Методическое наследие
профессора кафедры
математики и методики её
преподавания
СГУ имени Н.Г. Чернышевского
Петровой Елены Степановны

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ
В СИСТЕМЕ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ
МАТЕМАТИКИ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ ИМЕНИ К.А. ФЕДИНА

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ В СИСТЕМЕ УГЛУБЛЕННОГО ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

Методические рекомендации по спецкурсу

Издательство Саратовского государственного
педагогического института

САРАТОВ 1993

Печатается по решению
Редакционно-издательского
совета СГПИ
им. К.А. Федина

Брошюра написана для студентов старших курсов физико-математического факультета педвуза с целью подготовки молодых учителей к организации разных форм занятий со школьниками по углубленному изучению математики.

Предлагается классификация, так называемых, исследовательских задач, даются примеры методики работы с учащимися по решению таких задач. брошюра завершается подборкой исследовательских задач по отдельным темам школьного факультатива.

Сноски даны С.В. Лебедевой при создании компьютерного макета пособия (2012 год).

Составитель: Е.С. Петрова
Под редакцией: А.О. Корнеевой
Рецензент: В.М. Косатая, доц. Тамбовского педагогического института

Назовём некоторые виды исследовательских задач:

– выявление свойств изучаемых математических объектов или отношений между ними;

– выделение частных случаев некоторого факта в математике;

– обобщение ряда вопросов;

– классификация математических объектов, отношений между ними, основных фактов данного раздела математики;

– решение одной и той же задачи разными способами;

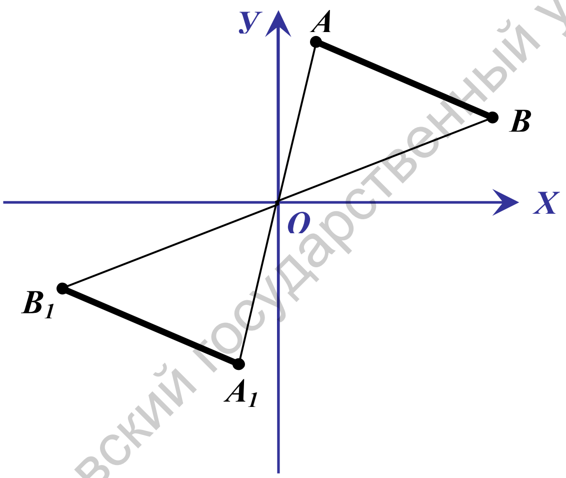
– составление новых задач, вытекающих из решения данных;

– варьирование задач.

Обратимся к более подробному анализу работы с учащимися по решению названных видов исследовательских задач.

В учебнике геометрии А.В. Погорелова [1] две теоремы о частных видах движений доказываются разными способами. Теорема: «Преобразование симметрии относительно точки является движением», – доказывается чисто геометрически с использованием первого признака равенства треугольников, а теорема о том, что преобразование симметрии относительно прямой является движение, доказывается координатным методом. Нельзя ли наоборот?

Покажем доказательство первой теоремы координатным методом, а вторую теорему докажем геометрически.



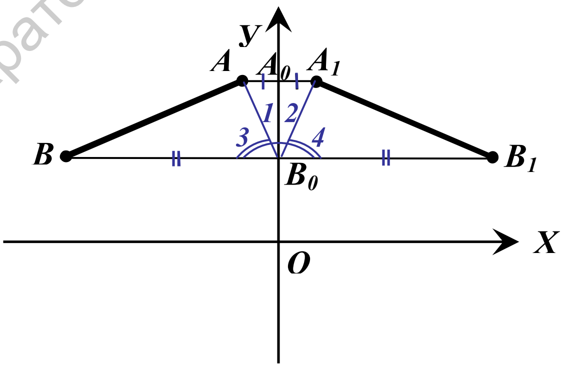
Т. 1 Если $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,

то $A_1(-x_1; -y_1)$, $B_1(-x_2; -y_2)$.

