Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО"

Кафедра математического анализа

Ю.В. Матвеева, М.А. Осипцев, Д.В. Прохоров

Линейное векторное пространство. Функции многих переменных.

Курс лекций

Саратов 2014

Содержание

Лекция 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Определение и свойства векторного пространства

Изучению функций $y = f(x)$ предшествовала важная глава оснований математики, в которой обсуждалась модель действительного числа как бесконечной десятичной дроби, арифметические операции над действительными числами, отношение порядка и свойство полноты множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Переход к функциям многих переменных $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ требует предварительного проникновения в теорию n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. В отличие от действительных чисел, векторы не сравниваются отношением порядка "больше - меньше". От арифметических операций остается сложение и обратная ему операция вычитания. Взамен умножения действительных чисел, векторы можно умножать на скаляр. Вдобавок появляется скалярное произведение двух векторов, результатом которого служит действительное число.

Определение 1. *Набор n действительных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется вектором $\mathbf{x}$ размерности n. Число x_1 называется первой координатой вектора $\mathbf{x}$, число x_2 называется второй координатой вектора $\mathbf{x}$. И так далее. Число x_n называется n-й координатой вектора $\mathbf{x}$.*

Определение 2. *Совокупность всевозможных векторов $\mathbf{x}$ размерности n, в которой умножение вектора $\mathbf{x}$ на число α и сложение векторов x и y определяется формулами*

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

называется действительным n-мерным арифметическим пространством и обозначается символом $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно установить, что операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр удовлетворяют следующим условиям.

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$,

3. существует нулевой элемент $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)$ такой, что $\mathbf{x} + \mathbf{O} = \mathbf{x}$ для всех $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

4. для каждого $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ существует противоположный элемент $(-\mathbf{x})$ такой, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{O}$,

5. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$,

6. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$,

7. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$,

8. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$.

Здесь $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Благодаря перечисленным свойствам множество $\mathbb{R}^n$ является линейным, или векторным пространством.

Скалярное произведение

Зададим скалярное произведение векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Тогда число*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

называется скалярным произведением векторов $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и обозначается* $\mathbf{xy}$,

$$\mathbf{xy} = \sum_{k=1}^{n} x_ky_k.$$

Элементарной проверкой убеждаемся в том, что скалярное произведение удовлетворяет следующим условиям.

1. $\mathbf{xx} \geq 0, \quad \mathbf{xx} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{O}$,

2. $\mathbf{xy} = \mathbf{yx}$,

3. $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = \mathbf{xz} + \mathbf{yz}$,

4. $(\alpha\mathbf{x})\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{xy})$.

Здесь $\mathbf{x}, \mathbf{yz} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Благодаря перечисленным свойствам множество $\mathbb{R}^n$ является евклидовым пространством.

Для скалярного произведения векторов выполняется неравенство Коши, которое сформулируем в следующей теореме.

Теорема 1. *Для скалярного произведения векторов* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *справедливо неравенство*

$$|\mathbf{xy}| \leq \sqrt{\mathbf{xx}}\sqrt{\mathbf{yy}}.$$

Доказательство. Для фиксированных векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и произвольного числа α рассмотрим квадратичную функцию

$$\varphi(\alpha) = (\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y})(\alpha\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha^2(\mathbf{xx}) + 2\alpha(\mathbf{xy}) + \mathbf{yy}.$$

Поскольку

$$(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y})(\alpha\mathbf{x}+\mathbf{y}) \geq 0,$$

то квадратичная функция имеет неположительный дискриминант,

$$(\mathbf{xy})^2 - (\mathbf{xx})(\mathbf{yy}) \leq 0,$$

что приводит к неравенству

$$|\mathbf{xy}| \leq \sqrt{\mathbf{xx}}\sqrt{\mathbf{yy}}$$

и доказывает теорему 1.

Неравенство Коши теоремы 1 для векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ запишется в координатах в виде

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}.$$

Определим длину вектора в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 4. *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Тогда число*

$$\sqrt{\mathbf{xx}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

называется длиной, или нормой вектора $\mathbf{x}$ *и обозначается*

$$|\mathbf{x}| \text{ или } \|\mathbf{x}\|.$$

Убедимся в выполнении следующих условий.

1. $|\mathbf{x}| \geq 0, \ \ |\mathbf{x}| = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{O}$,
2. $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha||\mathbf{x}|$,
3. $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$.

Здесь $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Первые два условия устанавливаются элементарной проверкой. Третье условие, называемое неравенством треугольника, проверим следующим рассуждениемм.

Действительно,

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{xx} + 2\mathbf{xy} + \mathbf{yy} \leq \mathbf{xx} + 2\sqrt{\mathbf{xx}}\sqrt{\mathbf{yy}} + \mathbf{yy} =$$

$$(\sqrt{\mathbf{xx}} + \sqrt{\mathbf{yy}})^2 = (|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)^2.$$

Примененное в этой цепочке неравенство является неравенством Коши теоремы 1. Извлекая квадратный корень из обеих частей последнего неравенства, придем к неравенству треугольника.

Определим расстояние между векторами.

Определение 5. *Пусть* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Тогда число*

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$$

называется расстоянием между векторами $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ *и обозначается*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Элементарной проверкой убеждаемся в выполнении следующих условий.

1. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0, \quad \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,

2. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$,

3. $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

Здесь $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Определим угол между ненулевыми векторами в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 6. *Пусть* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{O}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{O}$. *Тогда число* φ, *для которого*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{|\mathbf{x}||\mathbf{y}|},$$

называется углом между векторами $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Неравенство Коши теоремы 1 делает определение 6 корректным, так как неравенство $|\cos\varphi| \leq 1$ корректно определяет возможные числа φ.

Определение 7. *Ненулевые векторы* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *и* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *называются ортогональными, если* $\mathbf{x}\mathbf{y} = 0$.

Определения 6 и 7 объясняют, что векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны в том случае, когда угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равен $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Точки и множества в пространстве $\mathbb{R}^n$

Определим характерные множества в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 8. *Пусть* $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. *Множество векторов* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r,$$

называется шаром радиуса r *с центром в точке* $\mathbf{x}^0$. *Множество векторов* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *удовлетворяющих неравенству*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \leq r,$$

называется замкнутым шаром радиуса r с центром в точке $\mathbf{x}^0$.

Определение 9. *Шар радиуса δ с центром в точке $\mathbf{x}^0$ называется δ-окрестностью точки $\mathbf{x}^0$.*

Определение 10. *Множество векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих системе неравенств*

$$\begin{cases} a_1 \le x_1 \le b_1 \\ a_2 \le x_2 \le b_2 \\ \quad\quad \vdots \\ a_n \le x_n \le b_n \end{cases},$$

называется параллелепипедом.

Очевидно, что в каждый шар можно поместить некоторый параллелепипед, и обратно, в каждый параллелепипед можно поместить некоторый шар.

Определим различный характер точек множества в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 11. *Точка $\mathbf{x}$ называется внутренней точкой множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если она принадлежит множеству X вместе с некоторой δ-окрестностью.*

Определение 12. *Точка $\mathbf{x}$ называется предельной точкой множества $X \subset \mathbb{R}^n$, если в любой δ-окрестности точки $\mathbf{x}$ найдутся точки множества X, отличные от $\mathbf{x}$.*

Определим типы множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$ по характеру точек множества.

Определение 13. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если оно содержится в некотором шаре.*

Определение 14. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется открытым, если все его точки внутренние.*

Определение 15. *Множество $X \subset \mathbb{R}^n$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

Впоследствии покажем, что множество X в пространстве $\mathbb{R}^n$ открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $\mathbb{R}^n \setminus X$ является замкнутым.

Последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$

Опишем последовательности в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 16. *Функция натурального аргумента со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется последовательностью в $\mathbb{R}^n$. Другими словами, последовательностью в $\mathbb{R}^n$ называется множество векторов в $\mathbb{R}^n$*

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k, \dots,$$

где каждый элемент снабжен своим натуральным индексом $1, 2, \ldots, k, \ldots$.

Определение 17. *Вектор* $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^n$ *называется пределом последовательности* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$*, если*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists k_0 \; \forall k > k_0 \; \rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{l}) < \epsilon.$$

В этом случае последовательность называется сходящейся. В противном случае последовательность называется расходящейся.

Определение 18. *Последовательность* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ *в пространстве* $\mathbb{R}^n$ *называется фундаментальной, если*

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists k_0 \; \forall j > k_0, k > k_0 \; \rho(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k) < \epsilon.$$

Вопросы для тестирования и контроля

1. Пусть $B(1, \mathbf{O})$ - шар радиуса 1 с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{A}$ - точка на расстоянии $\rho > 0$ от этого шара. Описать множество предельных точек для множества $X = B(1, \mathbf{O}) \cup \{\mathbf{A}\}$.

2. Описать множество внутренних точек для множества X из первого вопроса.

3. В каком случае для ненулевых векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ в неравенстве Коши достигается знак равенства, то есть

$$|\mathbf{xy}| = \sqrt{\mathbf{xx}}\sqrt{\mathbf{yy}}.$$

4. В каком случае для ненулевых векторов в простанвстве $\mathbb{R}^n$ выполняется равенство

$$\mathbf{xy} = \sqrt{\mathbf{xx}}\sqrt{\mathbf{yy}}.$$

5. В каком случае для векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ в нераенстве труегольника достигается знак равенства, то есть

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

Лекция 2.

СОДЕРЖАНИЕ

Связь между векторными и координатными последовательностями

Сначала покажем, что каждая векторная последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$ эквивалентно представлена n координатными последовательностями.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ дана векторная последовательность $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$. Каждый вектор $\mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2,^k, \ldots, x_n^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, запишем в виде столбца и перепишем векторную последовательность в виде

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}, \ldots .$$

Элементы $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k, \ldots$, находящиеся в первой строчке каждого из векторов в последовательности, образуют числовую последовательность, которую назовем первой координатной последовательностью. Элементы $x_2^1, x_2^2, \ldots, x_2^k, \ldots$, находящиеся во второй строчке каждого из векторов в последовательности, образуют числовую последовательность, которую назовем второй координатной последовательностью. И так далее. Наконец, элементы $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k, \ldots$, находящиеся в n-й строчке каждого из векторов в последовательности, образуют числовую последовательность, которую назовем n-й координатной последовательностью.

Таким образом, векторная последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$ представлена n числовыми координатоными последовательностями. А значит, исследование векторных последовательностей можно свести к исследованию знакомых числовых координатных последовательностей. Начнем с установления свойства ограниченности векторной последовательности.

Теорема 1. *Векторная последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$ ограничена тогда и только тогда, когда каждая из ее n координатных последовательностей ограничена.*

Доказательство. По определению, векторная последовательность $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ ограничена, если все ее элементы содержатся в некотором шаре. Поскольку шар можно поместить в некоторый параллелепипед, то перефразируем определение ограниченности векторной последовательности как возможность поместить все ее элемены в некоторый параллелепипед. Это означает, что для любого номера $k \geq 1$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases} a_1 \leq x_1^k \leq b_1 \\ a_2 \leq x_2^k \leq b_2 \\ \vdots \\ a_n \leq x_n^k \leq b_n \end{cases}.$$

Первая строчка этой системы неравенств определяет ограниченность первой координатной последовательности, поскольку все ее элементы содержатся в отрезке $[a_1, b_1]$. Вторая строчка этой системы неравенств определяет ограниченность второй координатной последовательности, поскольку все ее элементы содержатся в отрезке $[a_2, b_2]$. И так далее. Наконец, n-я строчка этой системы неравенств определяет ограниченность n-й координатной последовательности, поскольку все ее элементы содержатся в отрезке $[a_n, b_n]$. Так как каждая фаза доказательства осуществляла переход к эквивалентным утверждениям, то проведено доказательство одновременно необходимости и достаточности условий теоремы 1.

Покажем, что сходимость векторной последовательности также эквивалентна сходимости всех координатных последовательностей.

Теорема 2. *Векторная последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда каждая из ее n координатных последовательностей сходится.*

Доказательство. В теореме 2 высказаны необходимые и достаточные условия сходимости векторной последовательности. Начнем с доказательства необходимости условий. Пусть векторная последовательность $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ сходится к пределу $\mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n)$. По определению,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists k_0 \ \forall k > k_0 \ \rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{l}) < \epsilon.$$

Так как

$$|x_1^k - l_1| \leq \sqrt{(x_1^k - l_1)^2 + (x_2^k - l_2)^2 + \cdots + (x_n^k - l_n)^2} = \rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{l}),$$

то из условия сходимости векторной последовательности к $\mathbf{l}$ следует, что

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists k_0 \ \forall k > k_0 \ |x_1^k - l_1| < \epsilon,$$

что по определению означает сходимость первой координатной последовательности $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k, \ldots$ к l_1. Подобным образом, неравенства

$$|x_2^k - l_2| \leq \rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{l}), \ \ldots, \ |x_n^k - l_n| \leq \rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{l})$$

влекут сходимость второй координатной последовательности к l_2, и так далее, сходимость n-й координатной последовательности к l_n. Мы доказали сходимость всех координатных последовательностей, а вместе с тем и необходимость условий теоремы 2.

