МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Балашовский институт (филиал)

Кафедра математики, информатики, физики

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМ ЧЕВЫ И МЕНЕЛАЯ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 5 курса 151 группы
направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)»,
профили «Математика и информатика»,
факультета математики и естественных наук
Девиной Нины Юрьевны

Научный руководитель
доцент кафедры математики,
информатики, физики ________ 27.05.2026г ________ Н.В. Бурлак
(подпись, дата)

Зав. кафедрой математики, информатики, физики
кандидат педагогических наук,
доцент ________ 27.05.2026 ________ Е.В. Сухорукова
(подпись, дата)

Балашов 2026

Во введении сформулирована актуальность работы, которая обусловлена тем, что теоремы Чевы и Менелая являются фундаментальными положениями геометрии треугольника, которые позволяют существенно расширить возможности решения геометрических задач. Несмотря на то, что данные теоремы не входят в обязательный курс геометрии 7-9 классов, их применение позволяет находить более рациональные решения задач повышенного уровня сложности, связанных с отношениями отрезков и площадей в треугольнике. В современных условиях подготовки к государственной итоговой аттестации и математическим олимпиадам изучение этих теорем приобретает особую значимость.

Интерес к изучению теорем Чевы и Менелая нашёл своё отражение в работах таких исследователей, Л. С. Атанасян, А. Г. Мерзляк, А. Шевкин. В их трудах рассматриваются как теоретические аспекты этих теорем, так и их применение в решении задач.

Цель работы – изучить возможности применения теорем Чевы и Менелая при решении геометрических задач в рамках подготовки к итоговой аттестации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи**:

- проанализировать теоретические основы теорем Чевы и Менелая;
- проанализировать федеральную образовательную программу и учебники по геометрии;
- сравнить эффективность применения теорем с традиционными методами решения;
- создать методические рекомендации по внедрению изучаемого материала в учебный процесс;
- разработать рабочие листы.

Объект исследования – процесс обучения геометрии.

Предмет исследования – методика изучения теорем Чевы и Менелая как инструмента решения геометрических задач.

В процессе исследования применяются следующие **методы**:

- теоретический анализ научной и методической литературы;
- сравнительный анализ различных подходов к решению задач.

Теоретическая значимость работы заключается в систематизации методических подходов к изучению теорем Чевы и Менелая, разработке новых методических рекомендаций по их применению в школьном курсе геометрии.

Практическая значимость исследования состоит в создании конкретного методического инструментария, включающего систему задач и методические рекомендации, которые могут быть использованы учителями математики при подготовке учащихся к ОГЭ, ЕГЭ и математическим олимпиадам. Разработанная методика способствует развитию пространственного воображения и логической культуры учащихся, повышению эффективности решения геометрических задач.

Материалы исследования были представлены на XI Региональном научно-методическом семинаре учителей математики, информатики, физики «Современные образовательные технологии в урочной и внеурочной деятельности» 28.10. 2025 года, тема доклада «Методические возможности использования теорем Чевы и Менелая» и на ежегодной научно-практической конференции преподавателей и студентов БИ СГУ «Актуальные проблемы науки и образования», 7-10 апреля 2026 года. Тема доклада «Применение теорем Чевы и Менелая при решении геометрических задач на итоговой аттестации».

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников и приложений.

Первая глава посвящена изучению роли теорем Чевы и Менелая в школьном курсе геометрии, их истории, методическим аспектам преподавания и практическому применению при подготовке к экзаменам. Разберём содержание главы подробнее по разделам.

Раздел «История открытия теорем» подробно рассказывает об истории возникновения двух ключевых геометрических теорем.

Теорема Менелая была сформулирована и доказана древнегреческим учёным Менелаем Александрийским в I веке н. э. Время его научной деятельности можно определить по двум астрономическим наблюдениям, проведённым в Риме в 98 году н. э. Менелай внёс значительный вклад в развитие сферической тригонометрии: он автор шести книг о вычислении хорд и трёх книг «Сферики». В его работах сохранилось доказательство теоремы для сферического треугольника, но предполагается, что он владел и доказательством для плоского треугольника.