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2}$.

$A_1B_1 = AB$.



Т. 2 $\Delta\, AA_0B_0 = \Delta\, A_1A_0B_0$ (по двум катетам)

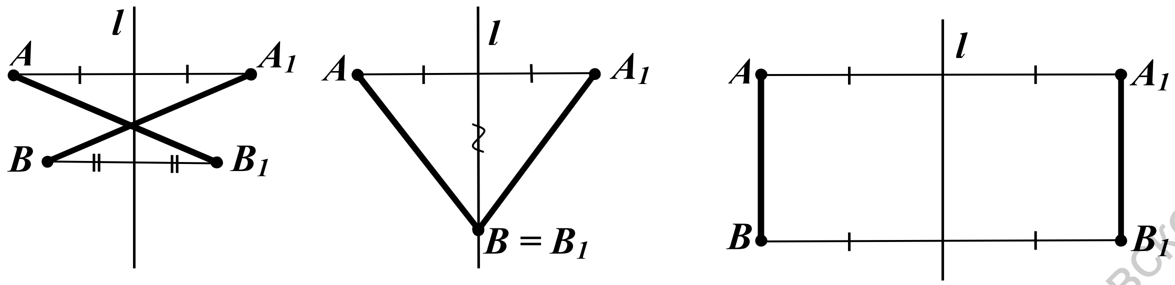
$\Rightarrow$ $AB_0 = A_1B_0$;

$\angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle 3 = \angle 4$.

$\Delta\, ABB_0 = \Delta\, A_1B_1B_0$ (т.к. $AB_0 = A_1B_0$; $\angle 3 = \angle 4$)

$\Rightarrow$ $BB_0 = B_1B_0$.

Другие случаи взаимного расположения отрезка АВ и оси симметрии:



Рассмотрим образец осуществления обобщения как одного из видов исследовательских задач.

В курсе планиметрии в теме «Подобие фигур» учащиеся решали следующие задачи:

1. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведённой из той же точки: $AC \cdot BC = CD^2$.

2. Если хорды АВ и CD окружности пересекаются в точке М, то $MA \cdot BM = CM \cdot DM$.

3. Если из точка Р к окружности проведены две секущие, пересекающие окружность в точках А, В, С и D соответственно, то $AP \cdot BP = CP \cdot DP$.

Нельзя ли сформулировать задачу так, чтобы она объединяла все три только что названные задачи? Можно:

Доказать, что если через какую-нибудь точку М провести к окружности несколько секущих, то произведение расстояний от точки М до обеих точек пересечения каждой секущей с окружностью есть число постоянное (для данной точки).

Интересно, что если рассмотреть предельный случай: когда обе точки пересечения секущей с окружностью совпадают, то есть, если секущая обращается в касательную, то это предложение оказывается справедливым. Его можно рассматривать как теорему, уже доказанную нами методом полной индукции, то есть при условии доказательства всех возможных частных случаев.

Постоянное произведение, о котором идёт речь в этой теореме, с учётом направленных отрезков называется *степенью точки М относительно окружности* α и обозначается: ω_M^α

$\omega_M^{\alpha} > 0$, если М лежит вне окружности α;

$\omega_M^{\alpha} < 0$, если М лежит внутри окружности α;

$\omega_M^{\alpha} = 0$, если М ∈ α;

Исследование знаков степени точки М относительно окружности учащиеся могут провести сами, как доказать и тот факт, что $\omega_M^{\alpha} = MO^2 - r^2$, где О – центр окружности α, а r – её радиус.

Пусть даны две окружности: $\alpha_1(O_1;\ r_1)$ и $\alpha_2(O_2;\ r_2)$. Исследуем, где будут лежать точки, имеющие одинаковые степени относительно каждой из окружностей.