Перейдем к доказательству достаточности условий. Пусть первая координатная последовательность сходится к l_1, вторая координатная последовательность сходится к l_2, и так далее, n-я координатная последовательность сходится к l_n. По определению,

$$\begin{gathered}\forall \epsilon > 0\ \exists k_1\ \forall k > k_1\ |x_1^k - l_1| < \epsilon,\\ \forall \epsilon > 0\ \exists k_2\ \forall k > k_2\ |x_2^k - l_2| < \epsilon,\\ \vdots\\ \forall \epsilon > 0\ \exists k_n\ \forall k > k_n\ |x_n^k - l_n| < \epsilon.\end{gathered}$$

Обозначим

$$k_0 = \max_{1 \le j \le n} k_j, \quad \mathbf{l} = (l_1, l_2, \ldots, l_n).$$

Если $k > k_0$, то выполнены все перечисленные неравенства. Соединяя их вместе, получим

$$\forall \epsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ \sqrt{(x_1^k - l_1)^2 + (x_2^k - l_2)^2 + \cdots + (x_n^k - l_n)^2} <$$

$$\sqrt{\epsilon^2 + \epsilon^2 + \cdots + \epsilon^2} = \epsilon\sqrt{n}.$$

Учитывая, что если ϵ - произвольное положительное число, то и $\epsilon\sqrt{n}$ тоже произвольное положительное число, приходим к определению сходимости векторной последовательности к $\mathbf{l}$, что доказывает теорему 2.

Похожим образом установим эквивалентность фундаментальности векторной последовательности и фундаментальность всех ее координатных последовательностей.

Теорема 3. *Векторная последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$ фундаментальна тогда и только тогда, когда каждая из ее n координатных последовательностей фундаментальна.*

Доказательство. В теореме 3 высказаны необходимые и достаточные условия фундаментальности векторной последовательности. Начнем с доказательства необходимости условий. Пусть векторная последовательность $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ фундаментальна. По определению,

$$\forall \epsilon > 0\ \exists k_0\ \forall j > k_0, k > k_0\ \rho(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k) < \epsilon.$$

Так как

$$|x_1^j - x_1^k| \le \sqrt{(x_1^j - x_1^k)^2 + (x_2^j - x_2^k)^2 + \cdots + (x_n^j - x_n^k)^2} = \rho(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k),$$

то из условия фундаментальности векторной последовательности следует, что

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists k_0 \; \forall j > k_0, k > k_0 \; |x_1^j - x_1^k| < \epsilon,$$

что по определению означает фундаментальность первой координатной последовательности. Подобным образом, неравенства

$$|x_2^j - x_2^k| \le \rho(\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^k), \; \ldots, \; |x_n^j - x_n^k| \le \rho(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^k)$$

влекут фундаментальность второй координатной последовательности, и так далее, фундаментальность n-й координатной последовательности. Мы доказали фундаментальность всех координатных последовательностей, а вместе с тем и необходимость условий теоремы 3.

Перейдем к доказательству достаточности условий. Пусть все координатные последовательности фундаментальны. По определению,

$$\begin{gathered}
\forall \epsilon > 0 \; \exists k_1 \; \forall j > k_1, k > k_1 \; |x_1^j - x_1^k| < \epsilon, \\
\forall \epsilon > 0 \; \exists k_2 \; \forall j > k_2, k > k_2 \; |x_2^j - x_2^k| < \epsilon, \\
\vdots \\
\forall \epsilon > 0 \; \exists k_n \; \forall j > k_n, k > k_n \; |x_n^j - x_n^k| < \epsilon.
\end{gathered}$$

Обозначим

$$k_0 = \max_{1 \le j \le n} k_j.$$

Если $k > k_0$, то выполнены все перечисленные неравенства. Соединяя их вместе, получим

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists k_0 \; \forall k > k_0 \; \sqrt{(x_1^j - x_1^k)^2 + (x_2^j - x_2^k)^2 + \cdots + (x_n^j - x_n^k)^2} <$$

$$\sqrt{\epsilon^2 + \epsilon^2 + \cdots + \epsilon^2} = \epsilon\sqrt{n}.$$

Учитывая, что если ϵ - произвольное положительное число, то и $\epsilon\sqrt{n}$ тоже произвольное положительное число, приходим к определению фундаментальности векторной последовательности, что доказывает теорему 3.

Свойства векторных последовательностей

Теоремы 1, 2, 3 об эквивалентности ограниченности, сходимости и фундаментальности векторной и ее координатных последовательностей позволяют мгновенно перенести известные теоремы о числовых последовательностях на векторные последовательности. Сначала докажем теорему об ограниченности сходящейся векторной последовательности.

Теорема 4. *Если векторная последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Установим цепочку логических заключений. Векторная последовательность сходится $\Longleftrightarrow$ все ее координатные последовательности сходятся $\Longrightarrow$ все ее координатные последовательности ограничены $\Longleftrightarrow$ векторная последовательность ограничена. Этим завершается доказательство теоремы 4.

Передокажем для векторной последовательности критерий Коши, известный в теории числовых последовательностей.

Теорема 5. *Векторная последовательность в пространстве $\mathbb{R}^n$ сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. Установим цепочку логических эквивалентностей. Векторная последовательность сходится $\Longleftrightarrow$ все ее координатные последовательности сходятся $\Longleftrightarrow$ все ее координатные последовательности фундаментальны $\Longleftrightarrow$ векторная последовательность фундаментальна. Этим завершается доказательство теоремы 5.

Теорема Больцано-Вейерштрасса

Чуть более сложно передокажем для векторных последовательностей известную теорему Больцано-Вейерштрасса о возможности выделения сходящейся подпоследовательности из всякой ограниченной числовой последовательности.

Теорема 6. *Из всякой ограниченной векторной последовательности в простанстве $\mathbb{R}^n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть векторная последовательность $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ ограничена. Это эквивалентно тому, что все ее координатные последовательности ограничены.

Из ограниченной первой координатной последовательности $x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^k, \ldots$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_1^{j_1}, x_1^{j_2}, \ldots, x_1^{j_k}, \ldots \; .$$

Используем номера $j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots$ для того, чтобы из векторной последовательности выделить подпоследовательность с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k, \ldots$. Тогда векторная подпоследовательность

$$\mathbf{x}^{j_1}, \mathbf{x}^{j_2}, \ldots, \mathbf{x}^{j_k}, \ldots$$

обладает тем свойством, что все ее координатные последовательности ограничены, а первая координатная последовательность сходится.

Рассмотрим вторую координатную последовательность у выделенной векторной подпоследовательности

$$x_2^{j_1}, x_2^{j_2}, \ldots, x_2^{j_k}, \ldots \; .$$

Поскольку эта числовая последовательность ограничена, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность

$$x_2^{m_1}, x_2^{m_2}, \dots, x_2^{m_k}, \dots .$$

Здесь номера $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$ обозначают выделенную подпоследовательность из номеров $j_1, j_2, \dots, j_k, \dots$. Вновь возвращаемся к первой выделенной векторной подпоследовательности и используем номера $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$ для того чтобы из первой выделить вторую подпоследовательность с номерами $m_1, m_2, \dots, m_k, \dots$,

$$\mathbf{x}^{m_1}, \mathbf{x}^{m_2}, \dots, \mathbf{x}^{m_k}, \dots .$$

Эта вторая векторная подпоследовательность обладает тем свойством, что все ее координатные последовательности ограничены, первая координатная последовательность сходится как подпоследовательность сходящейся последовательности, а вторая координатная последовательность сходится по способу выделения подпоследовательности.

Проделав такие два шага, продолжаем далее процесс выделения подпоследовательностей, используя выделение сходящихся числовых подпоследовательностей из очередных координатных последовательностей. На предпоследнем шаге получим векторную подпоследовательность

$$\mathbf{x}^{u_1}, \mathbf{x}^{u_2}, \dots, \mathbf{x}^{u_k}, \dots,$$

с тем свойством, что ее n-я координатная последовательность ограничена, а первая, вторая, и так далее, $(n-1)$-я координатные последовательности сходятся. Тогда из ограниченной n-й координатной последовательности

$$x_n^{u_1}, x_n^{u_2}, \dots, x_n^{u_k}, \dots$$

выделяем сходящуюся подпоследовательность

$$x_n^{v_1}, x_n^{v_2}, \dots, x_n^{v_k}, \dots .$$

Здесь номера $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$ обозначают выделенную подпоследовательность из номеров $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$. Последним шагом выделяем n-ю векторную подпоследовательность с номерами $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$,

$$\mathbf{x}^{v_1}, \mathbf{x}^{v_2}, \dots, \mathbf{x}^{v_k}, \dots .$$

Она обладает тем свойством, что все ее координатные последовательности сходятся. Следовательно, последняя n-я выделенная векторная подпоследовательность сходится, что доказывает теорему 6.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Пусть дана ограниченная векторная последовательность, верхняя грань множества элементов ее k-й координатной последовательности равна l_k. Всегда ли можно выделить сходящуюся подпоследовательность векторной последовательности таким образом, чтобы ее k-я координатная последовательность сходилась к l_k.

2. Пусть дана ограниченная векторная последовательность, верхняя грань множества элементов ее j-й координатной последовательности равна l_j, а верхняя грань множества элементов ее k-й координатной последовательности равна l_k. Всегда ли можно выделить сходящуюся подпоследовательность векторной последовательности таким образом, чтобы ее j-я координатная последовательность сходилась к l_j, а k-я координатная последовательность сходилась к l_k.

3. Пусть векторная последовательность ограничена и все ее координатные последовательности монотонны. Будет ли такая векторная последовательность фундаментальной.

4. Пусть дана последовательность "векторов" , у которых имеется счетное множество координат, и пусть все координатные последовательности такой "векторной" последовательности ограничены. Будет ли в этом случае справедлива теорема Больцано-Вейерштрасса о возможности выделения подпоследовательности, для которой все координатные последовательности сходятся.

5. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ даны две сходящиеся векторные последовательности $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ и $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k, \ldots$. Будет ли сходиться последовательность их скалярных произведений $\mathbf{x}^1\mathbf{y}^1, \mathbf{x}^2\mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{x}^k\mathbf{y}^k, \ldots$.

Лекция 3.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Предел и непрерывность векторной функции векторного переменного
2. Эквивалентность определений Коши и Гейне непрерывности и существования предела
3. Критерий Коши существования предела векторной функции векторного переменного
4. Непрерывность сложной векторной функции векторного переменного
5. График векторной функции векторного переменного

Предел и непрерывность векторной функции векторного переменного

Изучение математического анализа на начальной стадии было сосредоточено на функциях

$$y = f(x),$$

где переменные x и y понимались как вещественные числа, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Запросы теории и практики требуют естественного расширения применения мощных средств дифференциального и интегрального исчисления на многопараметрическую зависимость. Зависимые и независимые переменные могут составлять несколько компонент и обладать более сложной природой взаимного влияния компонент переменного x на различные свойства, выражаемые компонентами переменного y. На математическом языке это означает, что x становится векотором

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1,$$

а y превращается в вектор

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1.$$

Изображая формально вектор $\mathbf{x}$ в виде строчки, а вектор $\mathbf{y} = \mathbf{f}$ в виде столбца, можем записать векторную зависимость

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

как систему равенств

$$\begin{array}{c} y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{array}.$$

Случай $m = 1$ и $n = 1$ приводит к изученной версии скалярной функции $y = f(x)$, зависящей от скалярного переменного x.

Нам предстоит совершить перенос методов исследования скалярной функции скалярного переменного на векторные функции и векторные переменные. Мы должны увидеть, какие из развитых методов переносятся на новые области анализа, а какие теряются. В обобщенной теории появляются новые эффекты, которые отражают специфику векторной природы величин. Наконец, переходы от скаляра x к вектору $\mathbf{x}$ и от скаляра y к вектору $\mathbf{y}$ привносят различные изменения в теорию. Мы увидим, что первый из них заметно влияет на содержание, тогда как второй осуществляет почти полное обобщение.

Будем считать, что функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ отображает множество $X \subset \mathbb{R}^n$ во множество $Y \subset \mathbb{R}^m$. Начнем с определений непрерывности функции по Коши и по Гейне.

Определение 1. *Вектор* $\mathbf{l}$ *называется пределом функции* $\mathbf{f}$ *в точке* $\mathbf{x}^0$ *на множестве* X*, если*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0, |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}| < \epsilon,$$

и обозначается

$$\mathbf{l} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Символы $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|$ и $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}|$ воспринимаются как длины векторов $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ и $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}$.

Шар $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta\}$ называется δ-окрестностью точки $\mathbf{x}^0$.

Определение 2. *Вектор* $\mathbf{l}$ *называется пределом функции* $\mathbf{f}$ *в точке* $\mathbf{x}^0$ *на множестве* X*, если для всякой последовательности векторов* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$*, такой, что* $\mathbf{x}^k \in X$*,* $\mathbf{x}^k \neq \mathbf{x}^0$*,* $k \geq 1$*, и* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$*, выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{l}.$$

Определение 3. *Пусть* $\mathbf{x}^0 \in X$*. Функция* $\mathbf{f}$ *называется непрерывной в точке* $\mathbf{x}^0$ *на множестве* X*, если*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathbf{x} \in X\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| < \epsilon.$$

В противном случае функция $\mathbf{f}$ *называется разрывной в точке* $\mathbf{x}^0$*.*

Определение 4. *Пусть* $\mathbf{x}^0 \in X$*. Функция* $\mathbf{f}$ *называется непрерывной в точке* $\mathbf{x}^0$ *на множестве* X*, если для всякой последовательности векторов* $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$*, такой, что* $\mathbf{x}^k \in X$*,* $k \geq 1$*, и* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$*, выполняется условие*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{f}(\mathbf{x^0}).$$

В противном случае функция $\mathbf{f}$ *называется разрывной в точке* $\mathbf{x}^0$.

Определения 1 и 3 будем связывать с именем Коши, а определения 2 и 4 - с именем Гейне. Второе и четвертое определения позволяют применять теорию пределов векторных последовательностей в теории пределов векторных функций и непрерывности векторных функций векторного переменного.

Эквивалентность определений Коши и Гейне непрерывности и существования предела

Как и прежде, определения Коши и Гейне эквивалентны и в случае предела функции, и в случае непрерывности функции. Покажем это, повторяя стандартные рассуждения начального курса математического анализа. Сформулируем теорему в общем виде, а в доказательстве остановимся лишь на случае непрерывности функции.

