и сбор статистики

**Содержимое:** описание генерации всех неизоморфных турниров (gentourng), декодирования, вычисления матриц расстояний, определения  $K_d(T)$  для разных  $d$ ; организация базы данных результатов.

**Выводы:** получена полная выборка турниров до 11 вершин с набором инвариантов (диаметр, степени,  $d$ -короли), что обеспечивает надёжную эмпирическую базу.

### 4.2 Визуализация распределений $d$ королей

**Содержимое:** Содержимое: построение таблиц распределений, тепловых карт «диаметр  $\times$  число  $d$ -королей», гистограмм и диаграмм переходов  $K_d \rightarrow K_{d+1}$ .

**Выводы:** визуализация выявила устойчивые паттерны (монотонность по  $d$ , типичные режимы насыщения множества королей, редкие скачки), которые послужили основой для формулировки гипотез.

## 5 Выявленные закономерности и гипотезы

### 5.1 Выявленные закономерности и гипотезы

**Содержимое:** семь гипотез, выведенных из эксперимента (монотонность, инвариантность императоров, поведение при диаметре, отсутствие ровно двух  $d$ -королей и др.).

**Выводы:** часть утверждений следует из определений и доказанных лемм (например, монотонность множеств  $K_d$ ), часть — классические факты ( $d = 1, 2$ ), остальные — эмпирические гипотезы, требующие дальнейшего доказательства или контрпримеров.

### 5.2 Леммы и доказательства утверждений

**Содержимое:** Содержимое: формальные леммы и теоремы, доказанные в работе.

**Выводы:** формализованы и доказаны ключевые базовые утверждения; отмечены открытые вопросы (в частности, общая проверка гипотезы о двух  $d$ -королях для  $d \geq 3$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы проведено комплексное исследование обобщённого понятия короля в турнирах – так называемых  $d$ -королей. Работа выполнена на стыке теории графов, алгоритмического анализа и вычислительной экспериментальной математики и направлена на выявление структурных закономерностей в распределении  $d$ -королей в турнирах малой размерности (до 11 вершин).

На начальном этапе были систематизированы базовые определения и свойства ориентированных графов, турниров, а также классических понятий – короля и императора. На их основе было введено обобщение –  $d$ -король, представляющий собой вершину, из которой достижимы все остальные вершины за не более чем  $d$  шагов. Это понятие позволяет гибко описывать центральность вершин в зависимости от заданного порога достижимости и, таким образом, является естественным инструментом для анализа иерархической структуры турниров.

Далее были проанализированы известные теоретические результаты о классических королях, включая теорему Ландау, утверждающую существование хотя бы одного короля в любом турнире, а также невозможность наличия ровно двух королей. Эти свойства послужили отправной точкой для проверки их обобщений в контексте  $d$ -королей.

Ключевым вкладом работы стало разработка и реализация эффективного вычислительного конвейера, позволяющего генерировать все неизоморфные турниры заданного порядка с помощью инструмента `gentourng` из пакета `Nauty and Traces`, декодировать их из формата `digraph6`, вычислять такие инварианты, как диаметр и число  $d$ -королей для различных значений  $d$ , а также агрегировать полученные данные в виде таблиц и тепловых карт. Особое внимание уделено оптимизации вычислений: применена потоковая обработка данных, кэширование



расстояний, многопроцессорная обработка и блочная запись результатов, что позволило обработать миллионы турниров в разумные сроки.

На основе полученных экспериментальных данных были выявлены устойчивые закономерности, обобщающие известные свойства классических королей. Сформулированы семь гипотез, описывающих поведение  $d$ -королей в зависимости от диаметра турнира, его порядка и параметра  $d$ . В частности:

- показано, что в сильных турнирах количество  $n - 1$ -королей всегда максимально и равно  $n$ ;
- подтверждена гипотеза о невозможности существования ровно двух  $d$ -королей;
- установлено, что турниры диаметра  $d$  содержат ровно  $n$   $d$ -королей;
- продемонстрирована монотонность увеличения числа  $d$ -королей при росте параметра  $d$ , с насыщением на уровне  $n$ ;
- выявлена инвариантность императоров относительно изменения  $d$ ;
- обнаружены стабильные последовательности в распределениях числа королей при переходе от  $n$  к  $n + 1$ , что позволяет говорить о существовании «фиксированных режимов» в структуре турниров.

Все эти наблюдения не только расширяют понимание внутренней организации турниров, но и открывают перспективы для дальнейших теоретических исследований. Формулировки гипотез носят достаточно строгий характер и поддаются попыткам формального доказательства с использованием методов экстремальной теории графов, комбинаторного анализа и теории диаметральных свойств ориентированных графов.

Полученные результаты имеют как теоретическую, так и прикладную значимость. Теоретически они углубляют знания о структурных свойствах турниров – одного из фундаментальных объектов дискретной математики. Практически же, поскольку турниры широко

используются в задачах ранжирования, анализа предпочтений, машинного обучения и моделирования конкурентных систем, понимание распределения  $d$ -королей может способствовать разработке более эффективных алгоритмов выбора лидеров, агрегации мнений и оценки центральности в ориентированных сетях.

Таким образом, поставленная цель – исследование свойств  $d$ -королей и выявление закономерностей их распределения – была успешно достигнута. Работа демонстрирует, как сочетание строгого теоретического аппарата и современных вычислительных методов позволяет получать новые эмпирические знания, формировать гипотезы и задавать направления для будущих исследований в теории графов и её приложения.