Теорема Чевы появилась значительно позже – её автором стал итальянский математик и инженер Джованни Чева (1648-1734). В 1678 году он опубликовал работу «О взаимно-пересекающихся прямых», где представил доказательство теоремы, получившей его имя. Чева не только сформулировал свою теорему, но и предложил оригинальное доказательство теоремы Менелая для плоского случая, основанное на рассмотрении центра тяжести системы из трёх точечных грузов. Он посвятил большую часть жизни возрождению греческой геометрии и внёс вклад в развитие механики.

В разделе также подчёркивается современное значение этих теорем:

- служат основой для доказательства многих других геометрических утверждений;
- позволяют находить более рациональные решения сложных задач;
- применяются в различных разделах геометрии, включая проективную геометрию;
- являются важной частью подготовки к олимпиадам и экзаменам по математике.

Кроме того, отмечается, что обе теоремы имеют несколько способов доказательства, что делает их ценными для развития математического мышления. Среди методов доказательства упоминаются: теорема о пропорциональных отрезках, подобие треугольников, метод площадей и комбинации различных подходов.

В разделе «Анализ федеральной образовательной программы по математике» рассматривается место теорем Чевы и Менелая в современной школьной программе.

Теоремы входят в программу по геометрии для 9-х классов с углублённым изучением математики.

Подчёркивается, что использование этих теорем часто позволяет решать задачи более рационально по сравнению с другими методами, требующими дополнительных построений, которые не всегда очевидны.

Описываются цели изучения геометрии в 7-9 классах:

- развитие логического и пространственного мышления (умение выстраивать цепочки рассуждений, «видеть» фигуры мысленно, оперировать образами при решении задач);
- формирование геометрической грамотности (знание ключевых понятий, умение распознавать и изображать фигуры, вычислять их характеристики);
- понимание аксиоматического метода как основы построения научной теории;
- установление взаимосвязи математических дисциплин (использование алгебры для решения геометрических задач и геометрической интерпретации алгебраических фактов).

Раздел подчёркивает, что геометрия в школе – это не просто набор фактов о фигурах, а фундаментальный инструмент познания мира и база для формирования научного мышления, который развивает усидчивость, аккуратность, критичность ума, воображение и интуицию, подкреплённые строгой логикой.

Раздел «Анализ учебников по геометрии» анализирует, как теоремы Чевы и Менелая представлены в школьных учебниках. В учебнике геометрии

8 класса А. Г. Мерзляка и В. Б. Полонского теоремы рассматриваются отдельно.

Доказательство теоремы Менелая приводится на основе коллинеарности. Оно основано на подобии треугольников: опускаются перпендикуляры из вершин треугольника на секущую прямую, используются признаки подобия, составляются пропорции, которые затем преобразуются в отношения отрезков из теоремы;

Теорема Чевы даётся как необходимое и достаточное условие конкурентности прямых (прямых, пересекающихся в одной точке), а её доказательство строится на методе площадей: отношения отрезков заменяются отношениями площадей треугольников с общей высотой, при перемножении дробей площади сокращаются, остаётся равенство единице.

В учебнике поясняется, что такие отрезки называются чевианами.

Отрезок, который соединяет вершину треугольника с какой-либо точкой противолежащей стороны называют чевианой.

В учебнике геометрии 10-11 классов Л. С. Атанасяна и В. Ф. Бутузова теоремы представлены в главе «Некоторые сведения из планиметрии».

Для доказательства теоремы Менелая используется координатный метод: секущая прямая объявляется осью Y, координаты вершин выражаются друг через друга, и условие коллинеарности точек сводится к равенству произведения отношений –1;

Доказательство теоремы Чевы основано на преобразовании через площади: отношения отрезков на сторонах треугольника выражаются как отношения площадей треугольников с вершиной в точке пересечения чевиан, при перемножении отношений площади сокращаются, получается условие $pqr=1$.