Теорема 1. *Определения Коши и Гейне предела или непрерывности функции в точке* $\mathbf{x}^0$ *на множестве* X *эквивалентны.*

Доказательство. Покажем сначала, что непрерывность в смысле Коши влечет непрерывность в смысле Гейне. Пусть для функции $\mathbf{f}$ выполнены условия определения 3

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mathbf{x} \in X\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| < \epsilon.$$

Выберем произвольно последовательность точек $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$, принадлежащих множеству X, такую, что $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$. По определению предела последовательности

$$\exists k_0\ \forall k > k_0\ |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < \delta.$$

Тогда по определению 3 выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| < \epsilon.$$

Собирая вместе все условия, сформулируем заключение

$$\forall\epsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0\ |\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| < \epsilon,$$

которое означает, что выполняется определение Гейне, так как

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0).$$

Обратно, покажем теперь, что непрерывность в смысле Гейне влечет непрерывность в смысле Коши. Пусть для функции $\mathbf{f}$ выполнены условия определения 4. Проведем доказательство от противного. Предположим, что функция $\mathbf{f}$ не удовлетворяет условию определения 3. Нетрудно записать отрицание предиката. Для этого следует заменить кванторы на противоположные и написать отрицание имеющегося высказывания. Таким образом, отрицание требования в определении 3 представим в виде

$$\exists\epsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists\mathbf{x} \in X\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| \geq \epsilon.$$

Будем выбирать различные δ. Если $\delta = 1$, то

$$\exists\mathbf{x}^1 \in X\ |\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^0| < 1 \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| \geq \epsilon.$$

Если $\delta = \frac{1}{2}$, то

$$\exists\mathbf{x}^2 \in X\ |\mathbf{x}^2 - \mathbf{x}^0| < \frac{1}{2} \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| \geq \epsilon.$$

И так далее. На k-м шаге если $\delta = \frac{1}{k}$, то

$$\exists\mathbf{x}^k \in X\ |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < \frac{1}{k} \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| \geq \epsilon.$$

Продолжим процесс неограниченно. В итоге получим последовательность векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$, принадлежащих X и удовлетворяющих перечисленным условиям. Так как $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < \frac{1}{k}$, то $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$ и по определению 4 $\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$, что противоречит неравенству $|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)| \geq \epsilon$. Возникшее противоречие доказывает ложность предположения. Следовательно, функция $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве X в смысле Коши. Теорема 1 доказана.

Критерий Коши существования предела векторной функции векторного переменного

Аналогичным образом перенесем критерий Коши существования предела скалярной функции скалярного переменного на случай векторной функции векторного переменного.

Теорема 2. *Функция $\mathbf{f}$ имеет предел в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве X тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0, \mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^0,\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \text{ и }$$
$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')| < \epsilon.$$

Доказательство. Начнем с доказательства необходимости условия теоремы 2. Предположим, что функция $\mathbf{f}$ имеет предел $\mathbf{l}$ в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве X. Тогда по определению Коши

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0,\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}| < \epsilon.$$

Помимо точки $\mathbf{x}$, выберем произвольно точку $\mathbf{x}' \in X$ с теми же условиями. Согласно определению предела функции для $\mathbf{x}'$ также, как и для $\mathbf{x}$, выполняется неравенство

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}') - \mathbf{l}| < \epsilon.$$

Осталось записать нехитрую логическую цепочку соотношений, основанную на сложении двух неравенств

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \mathbf{x} \in X, \mathbf{x}' \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0, \mathbf{x}' \neq \mathbf{x}^0,\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta \text{ и } |\mathbf{x}' - \mathbf{x}^0| < \delta \Rightarrow$$

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')| = |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l} + \mathbf{l} - \mathbf{f}(\mathbf{x}')| \leq |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{l}| + |\mathbf{l} - \mathbf{f}(\mathbf{x}')| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Поскольку ϵ - произвольное положительное число, то и 2ϵ - тоже произвольное положительное число, поэтому последнее условие эквивалентно условию Коши в формулировке теоремы 2. Это доказывает необходимость условия Коши для существования предела функции.

Перейдем к доказательству достаточности условия Коши. Пусть выполняется условие теоремы 2. Выберем произвольно на множестве X последовательность векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$, отличных от $\mathbf{x}^0$, сходящуюся к $\mathbf{x}^0$. По определению предела последовательности

$$\exists k_0\ \forall k > k_0\ |\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < \delta.$$

Пусть $k > k_0$ и $m > k_0$. Для $\mathbf{x}^k$ и $\mathbf{x}^m$ выполнены неравенства

$$|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^0| < \delta \text{ и } |\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^0| < \delta$$

и следовательно,

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^m)| < \epsilon.$$

Собирая все условия воедино, запишем логическую цепочку

$$\forall \epsilon > 0\ \exists k_0\ \forall k > k_0, m > k_0\ |\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}^m)| < \epsilon,$$

которая означает фундаментальность последовательности
$\mathbf{f}(\mathbf{x}^1), \mathbf{f}(\mathbf{x}^2), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \ldots$. По критерию Коши эта последовательность сходится, $\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{l}$.

Осталось показать, что предел $\mathbf{l}$ не зависит от выбора последовательности векторов. Пусть на множестве X даны две последовательности векторов $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ и $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^k, \ldots$, отличных от $\mathbf{x}^0$, сходящихся к $\mathbf{x}^0$. По доказанному

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{l} \text{ и } \lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{l}'.$$

Образуем последовательность векторов

$$\mathbf{x}^1, \mathbf{z}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k, \ldots,$$

отличных от $\mathbf{x}^0$, сходящуюся к $\mathbf{x}^0$. По доказанному последовательность

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^1), \mathbf{f}(\mathbf{z}^1), \mathbf{f}(\mathbf{x}^2), \mathbf{f}(\mathbf{z}^2), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \mathbf{f}(\mathbf{z}^k), \ldots$$

также сходится. Поскольку векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{l}'$ являются ее частичными пределами, то $\mathbf{l} = \mathbf{l}'$. Таким образом, предел $\mathbf{l}$ не зависит от выбора последовательности точек. Теперь по определению Гейне заключаем, что функция $\mathbf{f}$ имеет предел $\mathbf{l}$ в точке $\mathbf{x}^0$ на множестве X и завершаем доказательство теоремы 2.

Непрерывность сложной векторной функции векторного переменного

Нам потребуется еще теорема о непрерывности сложной функции, известная для скалярных функций скалярного переменного, которая без изменений остается справедливой в многомерном случае.

Теорема 3. *Пусть функция* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0$, *а функция* $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$, *непрерывна в точке* $\mathbf{y}^0$, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. *Тогда сложная функция* $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}^0$.

Доказательство. Сначала убедимся в том, что сложная функция определена в некоторой δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$. Действительно, функция $\mathbf{g}$ определена в некоторй ϵ-окрестности точки $\mathbf{y}^0$. Но определение Коши непрерывности функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ гарантирует существование δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$, которая при отображении $\mathbf{f}$ переходит в ϵ-окрестность точки $\mathbf{y}^0$.

Перейдем к непосредственному доказательству утверждения теоремы 3. Для этого воспользуемся определением непрерывности по Гейне функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$. Выберем произвольно последовательность точек $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ из δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ такую, что $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^0$. Тогда по определению Гейне

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0).$$

Теперь воспользуемся определением непрерывности по Гейне функции $\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{y}^0$ применительно к последовательности

$$\mathbf{y}^1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^1), \mathbf{y}^2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^2), \ldots, \mathbf{y}^k = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k), \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}^k = \mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0).$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{g}(\mathbf{y}^k) = \mathbf{g}(\mathbf{y}^0).$$

Подставим в последнее соотношение $\mathbf{y}^k = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$ и придем к определению Гейне непрерывности сложной функции $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ в точке $\mathbf{x}^0$. Теорема 3 доказана.

График векторной функции векторного переменного

График скалярной функции $y = f(x)$ скалярного переменного x принято изображать на плоскости, включающей две оси переменных x и y. По аналогии график функции $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ следует изображать в пространстве, содержащем n осей, соответствующих n координатам переменного x, и m осей, соответствующих m координатам переменного y. Таким образом, график такой функции изображается в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$. Наглядность геометрического образа дается нам лишь на плоскости и в трехмерном пространстве, что означает соотношение размерностей $n + m = 3$.

Ограничимся наивной геометрической интерпретацией изображения графика в трехмерном пространстве, предполагая, что при увеличении размерности наглядность уступит место абстрактному воображению. Если $n = 2$ и $m = 1$, то график непрерывной функции $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ можно представить как некоторую поверхность в пространстве переменных (x_1, x_2, y), имеющую проекцию на плоскость переменных координат x_1 и x_2 вектора $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, где каждой точке (x_1, x_2) этой проекции однозначно соответствует значение $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$. В частности, графиком линейной функции f является плоскость, непараллельная оси переменного y. Аналитическая геометрия предоставляет большой набор поверхностей, задаваемых различными функциями или уравнениями.

При другом соотношении $n = 1$ и $m = 2$ функция $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, может рассматриваться как система двух функций $y_1 = y_1(x)$ и $y_2 = y_2(x)$. Ее график изображается кривой в пространстве переменных (x, y_1, y_2), имеющей проекцию на ось переменного x, где каждой точке x этой проекции однозначно соответствует вектор $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$. В частности, линейным функциям $y_1(x)$ и $y_2(x)$ соответствует график в виде прямой, неперпендикулярной оси переменного x. Большой арсенал кривых известен из курса аналитической геометрии.

Можно высказать общую идею, что непрерывная функция $\mathbf{y} = \mathbf{y}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, задает некоторую кривую в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$.

Более общая идея состоит в том, кривая в пространстве $\mathbb{R}^m$ задается непрерывными параметрическими уравнениями

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)),$$

$x \in \mathbb{R}$.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Какая кривая является проекцией графика векторной функции $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, $0 \le x \le 2\pi$, на плоскость переменных (y_1, y_2).

2. Пусть Π - параллелепипед в пространстве $\mathbb{R}^n$. Является ли непрерывной

его характеристическая функция χ_Π, которая принимает значение 1 в точках параллелепипеда Π и значение 0 вне Π.

3. Пусть скалярные функции $y = f_1(x_1)$ и $y = f_2(x_2)$, $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, непрерывны по своим переменным. Будет ли функция $y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ всюду непрерывной по векторному переменному $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

4. Пусть скалярные функции $y = f_1(x_1)$ и $y = f_2(x_2)$ скалярных переменных $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \in \mathbb{R}$ разрывны в некоторых точках по своим переменным. Будет ли функция $y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ всюду непрерывной по векторному переменному $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

5. Пусть одна из скалярных функций $y = f_1(x_1)$ и $y = f_2(x_2)$ скалярных переменных $x_1 \in \mathbb{R}$ и $x_2 \in \mathbb{R}$ непрерывна, а другая разрывна в некоторых точках по своей переменной. Будет ли функция $y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ всюду непрерывной по векторному переменному $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Лекция 4.

СОДЕРЖАНИЕ

Двойной и повторные пределы

При нахождении предела $\lim_{x\to x_0} f(x)$ в случае скалярного переменного x стремление x к x_0 могло осуществляться только вдоль числовой оси. Если $\mathbf{x}$ является вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то свобода подхода $\mathbf{x}$ к $\mathbf{x}^0$ становится многограннее. Каждая из координат x_j вектора $\mathbf{x}$ произвольно стремится к координате x_j^0, $j = 1, 2, \ldots, n$, вектора $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Ограничимся для простоты двумерным вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Предел

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2)$$

часто называют двойным пределом функции f в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$.

Однако иногда приходится иметь дело с пределами, возникающими в результате поочередного перехода к пределу по каждой из переменных при условии, что остальные координаты вектора $\mathbf{x}$ в этом процессе считаются фиксированными.

Определение 1. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$ определена в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, исключая точки (x_1, x_2), в которых $x_1 = x_1^0$ или $x_2 = x_2^0$, и при любом фиксированном x_1 из δ-окрестности точки x_1^0, $x_1 \neq x_1^0$, существует предел*

$$\lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1).$$

Если существует предел

$$\lim_{x_1\to x_1^0} \varphi(x_1) = \lim_{x_1\to x_1^0} \left(\lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1, x_2) \right) = l,$$

то l называется повторным пределом функции f в точке $\mathbf{x}^0$ и обозначается

$$l = \lim_{x_1\to x_1^0} \lim_{x_2\to x_2^0} f(x_1, x_2).$$

Аналогично определяется другой повторный предел

$$l' = \lim_{x_2 \to x_2^0} \lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2).$$

Желаемое равенство двух повторных пределов между собой не всегда обнаруживается для произвольной функции f. Приведем примеры.

Пример 1. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad (x_1, x_2) \neq (0, 0).$$

Для $x_1 \neq 0$

$$\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_1 \to 0} \lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = 1.$$

С другой стороны, для $x_2 \neq 0$

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

В примере 1 оба повторных предела функции f в точке $(0, 0)$ существуют, но не равны между собой.

Пример 2. Пусть

$$f(x_1, x_2) = x_1 \sin \frac{1}{x_2}, \quad x_2 \neq 0, \quad \text{и} \quad \forall x_2 \; f(0, x_2) = 0.$$

Для $x_2 \neq 0$

$$\lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2 \to 0} \lim_{x_1 \to 0} f(x_1, x_2) = 0.$$

В то же время, для $x_1 \neq 0$

$$\lim_{x_2 \to 0} f(x_1, x_2)$$

не существует. В примере 2 один из повторных пределов функции f в точке $(0, 0)$ существует, а другой нет.

Докажем теорему, гарантирующую существование повторного предела и его равенство двойному пределу.

Теорема 1. *Пусть для функции $f(x_1, x_2)$ существует двойной предел в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ и для любого x_1 из δ-окрестности точки x_1^0, $x_1 \neq x_1^0$, существует предел*

$$\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2) = \varphi(x_1).$$

Тогда существует повторный предел

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \varphi(x_1) = \lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2),$$

который равен двойному пределу.