По предыдущей теореме справедливо равенство:

$$MO_1^{\,2} - r_1^{\,2} = MO_2^{\,2} - r_2^{\,2} \text{ или } MO_1^{\,2} - MO_2^{\,2} = r_1^{\,2} - r_2^{\,2} = const.$$

А геометрическим местом точек, обладающих названным свойством, является прямая, перпендикулярная линии центров O_1O_2. Эта прямая называется *радикальной осью двух окружностей*. Как её построить?

Можно вспомнить о геометрическом месте точек, абсолютная величина разности квадратов расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная. Однако построение может быть упрощено, если учесть все возможные частные случаи взаимного расположения двух окружностей (Какие?)

Если две окружности пересекаются в двух точках, то радикальная ось проходит через точки пересечения.

Если две окружности касаются друг друга, то радикальная ось является касательной в их общей точке.

Если две окружности расположены одна вне другой, то их радикальная ось делит отрезок общей касательной, заключённый между точками касания пополам.

Если две окружности расположены одна внутри другой и не концентричны, то их радикальная ось проходит вне этих окружностей (Как её построить?).

Что можно сказать о радикальной оси двух концентрических окружностей?

А если окружностей не две, а три, то существуют ли точки, имеющие одинаковую степень относительно всех трёх окружностей? Очевидно, такая точка одна – точка пересечения радикальных осей каждой пары из этих трёх окружностей. Эта точка называется *радикальным центром трёх* *окружностей.* Всегда ли она существует? То есть, всегда ли названные радикальные оси пересекутся? Не всегда. Они будут параллельны, если центры трёх окружностей лежат на одной прямой.

Так, в результате решения последовательно возникающих задач школьники знакомятся самостоятельно с новым теоретическим материалом. Мы видим, как решение одной задачи влечёт за собой цепочку составления и последовательного решения новых задач. «Всякая математическая задача поистине неисчерпаема в своих связях с другими задачами, – говорят П.М. Эрдниев и Б.П. Эрдниев, – после решения задачи почти всегда можно найти предмет размышлениям, найти несколько направлений, в которых удаётся развить и обобщить задачу, затем найти решения созданных таким образом новых проблем» [4, с. 61].

Приведём ещё несколько примеров.

В школьном учебнике А.В. Погорелова по геометрии [2] в теме «Движение» мы находим следующую задачу повышенной трудности.

Даны две пересекающиеся прямые и точка, не лежащая на этих прямых. Построить отрезок с концами на данных прямых и серединой в данной точке.[2, § 9, № 10, с. 152].

Задача решается методом центральной симметрии. Нельзя ли её изменить, допустить варьирование задачи? Например, так:

Даны: прямая, точка О и окружность. Построить отрезок с концами на данных прямой и окружности так, чтобы точка О делила его пополам.

Эта задача не всегда имеет решение, и требуется дополнительное исследование.

Далее аналогичную задачу можно предложить для точки и двух окружностей.

Пользование аналогией рождает много новых задач, особенно при исследовании планиметрических и стереометрических вопросов.

Так, известно, что геометрическим местом точек, равностоящих от концов данного отрезка, является серединный перпендикуляр к этому отрезку. Пространственным аналогом этого геометрического места точек является плоскость, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярная к нему.

На плоскости: геометрическим местом точек, равноотстоящих от двух параллельных прямых, является прямая, им параллельная, делящая пополам полосу, образованную данными прямыми; геометрическим местом точек, равноотстоящих от двух пересекающихся прямых, является совокупность биссектрис двух углов, образованных данными прямыми.

Рассмотрев пространственные аналоги этих геометрических мест, обнаружим, что в пространстве появляется новое геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных скрещивающихся прямых – плоскость, параллельная этим прямым.

А если задано прямых не две, а три? И требуется найти геометрическое место точек, равноудалённых от трёх данных прямых? На плоскости это

– четыре точки, если прямые попарно пересекаются;

– две точки, если две параллельные прямые пересечены третьей;

– одна точка пересечения трёх пересекающихся в этой точке прямых;

– искомого геометрического места точек нет, если данные прямые параллельны.