Раздел «Решение задач с использованием теорем в ЕГЭ» посвящён практическому применению теорем при подготовке к профильному ЕГЭ по математике (задания 14 и 17).

Отмечается, что задачи на нахождение отношений отрезков или доказательство принадлежности точек одной прямой часто встречаются в экзаменах. Стандартные методы подобия треугольников не всегда дают быстрое решение, поэтому теоремы Чевы и Менелая оказываются полезными инструментами.

Подробно описывается структура экзаменационных задач.

Задание 14 – стереометрическая задача повышенного уровня сложности (доказательство и вычисление).

Задание 17 – планиметрическая задача с доказательством и вычислением.

Подчёркивается, что успешное решение таких задач требует не только знания теоретических фактов, но и умения комбинировать их, строить логические цепочки рассуждений и владеть различными вычислительными приёмами.

Вторая глава посвящена методическим аспектам обучения теоремам Чевы и Менелая в школьном курсе геометрии. В ней последовательно разбираются подходы к изучению теоретического материала, решению задач разного типа (планиметрических и стереометрических), а также даются практические рекомендации для учителей и обучающихся. Глава состоит из четырёх разделов.

В разделе «Методические рекомендации по изучению теоретического материала» описывается системный подход к освоению теорем Чевы и Менелая. Он включает проработку формулировок и понимание геометрического смысла: теорема Чевы используется для доказательства конкурентности трёх чевиан (то есть их пересечения в одной точке) и утверждает, что это происходит тогда и только тогда, когда произведение отношений отрезков равно 1; теорема Менелая применяется для установления коллинеарности трёх точек (то есть того, что они лежат на одной прямой), и в случае направленных отрезков произведение отношений равно –1, а при правильном порядке обхода – 1. Далее подход предусматривает изучение доказательств (в том числе через площади треугольников и подобие) и их самостоятельное воспроизведение, анализ частных случаев (например, конкурентность медиан, биссектрис, высот), активное использование чертежей с чётким обозначением точек, сторон и направлений отрезков, отслеживание порядка множителей в соотношениях. Также в раздел входят решение задач – от простых упражнений к задачам с вспомогательными построениями и преобразованием конфигурации – и рефлексивный подход: сравнение теорем, анализ, почему в конкретной задаче работает одна теорема, а не другая. В приложении А представлена технологическая карта урока по теме «Теоремы Чевы и Менелая», отражающая основные аспекты раздела. Также стоит отметить, что теорема Чевы является следствием теоремы Менелая и наоборот, таким образом, теоремы Чевы и Менелая дают пример взаимно двойственных утверждений.

Раздел «Методические рекомендации по решению задач с использованием теорем Чевы и Менелая» посвящён практическому применению теорем на примерах задач из учебников и дополнительных заданий учителя. В нём рассматриваются типы задач из учебников А.Г. Мерзляка (8 класс) и Л.С. Атанасяна (10-11 классы): доказательство коллинеарности точек (теорема Менелая), доказательство конкурентности чевиан (теорема Чевы), задачи на базовые конфигурации (треугольники) и сложные конструкции (четырёхугольники, трапеции). Далее разбираются конкретные задачи (1-5) с решениями и методическими рекомендациями: применение теорем в «обратных» ситуациях, выделение подходящего треугольника для применения теоремы, работа с отношениями отрезков и площадями, сравнение разных методов решения (с теоремой и без неё). Кроме того, в разделе описываются типичные ошибки учащихся – путаница между теоремами Чевы и Менелая, неверный порядок множителей, игнорирование продолжений сторон – и способы их предупреждения, а также приводится комплект задач для самостоятельного решения для закрепления материала.