Доказательство. Обозначим $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}) = l$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta' > 0$ такое, что для всех $(x_1, x_2) \neq (x_1^0, x_2^0)$ таких, что $|x_1 - x_1^0| < \delta'$, $|x_2 - x_2^0| < \delta'$, справедливо неравенство

$$|f(x_1, x_2) - l| < \epsilon.$$

Зафиксируем $x_1 \neq x_1^0$ с указанным условием и перейдем в последнем неравенстве к пределу при x_2, стремящемся к x_2^0. Получим, что для любого $\epsilon > 0$ нашлось $\delta' > 0$ так, что

$$|\varphi(x_1) - l| \leq \epsilon.$$

Это означает, что

$$l = \lim_{x_1 \to x_1^0} \varphi(x_1) = \lim_{x_1 \to x_1^0} \lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2),$$

что доказывает теорему 1.

Разумеется, в теореме 1 переменные x_1 и x_2 можно поменять ролями. Сформулируем следствие, объединяющее обе версии теоремы 1.

Следствие 1. *Пусть для функции $f(x_1, x_2)$ существует двойной предел в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, для любого x_2 из δ-окрестности точки x_2^0, $x_2 \neq x_2^0$, существует предел $\lim_{x_1 \to x_1^0} f(x_1, x_2)$ и для любого x_1 из δ-окрестности точки x_1^0, $x_1 \neq x_1^0$, существует предел $\lim_{x_2 \to x_2^0} f(x_1, x_2)$. Тогда существуют оба повторных предела функции f в точке $\mathbf{x}^0$, которые равны двойному пределу.*

Доказательство. Действительно, выполнены все условия теоремы 1 и аналогичной теоремы, в которой переменные поменялись ролями. Применяя обе версии, заключаем, что оба повторных предела существуют и равны двойному пределу.

Непрерывность на множестве. Теорема Кантора

Определим понятие непрерывности функции на множестве.

Определение 1. *Функция* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *называется непрерывной на множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$, *если она непрерывна в каждой точке множества* X.

Кроме того, определим более сильное требование равномерной непрерывности функции на множестве.

Определение 2. *Функция* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *называется равномерно непрерывной на множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$, *если*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in X \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < \delta \Rightarrow |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}')| < \epsilon.$$

Аналогией теоремы Кантора о равномерной непрерывности скалярной функции, непрерывной на отрезке, служит следующая теорема. При этом от отрезка перейдем к множествам, которые унаследуют от отрезка лишь свойства ограниченности и замкнутости.

Теорема 2. *Пусть функция* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *непрерывна на ограниченном замкнутом множестве* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Тогда* $\mathbf{f}$ *равномерно непрерывна на множестве* X.

Доказательство. Как и в канонической теореме Кантора, проведем доказательство от противного. Предположим, что функция $\mathbf{f}$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X, но не является равномерно непрерывной на X. Запишем отрицание условия равномерной непрерывности

$$\exists \epsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists \mathbf{x}, \mathbf{z} \in X \ |\mathbf{x} - \mathbf{z}| < \delta \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{z})| \geq \epsilon.$$

Используем возможность произвольного выбора δ. Положим $\delta = 1$, тогда

$$\exists \mathbf{x}^1, \mathbf{z}^1 \in X \ |\mathbf{x}^1 - \mathbf{z}^1| < 1 \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(\mathbf{z}^1)| \geq \epsilon.$$

Выберем $\delta = \frac{1}{2}$, тогда

$$\exists \mathbf{x}^2, \mathbf{z}^2 \in X \ |\mathbf{x}^2 - \mathbf{z}^2| < \frac{1}{2} \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}^2) - \mathbf{f}(\mathbf{z}^2)| \geq \epsilon.$$

И так далее. На k-м шаге выберем $\delta = \frac{1}{k}$, тогда

$$\exists \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k \in X \ |\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k| < \frac{1}{k} \text{ и } |\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) - \mathbf{f}(\mathbf{z}^k)| \geq \epsilon.$$

Продолжим процесс неограниченно. В итоге получим две последовательности $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$ и $\mathbf{z}^1, \mathbf{z}^2, \ldots, \mathbf{z}^k, \ldots$, удовлетворяющие перечисленным условиям. По теореме Больцано-Вейерштрасса первая из этих двух ограниченных последовательностей содержит сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_2}, \ldots, \mathbf{x}^{k_j}, \ldots$. Обозначим

$$\lim_{j \to \infty} \mathbf{x}^{k_j} = \mathbf{x}^0.$$

Поскольку множество X замкнуто, то $\mathbf{x}^0 \in X$.

Из равенства $\mathbf{z}^{k_j} = \mathbf{x}^{k_j} + (\mathbf{z}^{k_j} - \mathbf{x}^{k_j})$, где первое слагаемое сходится к $\mathbf{x}^0$, а второе - к нулевому элементу, следует, что подпоследовательность $\mathbf{z}^{k_1}, \mathbf{z}^{k_2}, \ldots, \mathbf{z}^{k_j}, \ldots$ второй из полученных последовательностей также сходится к $\mathbf{x}^0$.

Образуем последовательность

$$\mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{z}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_2}, \mathbf{z}^{k_2}, \ldots, \mathbf{x}^{k_j}, \mathbf{z}^{k_j}, \ldots,$$

которая, очевидно, сходится к $\mathbf{x}^0$. Функция $\mathbf{f}$, непрерывная на множестве X, непрерывна и в точке $\mathbf{x}^0 \in X$. Следовательно, по определению Гейне последовательность

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k_1}), \mathbf{f}(\mathbf{z}^{k_1}), \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k_2}), \mathbf{f}(\mathbf{z}^{k_2}), \ldots, \mathbf{f}(\mathbf{x}^{k_j}), \mathbf{f}(\mathbf{z}^{k_j}), \ldots$$

сходится к $\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. По критерию Коши эта последовательность фундаментальна, что противоречит неравенству

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}^{k_j}) - \mathbf{f}(\mathbf{z}^{k_j})| \geq \epsilon,$$

справедливому для всех $j \geq 1$. Противоречие устанавливает ложность сделанного предположения и заканчивает доказательство теоремы 2.

Непрерывный образ ограниченного замкнутого множества

Известные теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижении экстремальных значений функцией, непрерывной на отрезке, обобщаются на случай функций многих переменных, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве.

Теорема 3. *Пусть функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ и отображает множество X на множество $Y \subset \mathbb{R}^m$. Тогда множество Y ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Предположим сначала, что множество Y не является ограниченным. В этом случае во множестве Y можно выделить неограниченную последовательность $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k, \ldots$, $|\mathbf{y}^k| > k$, $k \geq 1$. Более того, всякая подпоследовательность этой последовательности остается неограниченной. Каждому $\mathbf{y}^k \in Y$ соответствует прообраз $\mathbf{x}^k \in X$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{y}^k$. Последовательность $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$, содержащаяся в X, ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса из такой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_2}, \ldots, \mathbf{x}^{k_j}, \ldots$. Обозначим через $\mathbf{x}^0$ предел этой сходящейся подпоследовательности. Коль скоро множество X замкнуто, точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит множеству X. Функция $\mathbf{f}$ непрерывна на множестве X и в том числе в точке $\mathbf{x}^0$. По определению Гейне подпоследовательность $\mathbf{y}^{k_1}, \mathbf{y}^{k_2}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}, \ldots$ сходится к $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Всякая сходящаяся последовательность ограничена, а это противоречит условию неограниченности подпоследовательности $\mathbf{y}^{k_1}, \mathbf{y}^{k_2}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}, \ldots$. Таким образом, множество X должно быть ограниченным.

Теперь докажем замкнутость множества Y. Пусть $\mathbf{y}^0$ - произвольная предельная точка множества Y. Можно построить последовательность
$\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^k, \ldots, \mathbf{y}^k \in Y$, $k \geq 1$, сходящуюся к $\mathbf{y}^0$. Вновь каждому $\mathbf{y}^k \in Y$ соответствует прообраз $\mathbf{x}^k \in X$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}^k) = \mathbf{y}^k$. Последовательность $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^k, \ldots$, содержащаяся в X, ограничена и содержит сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}^{k_1}, \mathbf{x}^{k_2}, \ldots, \mathbf{x}^{k_j}, \ldots$. Обозначим через $\mathbf{x}^0$ предел этой сходящейся подпоследовательности, $\mathbf{x}^0 \in X$. Функция $\mathbf{f}$ непрерывна на множестве X и в том числе в точке $\mathbf{x}^0$. По определению Гейне подпоследовательность $\mathbf{y}^{k_1}, \mathbf{y}^{k_2}, \ldots, \mathbf{y}^{k_j}, \ldots$ сходится к $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. Следовательно, $\mathbf{y}^0 \in Y$ как образ точки $\mathbf{x}^0$ при отображении $\mathbf{f}$. Таким образом, множество Y содержит любую из своих предельных точек и поэтому является замкнутым множеством, что доказывает теорему 3.

Теорема о промежуточном значении

В случае скалярной функции f векторного переменного $\mathbf{x}$ теорема 3 устанавливает достижимость непрерывной функцией f своих максимального и минимального значений на ограниченном замкнутом множестве X, поскольку ограниченное замкнутое множество Y должно содержать содержать свои верхнюю и нижнюю грани. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции может быть обобщена на случай векторного переменного $\mathbf{x}$.

Теорема 4. *Пусть скалярная функция $y = f(\mathbf{x})$ векторного переменного $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$, обладающем тем свойством, что любые две точки в X можно соединить кривой, целиком содержащейся в X. Тогда функция f принимает на множестве X все промежуточные значения между максимальным и минимальным.*

Доказательство. Отметим сначала, что согласно теореме 3 функция f ограничена на множестве X и принимает свои максимальное и минимальное значения. Пусть число μ - произвольное промежуточное значение между $M = \max_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x})$ и $p = \min_{\mathbf{x}\in X} f(\mathbf{x})$. Существуют точки $\mathbf{x}^1 \in X$ и $\mathbf{x}^2 \in X$ такие, что $f(\mathbf{x}^1) = M$ и $f(\mathbf{x}^2) = p$. Соединим точки $\mathbf{x}^1$ и $\mathbf{x}^2$ кривой, содержащейся в X и имеющей непрерывное параметрическое представление $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$, $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}^1$, $\mathbf{x}(b) = \mathbf{x}^2$. Тогда скалярная функция $f(\mathbf{x}(t))$ скалярного переменного t непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает в его крайних точках значения M и p. По теореме Коши для непрерывной на отрезке функции, $f(\mathbf{x}(t))$ принимает значение μ в некоторой точке $t_0 \in [a, b]$. Значит, $\mathbf{x}(t_0) \in$

X и $f(\mathbf{x}(t_0)) = \mu$, что означает справедливость утверждения теоремы 4 и заканчивает ее доказательство.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Пусть множество X на плоскости является объединением двух замкнутых непересекающихся прямоугольников. Справедлива ли для него теорема 4 о промежуточном значении для функции f, непрерывной на множестве X.

2. Имеет ли функция f из примера 1 двойной предел в точке $(0, 0)$.

3. Можно ли функцию f из примера 2 доопределить в точках $(x_1, 0)$ так, чтобы доопределенная функция имела бы двойной предел в точке $(0, 0)$.

4. Пусть функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^2$ оба повторных предела, которые не равны друг другу. Обязана ли функция $y = f^2(\mathbf{x})$ обладать тем же свойством.

5. Пусть функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве X и отображает X на множество Y, а функция $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$ непрерывна на множестве Y. Будет ли функция $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ равномерно непрерывной на множестве X.

Лекция 5.

СОДЕРЖАНИЕ

Дифференцируемость функций многих переменных

Дифференциальное исчисление для скалярных функций $y = f(x)$ скалярного переменного x проявило себя как эффективный и разносторонний инструмент исследования, основанный на понятии бесконечно малых величин. Оказывается, что основное определение дифференцируемости дословно переносится на случай $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ с векторной интерпретацией линейной функции $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Если в скалярном варианте A - это действительное число, то в векторной записи A становится прямоугольной матрицей. При восприятии $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в виде векторов-столбцов размерности n и m соответственно, A должно быть матрицей размерности $m \times n$.

Определение 1. *Функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, определенная в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$, называется дифференцируемой в точке $\mathbf{x}^0$, если существует матрица A размерности $m \times n$ с постоянными элементами и бесконечно малая в точке $\mathbf{x}^0$ функция $\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$, такие, что справедливо равенство*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|.$$

Матрица A называется якобиевой матрицей, или производной функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ и обозначается

$$A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^0).$$

Произведение $A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ называется дифференциалом функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующим приращению $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$, и обозначается

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = d\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) = d_{\mathbf{h}}\mathbf{f}(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0.$$

Поясним, что свойство бесконечной малости векторной функции

$$\alpha(\mathbf{x}) = (\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x}), \ldots, \alpha_m(\mathbf{x}))$$

означает, что

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x^0}} \alpha_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x^0}} \alpha_{\mathbf{2}}(\mathbf{x}) = \cdots = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x^0}} \alpha_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Если y является скалярной величиной, то есть $m = 1$, то матрица A превращается в вектор-строчку. Ввиду важности этого частного случая переформулируем частную версию определения 1 отдельно.

Определение 2. *Функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, определенная в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$, называется дифференцируемой в точке $\mathbf{x}^0$, если существует вектор $\mathbf{A}$ размерности n с постоянными элементами и бесконечно малая в точке $\mathbf{x}^0$ функция $\alpha(\mathbf{x})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, такие, что справедливо равенство*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|.$$

Вектор $\mathbf{A}$ называется градиентом, или производной функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ и обозначается

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0) = f'(\mathbf{x}^0).$$

Скалярное произведение $\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ называется дифференциалом функции f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующим приращению $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$, и обозначается

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = df(\mathbf{x}^0) = d_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0), \quad \mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0.$$

Как и в одномерном случае, аналитический смысл дифференцируемости функции f заключается в ее приближении линейной функцией $y = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ в δ- окрестности точки $\mathbf{x}^0$. Эта линейная функция выражает уравнение плоскости, касательной к графику функции f в точке $(\mathbf{x}^0, f(\mathbf{x}^0)) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, f(\mathbf{x}^0))$.