Небезынтересно продолжить цепочку задач, рассматривая данные прямые в пространстве.

Нередко новые задачи появляются при рассмотрении предельных ситуаций. Это удобно показать на задаче Аполлония:

Построить окружность, касающуюся трёх данных окружностей.

Одна задача разбивается на десять задач, если окружностями считать точку (окружность нулевого радиуса) и прямую (окружность бесконечно большого радиуса).

При решении геометрических задач разными способами полезно использовать координатный метод. Возьмём в качестве примера задачу Аполллония:

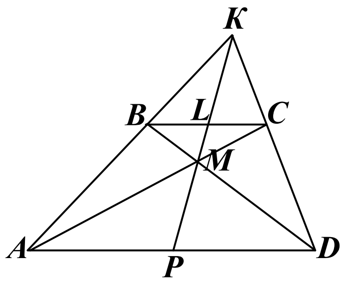
Найти геометрическое место точек, отношение расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная, не равная единице.

Эту задачу удобно решить разными способами сначала для конкретного случая, а затем в общем виде.

Рассмотрим решение тремя способами ещё одной задачи:

Доказать, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений её боковых сторон, проходит через середины оснований трапеции.

I способ (с использованием подобия треугольников).



$$\left.\begin{aligned}&\Delta\,\mathrm{APK} \backsim \Delta\,\mathrm{BKL} \Rightarrow \mathrm{AP} : \mathrm{BL} = \mathrm{PK} : \mathrm{KL}\\&\Delta\,\mathrm{PKD} \backsim \Delta\,\mathrm{LKC} \Rightarrow \mathrm{PD} : \mathrm{LC} = \mathrm{PK} : \mathrm{KL}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{AP} : \mathrm{BL} = \mathrm{PD} : \mathrm{LC} \qquad (1)$$

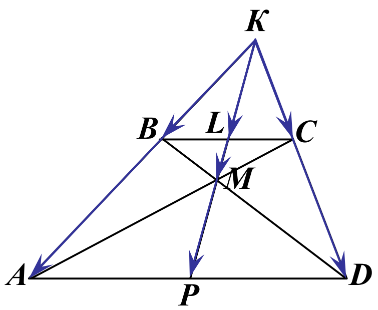
$$\left.\begin{aligned}&\Delta\,\mathrm{BLM} \backsim \Delta\,\mathrm{MPD} \Rightarrow \mathrm{LB} : \mathrm{PD} = \mathrm{LM} : \mathrm{MP}\\&\Delta\,\mathrm{LMC} \backsim \Delta\,\mathrm{AMP} \Rightarrow \mathrm{LC} : \mathrm{AP} = \mathrm{LM} : \mathrm{MP}\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{LB} : \mathrm{PD} = \mathrm{LC} : \mathrm{AP} \qquad (2)$$

Перемножая левые части равенств (1) и (2), получим: $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{BL}}\cdot\dfrac{\mathrm{BL}}{\mathrm{PD}} = \dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{LC}}\cdot\dfrac{\mathrm{LC}}{\mathrm{AP}};\ \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}} = \dfrac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AP}} \Rightarrow \mathrm{AP} = \mathrm{PD}$.

А тогда, из (1): BL = LC, то есть, L – середина BC и P – середина AD.

II способ (векторный метод).



Обозначим: $\overrightarrow{\mathrm{KA}} = \vec{a}$; $\overrightarrow{\mathrm{KD}} = \vec{b}$.