Раздел «Методические рекомендации по решению стереометрических задач в ЕГЭ с использованием теорем» фокусируется на применении теорем Чевы и Менелая в стереометрии на примере задач 6-10 из ЕГЭ. Ключевые моменты: переход от пространственной конфигурации к планиметрическим моделям (выделение плоских сечений внутри объёмных фигур), выбор треугольника и секущей прямой (все точки должны лежать в одной плоскости), последовательное применение теоремы (несколько шагов для нахождения искомых отношений), учёт свойств фигур (равнобедренная трапеция, правильный шестиугольник, правильная пирамида и т.д.). В разделе разбираются сложные задачи с подробными решениями: доказательство перпендикулярности плоскостей, нахождение отношений деления высоты, рёбер, апофем, вычисление площадей сечений и объёмов пирамид. Также даются методические рекомендации по организации работы над задачами: чёткое выделение плоскости для применения теоремы, запись соотношений с соблюдением порядка обхода вершин, интерпретация полученных отношений для доказательства свойств фигур. Отдельно рассматриваются способы предупреждения типичных ошибок: неверный порядок множителей, путаница в обозначениях, игнорирование продолжений сторон.

Раздел «Методические рекомендации по решению планиметрических задач из ЕГЭ с использованием теорем» посвящён применению теорем в планиметрических задачах ЕГЭ (задачи 11-13). В нём рассматриваются задачи на отношения отрезков и площадей (например, доказательство, что площадь одного треугольника в несколько раз больше площади другого), использование свойств фигур (ромб, треугольник) и теорем для нахождения отношений и длин. Разбираются задачи 11 – 13 с решениями. Описываются типичные ошибки при работе с теоремой Менелая: неправильный выбор треугольника, нарушение порядка обхода, путаница с отрезками, игнорирование продолжений сторон, а также способы их предупреждения: чёткое обозначение отрезков на чертеже, проверка соответствия данных условию, последовательный обход вершин треугольника. Поясняется, что можно приводить задания для закрепления: аналогичные задачи с разными отношениями отрезков, составление обратных задач, исследование изменений решения при модификации условий (например, замена ромба на параллелограмм).

Вторая глава даёт комплексное представление о методиках преподавания и изучения теорем Чевы и Менелая. Она охватывает теоретическую подготовку (формулировки, доказательства, частные случаи), практику решения задач (от простых до сложных, включая ЕГЭ), предупреждение типичных ошибок и рекомендации для учителей по организации учебного процесса. Материал ориентирован на развитие у учащихся геометрической интуиции, логического мышления и навыков применения теорем в разнообразных геометрических конфигурациях.

В заключении отмечается, что в ходе выполнения бакалаврской работы были достигнуты поставленные цели: рассмотрены теоретические и методические аспекты изучения теорем Чевы и Менелая в школьном курсе геометрии, проанализировано их место в действующих учебниках и федеральной образовательной программе, а также разработаны конкретные методические рекомендации для эффективного преподавания данных тем.

Исследование показало, что, несмотря на отсутствие прямого требования к изучению теорем Чевы и Менелая, эти теоремы играют важную роль в углублённом изучении геометрии, особенно в контексте подготовки учащихся к олимпиадам и подготовке к ОГЭ, ЕГЭ. Анализ школьных учебников выявил, что данные теоремы чаще всего представлены в качестве дополнительного материала или задач повышенной сложности, что подчеркивает необходимость целенаправленной методической работы со стороны учителя.

В работе была представлена система задач, охватывающая различные уровни сложности. На основе одной задачи сравнили эффективность применения теорем по сравнению с традиционными методами решения.

Практической значимостью исследования стала разработка методического материала для ознакомления с теоремами Чевы и Менелая, все основные мысли и идеи которого представлены в технологической карте урока для 8 класса, ориентированного на деятельностный подход и дифференциацию обучения. Также были разработаны рабочие листы.

Включение теорем Чевы и Менелая в школьный курс геометрии, даже в рамках углублённого или факультативного изучения, способствует развитию логического мышления, геометрической интуиции и математической культуры обучающихся.

27.05.2026 г. Девина Ю. Ю.