Дифференцируемость координат дифференцируемой функции

Покажем, что роли размерностей векторов $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ в дифференциальном исчислении различны. Если появление вектора $\mathbf{x}$ вместо числовой переменной x приводит к новым качественным эффектам, изменению понятия производной от числа A к вектору или матрице A, то увеличение размерности переменной y до вектора $\mathbf{y}$ ведет лишь к количественным изменениям. Увидим, что все координаты $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ вектора $\mathbf{y}$ ведут себя одинаково в операции дифференцирования.

Теорема 1. *Векторная функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, которую можно представить в виде системы координатных функций*

$$\begin{array}{c} y_1 = f_1(\mathbf{x}), \\ y_2 = f_2(\mathbf{x}), \\ \vdots \\ y_m = f_m(\mathbf{x}) \end{array},$$

дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$ тогда и только тогда, когда все координатные функции $f_1, f_2, \ldots, f_m$ дифференцируемы в точке $\mathbf{x}^0$.

Доказательство. Запишем условие дифференцируемости векторной функции $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, в точке $\mathbf{x}^0$,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|.$$

Здесь матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

имеет размерность $m \times n$, а векторная функция $\alpha(\mathbf{x}) = (\alpha_1(\mathbf{x}), \alpha_2(\mathbf{x}), \dots, \alpha_m(\mathbf{x}))$ бесконечно мала в точке $\mathbf{x}^0$. Обозначим первую строчку матрицы A через вектор $\mathbf{A}^1$, вторую строчку матрицы A через вектор $\mathbf{A}^2$ и так далее. Последнюю строчку матрицы A обозначим через вектор $\mathbf{A}^m$. Теперь условие дифференцируемости функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ перепишем в эквивалентном векторном и матричном виде, где $\mathbf{y}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{x}$ и α изображены в виде векторов-столбцов,

$$\begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}^0) \\ f_2(\mathbf{x}^0) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x^0}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_1^0 \\ x_2 - x_2^0 \\ \vdots \\ x_n - x_n^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}) \\ \alpha_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \alpha_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} |\mathbf{x}{-}\mathbf{x}^0|.$$

Равенство векторов в этой формуле понимается как равенство каждой координаты векторов. Приравнивая поочередно все координаты таких векторов, получим систему равенств

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{x}) &= f_1(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}^1(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha_1(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|, \\ f_2(\mathbf{x}) &= f_2(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha_2(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|, \\ &\vdots \\ f_m(\mathbf{x}) &= f_m(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}^m(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha_m(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|, \end{aligned}$$

где векторы $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^m$ имеют постоянные координаты, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ являются бесконечно малыми функциями в точке $\mathbf{x}^0$.

Первое равенство полученной системы определяет, что координатная функция f_1 дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, при этом $f_1'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{A}^1$. Аналогично, второе равенство системы определяет, что координатная функция f_2 дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, при этом $f_2'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{A}^2$. И так далее. Наконец, последнее равенство системы определяет, что координатная функция f_m дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, при этом $f_m'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{A}^m$, что завершает доказательство теоремы 1.

Непрерывность дифференцируемой функции

Как и прежде, придаем принципиальное значение связи между основными понятиями математического анализа: непрерывностью и дифференцируемостью функции в точке.

Теорема 2. *Если функция* $\mathbf{f}$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}^0$*, то* $\mathbf{f}$ *непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Дифференцируемость функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ подразумевает, что она определена в некоторой δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ и существуют матрица A и бесконечно малая при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$ функция α такие, что справедливо равенство

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|.$$

Второе и третье слагаемые в правой части уравнения стремятся к 0 при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$. Переходя к пределу в обеих частях равенства, получим

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0),$$

что выражает свойство непрерывности функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ и заканчивает доказательство теоремы 2.

Линейность операции дифференцирования

Установим линейность операции дифференцирования.

Теорема 3. *Пусть функции* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *и* $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *дифференцируемы в точке* $\mathbf{x}^0$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда функции* $\lambda\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ *дифференцируемы в точке* $\mathbf{x}^0$ *и справедливы формулы*

$$(\lambda\mathbf{f})'(\mathbf{x}^0) = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0),$$

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^0) + \mathbf{g}'(\mathbf{x}^0).$$

Доказательство. Дифференцируемость функций $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{x}^0$ означает существование матриц A и B и бесконечно малых в точке $\mathbf{x}^0$ функций α и β таких, что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|, \quad A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^0),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) + B(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \beta(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|, \quad B = \mathbf{g}'(\mathbf{x}^0).$$

После умножения первого равенства на λ или сложения этих двух равенств получим формулы

$$\lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \lambda A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \lambda\alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|,$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) + (A + B)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + (\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x}))|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|.$$

Поскольку матрицы λA и $A+B$ сохраняют размерность $m \times n$ и постоянство своих элементов, а сумма $\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{x})$ бесконечно малых в точке $\mathbf{x}^0$ функций также бесконечно мала в точке $\mathbf{x}^0$, то последние равенства выражают дифференцируемость функций $\lambda\mathbf{f}$ и $\mathbf{f}+\mathbf{g}$ в точке $\mathbf{x}^0$. При этом

$$(\lambda\mathbf{f})'(\mathbf{x}^0) = \lambda A = \lambda\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0),$$

и

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})'(\mathbf{x}^0) = A + B = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^0) + \mathbf{g}'(\mathbf{x}^0),$$

что завершает доказательство теоремы 3.

Дифференцируемость сложной функции

Формулировка и доказательство теоремы о дифференцируемости сложной функции копирует аналогичное утверждение для скалярной функции одного переменного.

Теорема 4. *Пусть функция* $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}^0$, *а функция* $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{y})$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^p$, *дифференцируема в точке* $\mathbf{y}^0$, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$. *Тогда сложная функция* $\mathbf{z} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}^0$ *и справедлива формула*

$$(\mathbf{g}(\mathbf{f}))'(\mathbf{x}^0) = \mathbf{g}'(\mathbf{y}^0)\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0).$$

Доказательство. Существование сложной функции при условиях теоремы 4 была обсуждена в доказательстве теоремы о непрерывности сложной функции. Рассуждения сохраняют силу, так как обе функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ дифференцируемы, а следовательно, и непрерывны в точке $\mathbf{x}^0$.

Так как функция $\mathbf{f}$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, а функция $\mathbf{g}$ дифференцируема в точке $\mathbf{y}^0$, то существуют матрицы A размерности $m \times n$ и B размерности $p \times m$, бесконечно малая в точке $\mathbf{x}^0$ функция $\alpha(\mathbf{x})$ и бесконечно малая в точке $\mathbf{y}^0$ функция $\beta(\mathbf{y})$ такие, что справедливы формулы

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|, \quad A = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^0),$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \mathbf{g}(\mathbf{y}^0) + B(\mathbf{y} - \mathbf{y}^0) + \beta(\mathbf{y})|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0|, \quad B = \mathbf{g}'(\mathbf{y}^0).$$

Полагая $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, подставим первое из записанных выражений во второе равенство и получим

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)) + B(A(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|) + \beta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))|A(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0||.$$

Строго говоря, функция $\mathbf{z} = \beta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ не вполне определена, поскольку функция $\mathbf{z} = \beta(\mathbf{y})$ не определена в точке $\mathbf{y}^0$. Исправим этот недостаток, положив

$$\beta(\mathbf{y}^0) = 0.$$

При таком доопределении функция $\mathbf{z} = \beta(\mathbf{y})$ становится непрерывной в точке $\mathbf{y}^0$, так как $\lim_{\mathbf{y}\to\mathbf{y}^0} \beta(\mathbf{y}) = 0 = \beta(\mathbf{y}^0)$. Более того, сложная функция $\mathbf{z} = \beta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ непрерывна и бесконечно мала в точке $\mathbf{x}^0$ как композиция непрерывной и бесконечно малой в точке $\mathbf{y}^0$ функции $\mathbf{z} = \beta(\mathbf{y})$ и непрерывной в точке $\mathbf{x}^0$ функции $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y}^0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}^0)$.

Обозначим

$$\gamma(\mathbf{x}) = B\alpha(\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{f}(\mathbf{x}))\left(A\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}^0}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|} + \alpha(\mathbf{x})\right)$$

и перепишем полученное равенство для сложной функции $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ в форме

$$\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}^0)) + BA(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + \gamma(\mathbf{x})|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|.$$

Прямой проверкой убеждаемся, что $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \gamma(\mathbf{x}) = 0$, то есть функция γ бесконечно мала в точке $\mathbf{x}^0$. Так как произведение BA матриц A и B является матрицей размерности $p \times n$, то последнее равенство определяет сложную функцию $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x}))$ как дифференцируемую в точке $\mathbf{x}^0$ функцию, причем

$$(\mathbf{g}(\mathbf{f}))'(\mathbf{x}^0) = BA = \mathbf{g}'(\mathbf{y}^0)\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0),$$

что завершает доказательство теоремы 4.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ - вектор. Будет ли линейная функция $y = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, дифференцируемой в произвольной точке.

2. Пусть графиком скалярной функции $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, является конус. Будет ли функция f дифференцируемой в точке, соответствуюшщей вершине конуса.

3. Пусть скалярная функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, задается формулой

$$y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Будет ли функция f дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

4. Пусть векторная функция $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, и дан вектор $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathbf{m}}$. Будет ли скалярное произведение $\mathbf{Af}$ дифференцируемой функцией в точке $\mathbf{x}^0$.

5. Пусть одна из координат f_k векторной функции $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ является неограниченной в любой δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$. Может ли функция f оказаться дифференцируемой в точке $\mathbf{x}^0$.

Лекция 6.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Частные производные
2. Существование частных производных дифференцируемой функции
3. Достаточное условие дифференцируемости функции

Частные производные

В теории функций одного переменного были получены ясные условия и правила отыскания произволтной дифференцируемой функции. Сведем поиск градиента функции многих переменных, или ее производной, к тем же алгоритмам, что применялись ранее. Для этого придется фиксировать все координаты переменного вектора, кроме одной, и рассматривать полученную функцию, зависящую только от одной числовой переменной величины. Дадим точное определение поиска производной в таком процессе.

Определение 1. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, определена в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Зафиксируем координаты $x_2, \dots, x_n$, положив $x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0$. Обозначим*

$$f(x_1, x_2^0, \dots, x_n^0) = g_1(x_1).$$

Если функция g_1 имеет в точке x_1^0 производную, то $g_1'(x_1^0)$ называется частной производной функции f по переменной x_1 в точке $\mathbf{x}^0$ и обозначается

$$g_1'(x_1^0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}.$$

Аналогично, фиксируя все координаты $x_1 = x_1^0, x_3 = x_3^0, \dots, x_n = x_n^0$, кроме координаты x_2, и дифференцируя полученную функцию $g_2(x_2)$ в точке x_2^0, придем к понятию частной производной функции f по переменной x_2 в точке $\mathbf{x}^0$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}.$$

И так далее. Завершая процесс, придем к понятию частной производной функции f по переменной x_n в точке $\mathbf{x}^0$

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}.$$

Таким образом, определены все частные производные

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}.$$

Существование частных производных дифференцируемой функции

Теорема 1. *Пусть скалярная функция* $y = f(\mathbf{x})$ *векторного переменного* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. *Тогда в точке* $\mathbf{x}^0$ *существуют все частные производные*

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}.$$

Доказательство. Так как функция f дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, то существуют вектор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ и бесконечно малая в точке $\mathbf{x}^0$ функция $\alpha(\mathbf{x})$ такие, что

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = f(\mathbf{x}^0) +$$

$$A_1(x_1 - x_1^0) + A_2(x_2 - x_2^0) + \cdots + A_n(x_n - x_n^0) + \alpha(\mathbf{x})\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2}.$$

Зафиксируем координаты $x_2, \ldots, x_n$, положив $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$ и обозначим

$$f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) = g_1(x_1), \quad \alpha(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) = \alpha_1(x_1).$$

Тогда определение дифференцируемости функции f перепишется в виде

$$g_1(x_1) = g_1(x_1^0) + A_1(x_1 - x_1^0) + \alpha_1(x_1)|x_1 - x_1^0|.$$

Заметим еще, что

$$|x_1 - x_1^0| = (\mathrm{sign}(x_1 - x_1^0))(x_1 - x_1^0),$$

где

$$\mathrm{sign}(x_1 - x_1^0) = \begin{cases} 1, \text{если } x_1 - x_1^0 > 0, \\ 0, \text{если } x_1 - x_1^0 = 0, \\ -1, \text{если } x_1 - x_1^0 < 0. \end{cases}$$

Теперь условие дифференцируемости запишется в виде

$$g_1(x_1) = g_1(x_1^0) + A_1(x_1 - x_1^0) + \alpha_1(x_1)(\mathrm{sign}(x_1 - x_1^0))(x_1 - x_1^0).$$

Так как $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \alpha(\mathbf{x}) = 0$, то

$$\lim_{x_1 \to x_1^0} \alpha_1(x_1)\mathrm{sign}(x_1 - x_1^0) = 0.$$

Другими словами, функция $\alpha_1(x_1)\mathrm{sign}(x_1 - x_1^0) = 0$ является бесконечно малой в точке x_1^0. Таким образом, функция $g_1(x_1)$ удовлетворяет условию дифференцируемости по x_1 в точке x_1^0, причем

$$A_1 = g_1'(x_1^0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}.$$

Аналогичным образом доказывается существование остальных частных производных
$$A_2 = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}, \ldots, A_n = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n},$$
чем и заканчивается доказательство теоремы 1.