Тогда: $\overrightarrow{\mathrm{KB}} = k\vec{a}$; $\overrightarrow{\text{ÊC}} = k\vec{b}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{KL}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{KB}} + \overrightarrow{\mathrm{KC}}\right) = \frac{k}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right). \qquad (1)^*$$

$$\overrightarrow{\mathrm{KP}} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right). \qquad (2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{KD}} - \overrightarrow{\mathrm{KB}} = \vec{b} - k\vec{a}.$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BM}} = l\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = l\left(\vec{b} - k\vec{a}\right).$$

$$\overrightarrow{\mathrm{KM}} = \overrightarrow{\mathrm{KB}} + \overrightarrow{\mathrm{BM}} = k\vec{a} + l\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}} = k\vec{a} + l\left(\vec{b} - k\vec{a}\right) = k(1-l)\vec{a}\cdot + l\vec{b} = (k - kl + l)\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\ (3)$$

Из (1), (2) и (3) можно вывести, что векторы $\overrightarrow{\text{ÊL}}$, $\overrightarrow{\text{ÊÐ}}$ и $\overrightarrow{\text{ÊÌ}}$ коллинеарны, значит, точки K, L, M, P лежат на одной прямой.

III способ описан в книге Шарыгина И.Ф. «Факультативный курс по математике» [3].

Особенно богатый материал для решения разными способами дают нам логические задачи. Они могут быть решены (4 способа):

– составлением таблицы,

– составление графа,

– средствами математической логики,

– логическими рассуждениями.

---

* Здесь предполагается, что L – середина BC и P – середина AD, и доказывается, что точки K, L, M, P лежат на одной прямой.

Наконец, приведём пример решения алгебраической задачи [1, с. 186].

Решить неравенство: $\log_{x^2}(2+x)<1$.

Решение

<u>I способ</u>.

Данное неравенство равносильно неравенству: $\log_{x^2}(2+x)<\log_{x^2}x^2$, что равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} x^2>1 \\ 2+x<x^2; \\ 2+x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0<x^2<1 \\ x^2<2+x \end{cases}$.

Решением первой системы являются промежутки:
$-2<x<-1$ и $2<x<+\infty$.

Решением второй системы являются промежутки:
$-1<x<0$ и $0<x<1$.

Объединяя полученные множества решений систем совокупности, находим множество всех решений исходного неравенства: все х из четырёх промежутков: $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $2<x<+\infty$.

<u>II способ</u>.

Область допустимых значений данного неравенства определяется системой: $x^2>0$, $x^2\neq 1$ и $2+x>0$, отсюда область допустимых значений неравенства: $-2<x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $1<x<+\infty$.

Рассматриваем данное неравенство на множестве $(-2;-1)\cup(1;+\infty)$. Здесь оно равносильно неравенству $2+x<x^2$ (так как $x^2>1$), а решением последнего на этом множестве являются промежутки: $-2<x<-1$, $2<x<+\infty$.

На множестве $(-1;0)\cup(0;1)$ данное неравенство равносильно неравенству $2+x>x^2$ (так как $x^2<1$), решением которого на этом множестве являются промежутки: $-1<x<0$, $0<x<1$.

Объединяя найденные решения, получим ответ.

Примеров исследовательских задач, связанных с <u>классификацией</u> математических объектов или отношений между ними, можно привести достаточно много. Вот один из них.

<u>Классификация построения графиков функций</u>.

1. Путём движения без деформаций:

(1) $y=f(x)+a$; (2) $y=f(x+a)$;
(3) $y=f(x+n)+m$; (4) $y=-f(x)$;
(5) $y=f(-x)$; (6) построение графиков обратных функций.

2. Путём сдвига с деформациями:

(1) $y = Af(x)$; (2) $y = f(\omega x)$; (3) $y = Af(\omega x)$;

(4) $y = Af(\omega x + n) + m$; (5) построение графиков простых гармонических колебаний.

3. Содержащих знак модуля:

(1) $y = |f(x)|$; (2) $y = f(|x|)$; (3) $y = |f(|x|)|$;

4. Путём выполнения операций над графиками элементарных функций:

(1) $y = f(x) \pm \varphi(x)$; (2) $y = f(x) \cdot \varphi(x)$;

(3) $y = f(x) : \varphi(x)$; (4) $y = f(\varphi(x))$.