В доказательстве теоремы 1 найдено, что частные производные функции f оказываются координатами вектора $\mathrm{grad} f$.

Следствие 1. *Пусть скалярная функция $y = f(\mathbf{x})$ векторного переменного $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда*
$$f'(\mathbf{x}^0) = \mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}\right).$$

Доказательство. Действительно, в доказательстве теоремы 1 показано, что если
$$\mathbf{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n) = \mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0),$$
то
$$A_1 = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}, \;\; A_2 = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}, \ldots, \; A_n = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n},$$
что доказывает следствие 1.

Для векторной функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, теорема 1 может быть применена к каждой координате $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ вектора $\mathbf{y}$.

Следствие 2. *Пусть векторная функция*
$$y = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m,$$
векторного переменного $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда якобиева матрица A, или производная $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^0)$ функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ выражается по формуле
$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Действительно, якобиева матрица векторной функции $\mathbf{f}$ в точке $\mathbf{x}^0$ имеет первой строчкой вектор $\mathrm{grad} f_1(\mathbf{x}^0)$, второй своей строчкой вектор $\mathrm{grad} f_2(\mathbf{x}^0)$, и так далее. Наконец, последней строчкой матрицы A является вектор $\mathrm{grad} f_m(\mathbf{x}^0)$. Осталось применить следствие 1 к каждой из этих строчек и получить матрицу, элементами которой служат все частные производные функций $f_1, f_2, \ldots f_m$ по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в точке $\mathbf{x}^0$, что доказывает следствие 2.

Достаточное условие дифференцируемости функции

Теорема 1 гарантирует существование частных производных в точке, как только функция дифференцируема в этой точке. Оказывается, что обратное утверждение неверно: существование частных производных в точке не гарантирует дифференцируемости функции в этой точке. Подкрепим высказанный тезис примером.

Пример 1. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ задается формулой

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 x_2 = 0, \\ 0, & \text{если } x_1 x_2 \neq 0. \end{cases}$$

Иначе говоря, функция f принимает значение 1 в точках двух координатных числовых осей и принимает значение 0 во всех остальных точках плоскости. Очевидно, что

$$g_1(x_1) = f(x_1, 0) = 1, \quad g_2(x_2) = f(0, x_2) = 1,$$

поэтому

$$g_1'(0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = 0, \quad g_2'(0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} = 0.$$

В то же время функция f не может быть дифференцируемой в точке $(0, 0)$, поскольку она даже разрывна в этой точке.

Тем не менее хотелось бы найти какие-либо добавочные условия к существованию частных производных, чтобы обеспечить дифференцируемость функции. Следующая теорема выражает такое достаточное условие дифференцируемости функции в точке.

Теорема 2. *Пусть функция $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, имеет в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ частные производные по всем переменным, которые непрерывны в точке $\mathbf{x}^0$. Тогда функция f дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$.*

Доказательство. Ради простоты остановимся на функции $f(x_1, x_2)$ двух переменных. Количественное повторение проделанных здесь шагов нетрудно обобщит доказательство для функции произвольного числа переменных.

Если будет доказано, что функция f дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$, то ее градиент должен выражаться согласно теореме 1 по формуле

$$\mathbf{A} = \mathrm{grad} f(x_1^0, x_2^0) = f'(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \right).$$

Поэтому нам надо доказать справедливость представления

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| =$$

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|,$$

где функция $\alpha(\mathbf{x})$ бесконечно мала в точке (x_1^0, x_2^0).

В формуле

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2) + f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0)$$

первую пару слагаемых в правой части можно рассматривать как приращение функции f по переменному x_1 при фиксированном значении x_2. Поэтому к ней можно применить теорему Лагранжа по переменному x_1 и получить

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2) = \frac{\partial f(\xi, x_2)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0),$$

где точка ξ расположена между x_1 и x_1^0. Подобным образом вторую пару слагаемых в правой части той же формулы можно рассматривать как приращение функции f по переменному x_2 при фиксированном значении x_1^0. Поэтому к ней также можно применить теорему Лагранжа по переменному x_2 и получить

$$f(x_1^0, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial f(x_1^0, \eta)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0),$$

где точка η расположена между x_2 и x_2^0. Соединяем все формулы воедино, чтобы прийти к результату

$$f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial f(\xi, x_2)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, \eta)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) =$$

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) +$$

$$\left(\frac{\partial f(\xi, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}\right)(x_1 - x_1^0) + \left(\frac{\partial f(x_1^0, \eta)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\right)(x_2 - x_2^0) =$$

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) + \gamma(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|,$$

где

$$\gamma(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\xi, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}\right)\frac{x_1 - x_1^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} + \left(\frac{\partial f(x_1^0, \eta)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}\right)\frac{x_2 - x_2^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|}.$$

Для завершения доказательства осталось убедиться в том, что функция $\gamma(\mathbf{x})$ бесконечно мала в точке (x_1^0, x_2^0). В самом деле, заметим, что

$$\frac{|x_1 - x_1^0|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} = \frac{|x_1 - x_1^0|}{\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}} \leq 1,$$

$$\frac{|x_2 - x_2^0|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} = \frac{|x_2 - x_2^0|}{\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}} \leq 1.$$

Наконец, воспользуемся непрерывностью обеих частных производных функции f по переменным x_1 и x_2 в точке (x_1^0, x_2^0) и заключаем, что

$$\frac{\partial f(\xi, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} \to 0, \quad \frac{\partial f(x_1^0, \eta)}{\partial x_2} - \frac{\partial f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \to 0 \text{ при } \mathbf{x} \to \mathbf{x}^0.$$

Последние суждения в совокупности влекут, что

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0} \gamma(\mathbf{x}) = 0,$$

то есть функция $\gamma(\mathbf{x})$ бесконечно мала в точке $\mathbf{x}^0$, что завершает доказательство теоремы 2.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Какие условия теоремы 2 не выполняются для функции f в примере 1.

2. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ дифференцируема в точке (x_1, x_2). Вычислить $\mathrm{grad} f^2(x_1, x_2)$.

3. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ если } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad \text{и } f(0, 0) = 0.$$

Будет ли функция f дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

4. Пусть

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2}, \text{ если } (x_1, x_2) \neq (0, 0), \quad \text{и } f(0, 0) = 0.$$

Будет ли функция f дифференцируемой в точке $(0, 0)$.

5. Какую геометрическую характеристику можно дать графику функции $y = f(x_1, x_2)$, если известно, что f дифференцируема во всех точках и тождественно удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 0.$$

Лекция 7.

СОДЕРЖАНИЕ

Производная по направлению

Частная производная функции f по переменной x_k выражает скорость изменения функции f вдоль направления координатной оси переменной x_k. Естественно проявить интерес к скорости изменения функции f вдоль других направлений. Под направлением в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ будем понимать некоторую направленную прямую l, проходящую через точку $\mathbf{x}^0$. Направленная прямая характеризуется вектором $\mathbf{e}$ того же направления. Поскольку интерес представляет лишь направление вектора $\mathbf{e}$, то длина вектора $\mathbf{e}$ может быть выбрана произвольно. Например, будем полагать $|\mathbf{e}| = 1$. В такой нормировке координатами вектора $\mathbf{e}$ служат косинусы $\cos\gamma_k$ углов, которые вектор $\mathbf{e}$ образует с осями координат,

$$\mathbf{e} = (\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \ldots, \cos\gamma_n).$$

Всякая точка $\mathbf{x}$ на прямой l, проходящей через точку $\mathbf{x}^0$ в направлении вектора $\mathbf{e}$, может быть представлена в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В таком представлении $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| = |t||\mathbf{e}| = |\mathbf{t}|$. Предельный переход $\mathbf{x}$ к $\mathbf{x}^0$ осуществляется стремлением t к 0,

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0 \Longleftrightarrow t \to 0.$$

Дадим определение производной по направлению.

Определение 1. *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *определена в* δ*-окрестности точки* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *и пусть направление прямой* l, *проходящей через точку* $\mathbf{x}^0$, *характеризутся вектором* $\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$. *Тогда предел*

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}^0)}{t}$$

называется производной функции f по направлению l в точке $\mathbf{x}^0$ и обозначается

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial l}.$$

Производная по направлению l выражает скорость изменения функции f вдоль направления l. Частная производная по x_k функции f может восприниматься как производная функции f по направлению координатной оси переменной x_k.

Существование производных по направлению дифференцируемой функции

Покажем, что дифференцируемая функция имеет производные по любому направлению.

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Тогда функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ производные по любому направлению l. Если направление l определяется вектором $\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{e} = (\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \dots, \cos\gamma_n)$, то справедлива формула*

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial l} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}\cos\gamma_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}\cos\gamma_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}\cos\gamma_n.$$

Доказательство. Так как функция f дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, то существуют вектор $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ и бесконечно малая в точке $\mathbf{x}^0$ функция $\alpha(\mathbf{x})$ такие, что

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|.$$

Предположим, что направление l прямой, проходящей через точку $\mathbf{x}^0$, задается вектором $\mathbf{e}$, $|\mathbf{e}| = 1$, $\mathbf{e} = (\cos\gamma_1, \cos\gamma_2, \dots, \cos\gamma_n)$. Положим $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}$ и подставим $\mathbf{x}$ в определение дифференцируемости функции f. Получим

$$f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}^0) = \mathbf{A}(t\mathbf{e}) + \alpha(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e})|t||\mathbf{e}| = t\sum_{k=1}^{n} A_k \cos\gamma_k + \alpha(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e})|t|,$$

откуда после деления обеих частей равенства на t и перехода к пределу при $t \to 0$ следует, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{e}) - f(\mathbf{x}^0)}{t} = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos\gamma_k.$$

Следовательно, функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ производную по направлению l. Поскольку градиент $\mathbf{A} = \mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0)$ имеет координатами частные производные функции f в точке $\mathbf{x}^0$,

$$A_k = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то выведена формула

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial l} = \sum_{k=1}^{n} A_k \cos\gamma_k = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1}\cos\gamma_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2}\cos\gamma_2 + \cdots + \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n}\cos\gamma_n,$$

что завершает доказательство теоремы 1.

Геометрическое истолкование градиента

Формула теоремы 1 для производной по направлению позволяет наделить геометрическим смыслом градиент функции f, его направление и длину.

Формулу для производной по направвлению в теореме 1 запишем в форме скалярного произведения,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial l} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{A} = \mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0),$$

где вектор $\mathbf{e}$ единичной длины характеризует направление прямой l. Применим неравенство Коши к скалярному произведению в этой формуле и получим

$$\left|\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial l}\right| = |\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0)\mathbf{e}| \leq |\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0)|,$$

причем знак равенства реализуется только в том случае, когда векторы $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0)$ и $\mathbf{e}$ имеют одинаковое направление. Таким образом, полученное неравенство вместе с утверждением о возможном знаке равенства приобретает геометрическое истолкование.

Геометрическое истолкование направления вектора градиента. *Направление вектора градиента функции f в точке $\mathbf{x}^0$ указывает то направление, в котором производная по направлению принимает свое максимальное значение, то есть то направление, в котором функция f имеет максимальный рост.*

Мы убедились, что, функция f в точке $\mathbf{x}^0$ растет быстрее всего в направлении вектора градиента. Скорость роста функции в заданном направлении определяется величиной производно по этому направлению. А в случае совпадения направления с направлением вектора градиента величина производной по направлению совпадает с длиной вектора градиента. Таким образом, длина вектора градиента приобретает свое геометрическое и механическое истолкование.

Геометрическое истолкование длины вектора градиента. *Длина вектора градиента функции f в точке $\mathbf{x}^0$ выражает максимальную по всем направлениям скорость роста функции f в точке $\mathbf{x}^0$.*

Частные производные высших порядков

Подобно тому, как для функций скалярного переменного были определены производные высших порядков, введем понятия частных производных высших порядков функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ векторного переменного $\mathbf{x}$.

Определение 2. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, имеет в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ частную производную по переменной x_j*

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}$$

с некоторым номером j, $1 \le j \le n$, которая является функцией переменной точки $\mathbf{x}$. Если эта частная производная, в свою очередь, имеет в точке $\mathbf{x}^0$ частную производную по переменной x_k, $1 \le k \le n$, то частная производная

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\mathbf{x}^0)$$

называется частной производной второго порядка функции f по переменным x_j и x_k и обозначается

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Если $j = k$, то такая частная производная второго порядка обозначается через

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k^2}.$$

Если $j \ne k$, то эта частная производная второго порядка называется смешанной частной производной.

Перейдем к индуктивному определению частных производных высшего порядка.

Определение 3. *Пусть $p \ge 2$ и функция $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, имеет в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ частную производную порядка p по переменным $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}$*

$$\frac{\partial^p f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}}$$

с некоторыми номерами $k_1, k_2, \ldots, k_p$, $1 \le k_1, k_2, \ldots, k_p \le n$, *которая является функцией переменной точки* $\mathbf{x}$. *Если эта частная производная, в свою очередь, имеет в точке* $\mathbf{x}^0$ *частную производную по переменной* $x_{k_{p+1}}$, $1 \le k_{p+1} \le n$, *то частная производная*

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_{p+1}}}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1}\partial k_2 \ldots \partial x_{k_p}}\right)(\mathbf{x}^0)$$

называется частной производной порядка $p+1$ *функции* f *по переменным* $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_p}, x_{k_{p+1}}$ *и обозначается*

$$\frac{\partial^{p+1} f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}\partial x_{k_{p+1}}}.$$

Равенство смешанных частных производных второго порядка

Весьма вероятно, что при вычислении смешанных частных производных, отличающихся очередностью дифференцирования, для стандартно выглядящих функций окажется, что они равны между собой. Однако есть и более изощренные примеры функций, где такие смешанные частные производные отличны друг от друга.