Цель такой классификации – дать систематизированное изложение методов построения графиков элементарных функций по схеме:

Теория – пример – упражнения – вопросы для повторения.

Одной из форм работы с учащимися по решению исследовательских задач можно назвать исследование по программе, предлагаемой образцом.

Пусть, например, изучается тема «Геометрические преобразования плоскости». Тогда можно привести учащимся пример исследования свойств одного из преобразований, а затем в соответствии со схемой изучения этого преобразования предложить сделать самостоятельные выводы относительно свойств других преобразований.

Начинаем с изучения движения. В качестве образца пусть предлагается осевая симметрия. Это преобразование плоскости изучается по следующему плану:

1. Формулировка определения.
2. Построение образа данной точки.
3. Построение образа прямой, луча, отрезка, треугольника, четырёхугольника, окружности.
4. Выявление элементов, определяющих данное преобразование. Разные способы его задания.
5. Выявление «двойных» элементов (точки, прямые, переходящие сами в себя); фигуры, имеющие ось симметрии.
6. Частные случаи данного преобразования.

Например, фигура, имеющая ось симметрии, переходит сама в себя; существуют фигуры, имеющие несколько осей симметрии. Если говорить о других преобразованиях плоскости, то, например, частным случаем поворота является центральная симметрия (поворот на 180°).

7. Формулы, определяющие данное преобразование.
8. Композиция двух последовательных преобразований данного вида при различном взаимном расположении элементов, определяющих преобразование.

В данном случае оси симметрии:

а) параллельны,

б) пересекаются под углом, отличным от прямого,

в) пересекаются под прямым углом.

Изучив осевую симметрию и её свойства по названному плану, учащиеся могут самостоятельно выявить свойства других видов движений: центральной симметрии, поворота, параллельного переноса.

Но вот переходим к преобразованию плоскости, не являющемуся движением: гомотетии. Определение даёт учитель. Учащиеся выявляют характеристические свойства гомотетии в соответствии с определением.

Путём подбора системы исследовательских задач возможна организация самостоятельного изучения учащимися целой темы или отдельных вопросов темы.

СИСТЕМА ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ

ПО ОТДЕЛЬНЫМ ТЕМАМ ШКОЛЬНОГО ФАКУЛЬТАТИВА

Комплексные числа.

1. Пусть $z = a + bi$ и $w = c + di$ – два комплексных числа, причём $w \neq 0$. Частным от деления z на w называется число $s = u + vi$: $w \cdot s = z$. Доказать, что такое число (s) существует и единственно.

В результате должно получиться:

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \qquad (1)$$

2. После введения понятия числа, сопряжённого данному комплексному числу, правило деления комплексных чисел и формулу (1) можно вывести гораздо проще. Как?

Нужно числитель и знаменатель дроби $\frac{a+bi}{c+di}$ умножить на число $c - di$, комплексно сопряжённое со знаменателем.

Вывод: При делении комплексных чисел нужно числитель и знаменатель дроби умножить на число комплексно сопряжённое со знаменателем.

3. Верно ли утверждение, что сумма и произведение двух сопряжённых комплексных чисел являются действительными числами?

4. Справедливо ли предложение, обратное предложению 3?

5. Квадратным корнем из комплексного числа c называют комплексное число z такое, что $z^2 = c$.

Пусть $c = a + bi$ и $z = u + wi$. Найти z.

6. Как расположены на комплексной плоскости точки, соответствующие комплексно-сопряжённым числам $z_1 = a + bi$ и $z_2 = a - bi$?

7. Как расположены на комплексной плоскости точки, соответствующие противоположным числам z и $(-z)$?

8. Изобразите на чертеже геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) действительная часть комплексного числа больше 1;

б) мнимая часть комплексного числа меньше (-2);

в) $|z - 4| = 7$;

г) $|z - 4 + i| \le 5$;

д) $\left|\dfrac{z-1}{z-4}\right| = 3$.

Придумать не менее пяти задач, связанных с изображением на чертеже геометрических мест точек комплексной плоскости.

9. Доказать, что при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

10. Записать аналогично предыдущему:

а) правило деления комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, доказать его справедливость;

б) правило возведения комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, в степень с натуральным показателем.

11. Сравнить, что удобнее: осуществить умножение / деление комплексных чисел в алгебраической форме, или, сначала оба сомножителя представить в тригонометрической форме, а затем выполнить умножение / деление?

12. Воспользоваться формулой Муавра, чтобы выразить:

а) $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$;

б) $\sin 4\varphi$ и $\cos 4\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$;

в) $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$ через $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$.

13. Доказать, что при любом натуральном n: cos nφ можно рационально выразить через cos φ.

Можно ли то же самое сказать о sin nφ?

14. Записать правило извлечения корня n-ой степени из комплексного числа *c*, заданного в тригонометрической форме?

15. Сравнить, что удобнее: возводить в степень n комплексное число, заданное в алгебраической форме, или, сначала представить это комплексное число в тригонометрической форме, а затем возвести его в степень n?

16. Решить предыдущую задачу в применении к операции извлечения корня n-ой степени из комплексного числа.

17. Записать формулу корней n-ой степени из единицы. ($z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\cdot\sin\frac{2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$).

18. Построить на комплексной плоскости изображение корней n-ой степени из единицы при n = 3, 4, 5, 6.

19. Доказать, что корни n-ой степени из единицы на комплексной плоскости являются вершинами правильного n-угольника.

20. Пусть z_1 и z_2 – корни n-ой степени из единицы. Доказать, что тогда $z_1 \cdot z_2$ и $z_1 : z_2$ также являются корнями n-ой степени из единицы.

21. Записать в алгебраической и тригонометрической форме кубические корни из единицы.

<u>Замечательные точки и линии в треугольнике</u>.

1. Исследовать, где по отношению к данному треугольнику расположен центр окружности, описанной около него, если данный треугольник:

а) остроугольный,

б) тупоугольный,

в) прямоугольный.

2. Найти точки, равноудалённые от прямых, на которых лежат стороны данного треугольника (их четыре – это центр окружности, вписанной в треугольник, и центры вневписанных окружностей*).

* Вневписанная окружность треугольника – окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон. Таких окружностей, в отличие от вписанной, для любого треугольника существует ровно три.

Известно, что в треугольнике есть следующие замечательные точки и линии:

– точка пересечения медиан треугольника – центр тяжести,

– точка пересечения его биссектрис – центр вписанной окружности,

– точка пересечения его высот – ортоцентр вписанной окружности,

– точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника,

– средняя линия.

А есть ли в четырёхугольнике замечательные точки и линии?

3. Доказать, что во всяком четырёхугольнике середины его сторон служат вершинами параллелограмма.

4. Доказать, что во всяком четырёхугольнике отрезки, соединяющие середины двух пар противоположных сторон, и отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходят через одну точку и делится в этой точке пополам.

5. Проиллюстрировать справедливость предложений, изложенных в задачах 3 и 4, на невыпуклых четырёхугольниках.

6. Теорема об окружности девяти точек.

Во всяком треугольнике середины трёх сторон, основания трёх высот и середины трёх отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности (она называется *окружность девяти точек*).

Доказать эту теорему, ссылаясь на справедливость предложения 4 в применении его к невыпуклому четырёхугольнику.

Прямая, проходящая через ортоцентр треугольника и центр круга, описанного около треугольника, называется *прямой Эйлера*.

7. Будет ли прямая Эйлера проходить через:

а) центр окружности девяти точек,

б) точку пересечения медиан треугольника?

Ответ обосновать.

Метод координат.

1. Составить уравнение геометрического места точек, равноудалённых от двух данных точек $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$.