Покажем, при каких условиях смешанные частные производные не зависят от очередности дифференцирования. Вначале ограничимся частными производными второго порядка.

Теорема 2. *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *имеет в* δ*-окрестности точки* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ *частные производные*

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j \partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_j}$$

с некоторыми номерами j, k, $1 \le j, k \le n$, $j \ne k$, *которые непрерывны в точке* $\mathbf{x}^0$. *Тогда смешанные частные производные второго порядка по переменным* x_j *и* x_k *не зависят от очередности дифференцирования, то есть справедлива формула*

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_k \partial x_j}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $n = 2$, $j = 1$ и $k = 2$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) - f(x_1^0, x_2) - f(x_1, x_2^0) + f(x_1^0, x_2^0).$$

Если зафиксировать x_2 в δ-окрестности точки x_2^0, то функцию φ можно воспринимать как функцию одной переменной x_1. Положим

$$g(x_1) = f(x_1, x_2) - f(x_1, x_2^0).$$

В таком обозначении функция φ представима как

$$\varphi(x_1, x_2) = g(x_1) - g(x_1^0).$$

Функция g дифференцируема по x_1 в некоторой δ'-окрестности точки x_1^0. Применим к функции g теорему Лагранжа и получим

$$g(x_1) - g(x_1^0) = g'(\xi)(x_1 - x_1^0),$$

где точка ξ находится между x_1 и x_1^0. Из определения функции g следует, что

$$g'(\xi) = \frac{\partial f(\xi, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\xi, x_2^0)}{\partial x_1},$$

что после соединения всех равенств дает формулу для φ,

$$\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f(\xi, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial f(\xi, x_2^0)}{\partial x_1}\right)(x_1 - x_1^0).$$

Если теперь зафиксировать x_1, то функцию φ можно воспринимать как функцию одной переменной x_2 с той же последней формулой ее представления. Снова применим теорему Лагранжа к приращению частной производной в правой части последней формулы, но уже по переменной x_2, и получим

$$\varphi(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0),$$

где точка η находится между x_2 и x_2^0.

Непрерывность смешанной частной производной

$$\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

в точке (x_1^0, x_2^0) влечет, что

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{\varphi(x_1, x_2)}{(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0)} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Предел в этой формуле понимается как двойной предел при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^0$. Кроме того, для всех x_1 из δ'-окрестности точки x_1^0, $x_1 \neq x_1^0$, существует предел

$$\lim_{x_2\to x_2^0}\frac{\varphi(x_1,x_2)}{(x_1-x_1^0)(x_2-x_2^0)}=$$
$$=\frac{1}{x_1-x_1^0}\lim_{x_2\to x_2^0}\left(\frac{f(x_1,x_2)-f(x_1,x_2^0)}{x_2-x_2^0}-\frac{f(x_1^0,x_2)-f(x_1^0,x_2^0)}{x_2-x_2^0}\right)=$$
$$=\frac{1}{x_1-x_1^0}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2^0)}{\partial x_2}-\frac{\partial f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}\right).$$

По теореме о двойном и повторном пределе существует повторный предел

$$\lim_{x_1\to x_1^0}\lim_{x_2\to x_2^0}\frac{\varphi(x_1,x_2)}{(x_1-x_1^0)(x_2-x_2^0)}=\lim_{x_1\to x_1^0}\frac{1}{x_1-x_1^0}\left(\frac{\partial f(x_1,x_2^0)}{\partial x_2}-\frac{\partial f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2}\right),$$

который равен двойному пределу. Следовательно, существует смешанная частная производная второго порядка

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2\partial x_1},$$

которая равна двойному пределу

$$\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_2\partial x_1}=\frac{\partial^2 f(x_1^0,x_2^0)}{\partial x_1\partial x_2},$$

что доказывает теорему 2.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Пусть

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1x_2^3}{x_1^2+x_2^2},\quad (x_1,x_2)\neq(0,0),\quad \text{и } f(0,0)=0.$$

Существуют ли смешанные частные производные второго порядка функции f в точке $(0,0)$.

2. Пусть функция f задана, как в вопросе 1. Будут ли ее смешанные частные производные второго порядка в точке $(0,0)$ равны между собой.

3. Какие из условий теоремы 2 не выполняются для функции f в вопросе 1.

4. Пусть

$$f(x_1,x_2)=|x_1|+x_2.$$

Существуют ли производные по каким-нибудь направлениям функции f в точке $(0,0)$.

5. Пусть функция f задана, как в вопросе 4. Существуют ли производные по каким-нибудь направлениям функции f в точке $(0,0)$.

Лекция 8.

СОДЕРЖАНИЕ

Равенство смешанных частных производных произвольного порядка

Теорема о равенстве смешанных частных производных второго порядка, отличающихся лишь очередностью дифференцирования, нетрудно переносится на частные производные высшего порядка.

Теорема 1. *Пусть $p \geq 2$ и функция $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, имеет в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ все частные производные до порядка p включительно, которые непрерывны в точке $\mathbf{x}^0$. Тогда частные производные не зависят от очередности дифференцирования, то есть справедлива формула*

$$\frac{\partial^p f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}} = \frac{\partial^p f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_p}},$$

где числа $k_1, k_2, \ldots, k_p$ и $j_1, j_2, \ldots, j_p$ могут принимать значения $1, 2, \ldots, n$ и оба набора чисел являются произвольной перестановкой друг для друга.

Доказательство. Как известно из курса алгебры, произвольная перестановка элементов $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ может быть получена конечным числом перестановок двух соседних элементов этого набора. Поэтому достаточно доказать, что в условиях теоремы 1 для любого $q \leq p$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^q f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_{q-1}} \partial x_{k_q}} = \frac{\partial^q f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_q} \partial x_{k_{q-1}}}.$$

Для $\mathbf{x}$ из δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ и $2 \leq q \leq p$ положим

$$g(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{q-2} f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_{q-2}}}.$$

Тогда функция g удовлетворяет всем условиям теоремы о равенстве смешанных частных производных второго порядка, отличающихся лишь очередностью дифференцирования. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_{q-1}} \partial x_{k_q}} = \frac{\partial^2 g(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_q} \partial x_{k_{q-1}}}.$$

Подставляя сюда выражение для функции g, получим формулу, записанную в утверждении теоремы 1, что завершает ее доказательство.

Дифференциалы высших порядков

Наряду с частными производными высших порядков определим дифференциалы высших порядков. Начнем с дифференциала первого порядка. Если функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$, то дифференциал функции f в точке $\mathbf{x}^0$, соответствующий приращению $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$, выражается по формуле

$$d_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0) = \mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0)\mathbf{h} = f'(\mathbf{x}^0)\mathbf{h}.$$

Будем считать $\mathbf{h}$ величиной независимой, а точку $\mathbf{x}^0$ сделаем переменной и переобозначим ее через $\mathbf{x}$. Перепишем формулу для дифференциала в новых обозначениях

$$d_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}) = \mathrm{grad} f(\mathbf{x})\mathbf{h} = f'(\mathbf{x})\mathbf{h}.$$

Теперь $d_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x})$ может рассматриваться как функция переменного $\mathbf{x}$, для которой можно попытаться найти свой дифференциал.

Определение 1. *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *имеет дифференциал в* δ*-окрестности точки* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. *Если дифференциал* $df(\mathbf{x}) = d_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x})$ *имеет дифференциал в точке* $\mathbf{x}^0$, *то*

$$d(df)(\mathbf{x^0}) = d_{\mathbf{h}}(d_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}^0)$$

называется дифференциалом второго порядка функции f *в точке* $\mathbf{x}^0$ *и обозначается*

$$d^2 f(\mathbf{x^0}) = d^2_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0).$$

От определения дифференциала второго порядка индуктивно перейдем к определению дифференциала произвольного порядка.

Определение 2. *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *имеет дифференциал порядка* p *в* δ*-окрестности точки* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. *Если дифференциал порядка* p, $d^p f(\mathbf{x}) = d^p_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x})$, *имеет дифференциал в точке* $\mathbf{x}^0$, *то*

$$d(d^p f)(\mathbf{x^0}) = d_{\mathbf{h}}(d^p_{\mathbf{h}} f)(\mathbf{x}^0)$$

называется дифференциалом порядка $p+1$ *функции* f *в точке* $\mathbf{x}^0$ *и обозначается*

$$d^{p+1} f(\mathbf{x^0}) = d^{p+1}_{\mathbf{h}} f(\mathbf{x}^0).$$

Координаты $h_1, h_2, \ldots, h_n$ вектора $\mathbf{h}$ принято обозначать через $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Общий вид дифференциала высшего порядка

Найдем выражение для дифференциала произвольного порядка.

Теорема 2. *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *имеет дифференциал порядка* p *в точке* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. *Тогда справедливо представление*

$$d^p f(\mathbf{x}^0) = \sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{n} \frac{\partial^p f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}} dx_{k_1} dx_{k_2} \ldots dx_{k_p}.$$

Доказательство. Проведем доказательство методом полной математической индукции. Для $p = 1$ формула теоремы 2 справедлива по определению дифференцируемой функции и ее дифференциала. Предположим, что теорема 2 справедлива для дифференциалов порядка $1, 2, \ldots, p$ и докажем ее справедливость для дифференциала порядка $p+1$. Согласно гипотезе индукции для всех $\mathbf{x}$ из δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ справедливо представление

$$d^p f(\mathbf{x}) = \sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{n} \frac{\partial^p f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}} dx_{k_1} dx_{k_2} \ldots dx_{k_p}.$$

Вычислим дифференциал выражения в этой формуле

$$d(d^p f)(\mathbf{x^0}) = d^{p+1} f(\mathbf{x}^0) = d\left(\sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}} dx_{k_1} dx_{k_2} \ldots dx_{k_p}\right)(\mathbf{x}^0) =$$

$$\sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{n} d\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}}\right)(\mathbf{x}^0) dx_{k_1} dx_{k_2} \ldots dx_{k_p} =$$

$$\sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^p f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p}} dx_k\right)(\mathbf{x}^0) dx_{k_1} dx_{k_2} \ldots dx_{k_p} =$$

$$\sum_{k_1,\ldots,k_p=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^{p+1} f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p} \partial x_k} dx_{k_1} dx_{k_2} \ldots dx_{k_p} dx_k.$$

Осталось в этой формуле переобозначить k через k_{p+1}, x_k через $x_{k_{p+1}}$ и две суммы записать как одну сумму по общим индексам, участвующим в каждой из двух сумм. В итоге получим формулу

$$d^{p+1} f(\mathbf{x}^0) = \sum_{k_1,\ldots,k_p,k_{p+1}=1}^{n} \frac{\partial^{p+1} f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_p} \partial x_{k_{p+1}}} dx_{k_1} dx_{k_2} \ldots dx_{k_p} dx_{k_{p+1}},$$

которая по индукции доказывает справедливость формулы из утверждения теоремы 2, что завершает доказательство теоремы 2.

Формула Тейлора с остатком Пеано

В некоторых задачах для скалярных функций $y = f(x)$ скалярного переменного x весьма полезной оказывалась формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(x_0)}{p!}(x - x_0)^p + R_p(x)$$

с погрешностью, или остатком $R_p(x)$, принимающим различные формы в зависимости от свойств функции f. Наиболее часто использовались остатки в форме Пеано и форме Лагранжа. Если записать

$$f'(x_0)(x - x_0) = df(x_0) = d_{x-x_0}f(x_0),$$

$$f''(x_0)(x - x_0)^2 = d^2f(x_0) = d^2_{x-x_0}f(x_0), \ldots,$$

$$f^{(p)}(x_0)(x - x_0)^p = d^pf(x_0) = d^p_{x-x_0}f(x_0),$$

то именно в таком виде формула Тейлора получает свое обобщение на случай скалярной функции f векторного переменного $\mathbf{x}$. Сформулируем теорему о формуле Тейлора с остатком в форме Пеано.

Теорема 3. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, определена в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ и имеет в точке $\mathbf{x}^0$ дифференциалы до порядка p включительно. Тогда существует бесконечно малая в точке $\mathbf{x}^0$ функция $\alpha(x)$ такая, что справедлива формула Тейлора с остатком в форме Пеано*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0) + \frac{d^2f(\mathbf{x}^0)}{2!} + \cdots + \frac{d^pf(\mathbf{x}^0)}{p!} + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^p.$$

Здесь дифференциалы $d^kf(\mathbf{x}^0)$ понимаются как $d^k_{\mathbf{x}-\mathbf{x}^0}f(\mathbf{x}^0)$, $k = 1, 2, \ldots, p$.

Доказательство теоремы 3 требует довольно скрупулезного и тщательного анализа. В следующем семестре будет построена более абстрактная теория дифференциального исчисления с возросшей мощью методов исследования. Это позволит доказать общую версию теоремы 3 с новых позиций на высоком уровне общности и строгости. Поэтому мы отложим доказательство теоремы 3 до следующего семестра. Несмотря на то, что теорема 3 будет вскоре использоваться, порочного логического круга не возникнет, так как будущее доказательство теоремы 3 не станет опираться на ее ближайшие приложения.

Формула Тейлора с остатком Лагранжа

Сформулируем теорему о формуле Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Теорема 4. *Пусть функция* $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, *имеет в* δ-*окрестности точки* $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0 \ldots, x_n^0)$ *дифференциалы до порядка* $p+1$ *включительно. Тогда справедлива формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0) + \frac{d^2 f(\mathbf{x}^0)}{2!} + \cdots + \frac{d^p f(\mathbf{x}^0)}{p!} + \frac{d^{p+1} f(\xi)}{(p+1)!},$$

где точка ξ *находится на прямолинейном интервале, соединяющем точки* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{x}^0$.

Здесь дифференциалы $d^k f(\mathbf{x}^0)$ понимаются как $d^k_{\mathbf{x}-\mathbf{x}^0} f(\mathbf{x}^0)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, и $d^{p+1} f(\xi) = d^{p+1}_{\mathbf{x}-\mathbf{x}^0} f(\xi)$.

Доказательство. Если скалярная переменная t пробегает все значения на отрезке $[0,1]$, то при фиксированных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$ линейная функция $\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)$ принимает все значения на отрезке, соединяющем точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}$. Поскольку линейная функция бесконечно дифференцируема, то сложная функция

$$F(t) = f(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))$$

дифференцируема до порядка $p+1$ включительно на отрезке $[0,1]$. Следовательно, для скалярной функции $F(t)$ скалярной переменной t справедлива формула Тейлора с остатком Лагранжа

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(p)}(0)}{p!}t^p + \frac{F^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!}t^{p+1}, \quad 0 < t \le 1, \quad 0 < \theta < t.$$

При $t = 1$ формула примет вид

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(p)}(0)}{p!} + \frac{F^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Остается вычислить все входящие в формулу значения. Именно,

$$F(1) = f(\mathbf{x}), \quad F(0) = f(\mathbf{x}^0), \quad F'(t) = f'(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0),$$

$$F'(0) = f'(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0) = df(\mathbf{x}^0), \quad F''(t) = f''(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^2,$$

$$F''(0) = f''(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^2 = d^2 f(\mathbf{x}^0), \ldots, F^{(p)}(t) = f^{(p)}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^p,$$

$$F^{(p)}(0) = f^{(p)}(\mathbf{x}^0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^p = d^p f(\mathbf{x}^0), \quad F^{(p+1)}(t) = f^{(p+1)}(\mathbf{x}^0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{p+1},$$

$$F^{(p+1)}(\theta) = f^{(p+1)}(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^{p+1} = d^{p+1} f(\mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)).$$

Обозначим

$$\xi = \mathbf{x}^0 + \theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0).$$

Точка ξ находится на интервале, соединяющем точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}$. Подставим все найденные выражения в формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для

$F(t)$ при $t = 1$ и получим формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа для функции $f(\mathbf{x})$, записанную в утверждении теоремы 4, что заканчивает доказательство теоремы 4.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$. Что представляют собой производная $f'(\mathbf{x}^0)$ и дифференциал $df(\mathbf{x}^0)$.

2. Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, дважды дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$. Что представляют собой производная второго порядка $f''(\mathbf{x}^0)$ и дифференциал второго порядка $d^2 f(\mathbf{x}^0)$.

3. Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, трижды дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$. Что представляют собой производная третьего порядка $f'''(\mathbf{x}^0)$ и дифференциал третьего порядка $d^3 f(\mathbf{x}^0)$.

4. Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, имеет дифференциал порядка p в точке $\mathbf{x}^0$ и справедлива формула

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0) + \frac{d^2 f(\mathbf{x}^0)}{2!} + \cdots + \frac{d^p f(\mathbf{x}^0)}{p!} + R_p(\mathbf{x}).$$

Каким свойствами обладает функция

$$\frac{R_p(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^p}.$$

5. Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, имеет дифференциал порядка p в точке $\mathbf{x}^0$ и справедлива формула

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0) + \frac{d^2 f(\mathbf{x}^0)}{2!} + \cdots + \frac{d^p f(\mathbf{x}^0)}{p!} + R_p(\mathbf{x}).$$

Каким свойствами обладает функция $R_p(\mathbf{x})$.

Лекция 9.

СОДЕРЖАНИЕ

Необходимое условие локального экстремума

Аппарат дифференциального исчисления эффективно применяется к решению задач о нахождении локальных экстремумов функции многих переменных.

Определение 1. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, определена в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$. Говорят, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный максимум, если для всех $\mathbf{x}$ из некоторой δ'-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ выполняется неравенство*

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^0).$$

Говорят, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный ммнимум, если для всех $\mathbf{x}$ из некоторой δ'-окрестности точки $\mathbf{x}^0$ выполняется неравенство

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^0).$$

Говорят, что функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный экстремум, если f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный максимум или локальный минимум.

Необходимое условие локального экстремума проистекает из знаменитой теоремы, приписываемой Ферма, о о том, что в точке экстремума производная должна обращаться в нуль.

Теорема 1. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, определена в δ-окрестности в точке $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, дифференцируема в точке $\mathbf{x}^0$ и имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный экстремум. Тогда*

$$\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0) = 0,$$

то есть

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_n} = 0.$$

Доказательство. Поскольку функция f дифференцируема, она имеет все частные производные первого порядка в точке $\mathbf{x}^0$. Зафиксируем все координаты $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, кроме координаты x_1, и рассмотрим функцию

$$g_1(x_1) = f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Из того, что функция f имеет локальный экстремум в точке $\mathbf{x}^0$, следует, что дифференцируемая функция g_1 имеет локальный экстремум в точке x_1^0. Следовательно, по знаменитой теореме Ферма

$$g_1'(x_1^0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_1} = 0.$$

Аналогичным образом, фиксируя все координаты, кроме координаты x_2, рассмотрим функцию

$$g_2(x_2) = f(x_1^0, x_2, \ldots, x_n^0).$$

Из того, что функция f имеет локальный экстремум в точке $\mathbf{x}^0$, следует, что дифференцируемая функция g_2 имеет локальный экстремум в точке x_2^0. Следовательно, по теореме Ферма

$$g_2'(x_2^0) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_2} = 0.$$

И так далее. Окончательно получим, что все частные производные первого порядка функции f в точке $\mathbf{x}^0$ обращаются в нуль, что доказывает теорему 1.

Квадратичные формы

При установлении достаточного условия локального экстремума свою роль должен сыграть дифференциал второго порядка

$$d^2 f(\mathbf{x}^0) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} dx_j dx_k$$

функции f в точке $\mathbf{x}^0$ локального экстремума. Прежде чем сформулировать условие, исследуем природу и свойства дифференциала второго порядка как функции, зависящей от переменных dx_j, dx_k, $j, k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим для краткости $dx_j = h_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 2. *Однородный многочлен степени 2 от переменных* $h_1, h_2, \ldots, h_n$

$$q = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} h_j h_k, \quad a_{jk} \in \mathbb{R}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

называется квадратичной формой.

Квадратичная форма q определена во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и принимает в нем действительные значения. В частности, в точке

$$\mathbf{h} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n) = (0, 0, \ldots, 0) \Longleftrightarrow h_1 = h_2 = \cdots = h_n = 0$$

квадратичная форма q принимает значение 0. Будем различать типы квадратичных форм по их способности менять или не менять знак при переходе от одной точки $\mathbf{h}$ к другой.

Определение 3. *Квадратичная форма q называется положительно определенной, если для всех $\mathbf{h} \neq 0$ она принимает положительные значения.*

Определение 4. *Квадратичная форма q называется отрицательно определенной, если для всех $\mathbf{h} \neq 0$ она принимает отрицательные значения.*

Определение 5. *Квадратичная форма q называется положительно полуопределенной, если для всех $\mathbf{h}$ она принимает неотрицательные значения.*

Определение 6. *Квадратичная форма q называется отрицательно полуопределенной, если для всех $\mathbf{h}$ она принимает неположительные значения.*

Определение 7. *Квадратичная форма q называется неопределенной, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.*

Заметим, что дифференциал второго порядка $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ в точке $\mathbf{x}^0$ является квадратичной формой q от n переменных $(h_1, h_2, \dots, h_n) = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ с коэффициентами

$$a_{jk} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Достаточное условие локального экстремума

Достаточное условие локального экстремума функции от n переменных опирается на свойства дифференциала второго порядка в критической точке, где дифференциал первого порядка обращается в 0.

Теорема 2. *Пусть функция $y = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, определена в δ-окрестности точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ и имеет в точке $\mathbf{x}^0$ дифференциал второго порядка. Предположим, что выполняется условие*

(1) $\mathrm{grad} f(\mathbf{x}^0) = 0$

и одно из двух условий

(2а) $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ является положительно определенной квадратичной формой от n переменных $(h_1, h_2, \dots, h_n) = (dx_1 . dx_2, \dots, dx_n)$,

или

(2б) $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ является отрицательно определенной квадратичной формой от n переменных $(h_1, h_2, \dots, h_n) = (dx_1 . dx_2, \dots, dx_n)$,

Тогда функция f имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локальный минимум при выполнении условия (2а) и локальный максимум при выполнении условия (2б). Если выполнено условие (1), но $d^2 f(\mathbf{x}^0)$ является неопределенной квадратичной *формой относительно* $(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$, *то* f *не имеет локального экстремума в точке* $\mathbf{x}^0$.

Доказательство. По существу, в теореме 2 высказаны три утверждения. Начнем с условий, гарантирующих наличие локального экстремума. Условия (2а) и (2б) сводятся одно к другому умножением на (-1). Поэтому ограничимся доказательством теоремы 2 при условии (2а).

Функция f представима формулой Тейлора с остатком в форме Пеано для дифференциалов до второго порядка включительно, согласно которой

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + df(\mathbf{x}^0) + \frac{d^2 f(\mathbf{x}^0)}{2} + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2,$$

где функция $\alpha(\mathbf{x})$ бесконечно мала в точке $\mathbf{x}^0$. Обозначим

$$(dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = (x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \ldots, x_n - x_n^0).$$

Принимая во внимание условие (1) теоремы 2 и общий вид дифференциала второго порядка, перепишем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{d^2 f(\mathbf{x}^0)}{2} + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k}(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0) + \alpha(\mathbf{x})|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} \, \frac{x_j - x_j^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} \, \frac{x_k - x_k^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|} + 2\alpha(\mathbf{x}) \right] |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2.$$

Для $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0$ введем обозначения

$$\xi_j = \frac{x_j - x_j^0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|}, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2 = 1.$$

Таким образом, точка $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ находится на сфере Q радиуса 1 с центром в начале координат $(0, 0, \ldots, 0)$.

Квадратичная форма

$$q = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_l} \xi_j \xi_k$$

непрерывна на ограниченном замкнутом множестве Q и по теореме Вейерштрасса достигает своего минимума на Q. Квадратичная форма q положительно определена и принимает значение 0 только в начале координат $(0, 0, \ldots, 0)$. Поэтому на сфере Q квадратичная форма принимает только положительные значения, ее минимум на Q тоже принимает положительное значение. Обозначим

$$m = \min_Q q, \quad m > 0.$$

С другой стороны, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}^0} \alpha(\mathbf{x}) = 0$, то есть

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta' > 0\ \forall \mathbf{x},\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0,\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta' \Longrightarrow |\alpha(\mathbf{x})| < \epsilon \Longrightarrow \alpha(\mathbf{x}) > -\epsilon.$$

Выберем

$$\epsilon = \frac{m}{2} > 0,\ \ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^0,\ \ |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \delta',$$

и используем формулу Тейлора с остатком Пеано для получения неравенств

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2}\left[\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k}\xi_j\xi_k + 2\alpha(\mathbf{x})\right] |\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(m + 2\alpha(\mathbf{x}))|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2 > \frac{1}{2}(m - 2\epsilon)|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0|^2 = 0.$$

Это доказывает, что точка $\mathbf{x}^0$ является точкой локального минимума функции f.

Перейдем к исследованию свойств функции f при условии неопределенности квадратичной формы $d^2 f(\mathbf{x}^0)$, то есть квадратичной формы $d^2 f(\mathbf{x}^0)$, принимающей как положительные, так и отрицательные значения. Пусть вектор $\mathbf{h}^1 = (h_1^1, h_2^1, \ldots, h_n^1)$ и вектор $\mathbf{h}^2 = (h_1^2, h_2^2, \ldots, h_n^2)$ таковы, что

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial h_k} h_j^1 h_k^1 > 0, \quad \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial h_k} h_j^2 h_k^2 < 0.$$

Рассмотрим функции

$$F_1(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}^1) \text{ и } F_2(t) = f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Обе функции F_1 и F_2 дважды дифференцируемы по скалярному переменному в точке $t = 0$ и справедливы формулы

$$F_1'(t) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}^1)\mathbf{h}^1, \quad F_2'(t) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0 + t\mathbf{h}^2)\mathbf{h}^2,$$

$$F_1'(0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)\mathbf{h}^1 = 0, \quad F_2'(0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}^0)\mathbf{h}^2 = 0,$$

$$F_1''(0) = f''(\mathbf{x}^0)(\mathbf{h}^1)^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} h_j^1 h_k^1 > 0,$$

$$F_2''(0) = f''(\mathbf{x}^0)(\mathbf{h}^2)^2 = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^0)}{\partial x_j \partial x_k} h_j^2 h_k^2 < 0.$$

По достаточному условию локального экстремума скалярной функции одного переменного t заключаем, что функция $F_1(t)$ имеет в точке $t = 0$ локальный минимум, а функция $F_2(t)$ имеет в точке $t = 0$ локальный максимум. Значит, функция f возрастает в направлении вектора $\mathbf{h}^1$ в точке $\mathbf{x}^0$ и убывает в направлении вектора $\mathbf{h}^2$ в точке $\mathbf{x}^0$, вследствие чего f не имеет в точке $\mathbf{x}^0$ локального экстремума, и чем заканчивается доказательство теоремы 2.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Линейной заменой переменных квадратичная форма q может быть приведена к виду

$$q = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2.$$

При каких условиях на коэффициенты a_{jj} квадратичная форма q будет положительно определенной.

2. При каких условиях на коэффициенты a_{jj} квадратичная форма

$$q = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2$$

будет положительно полуопределенной.

3. При каких условиях на коэффициенты a_{jj} квадратичная форма

$$q = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} h_j^2$$

будет неопределенной.

4. Пусть

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2.$$

Выяснить характер квадратичной формы $d^2 f(0,0)$ и наличие или отсутствие локального экстремума функции f в точке $(0,0)$.

5. Пусть

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2.$$

Выяснить характер квадратичной формы $d^2 f(0,0)$ и наличие или отсутствие локального экстремума функции f в точке $(0,0)$.