2. Составить уравнение геометрического места точек, расположенных вдвое ближе к точке $A(a; 0)$, чем к точке $B(b; 0)$.

3. Найти геометрическое место середин отрезка AB, концы которого скользят по сторонам данного прямого угла.

Решить задачу геометрически и координатным методом. Указать достоинства и недостатки каждого способа решения.

4. Составить уравнение геометрического места точек, сумма квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная $2d^2$, где $d\sqrt{2}$ – длина данного отрезка.

Ответ: Окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{d^2 - \eth^2}$, где AB = 2p.

5. Найти геометрическое место точек, абсолютная величина разности квадратов расстояний которых до двух данных точек A и B есть величина постоянная, равная $2d^2$.

Ответ: Две прямые, параллельные оси ординат и удалённые от неё на расстояние …

Заметим, что для решения всех задач 1-5 (а также 6-8) координатным методом обязательно доказывать два взаимно обратных предложения.

Итогом доказательства первого является составление уравнения данного геометрического места точек.

Во втором предложении утверждается, что если координаты точки $M(x; y)$ удовлетворяют составленному ранее уравнению, то эта точка принадлежит искомому геометрическому месту точек.

6. Составить уравнение геометрического места точек, сумма расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

Доказательство осуществляем координатным методом.

После возведения в квадрат обеих частей уравнения:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

приводим его к виду: $x^2(a^2 - c^2) + a^2 y^2 - a^2 (a^2 - c^2) = 0$,
а затем обозначаем: $a^2 - c^2 = b^2$.

Продолжая упрощать уравнение, делим его обе части на a^2b^2.

Не забыть доказательство обратного предложения.

7. Исследуя уравнение: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, доказать справедливость следующих свойств *эллипса*:

а) Эллипс – фигура, симметричная относительно координатных осей и начала координат.

б) Эллипс – ограниченная фигура, расположенная внутри прямоугольника с длинами сторон $2a$ и $2b$ и касающаяся сторон этого прямоугольника в точках пересечения с координатными осями.

в) При $a = b$ эллипс является окружностью.

8. Начертите эллипс, заданный его каноническим уравнением.

9. Начертите эллипс, если даны его полуоси и известно, что фркусы эллипса лежат на оси ординат.

10. Составить уравнение геометрического места точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная, равная $2a$.

11. Исследуя уравнение: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, доказать справедливость следующих свойств *гиперболы*:

а) Гипербола – фигура, симметричная относительно координатных осей и начала координат.

б) Исследовав функцию $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$, доказать, что

– гипербола не имеет общих точек с осью ОУ;

– точек графика этой функции нет в полосе, ограниченной прямыми $x = -a$ и $x = a$;

– гипербола пересекает ось абсцисс в двух точках: A($-a$; 0) и B(a; 0), которые называются *вершинами гиперболы.*

в) Ветви гиперболы неограниченно простираются в бесконечность.

12. Построить гиперболу по её уравнению, если: фокусы гиперболы лежат на оси

а) абсцисс; б) ординат.

13. Исследовать, как близко ветви гиперболы располагаются по отношению к прямым:

а) $x = -a$ и $x = a$; б) $y=\frac{b}{a}x$ и $y=-\frac{b}{a}x$?

14. Сравнить графики уравнений: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $y=\frac{k}{x}$, если они определяют одну и ту же гиперболу. Каково расположение этих графиков относительно координатных осей?

15. Составьте уравнение гиперболы, сопряжённой данной: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

16. Написать уравнение геометрического места точек, равноудалённых от данной точки F и от данной прямой d (F $\notin$ d).

17. Доказать обратное предложение.

18. Выявить свойства *параболы*.

19. Найти условие, при котором прямая $y = kx + b$ касается:

а) эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$;

в) параболы $y^2 = 2px$; г) окружности $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

20. Задать неравенствами:

– треугольник, заданный координатами своих вершин;

– трапецию с вершинами в данных точках;

– параллелограмм с вершинами в данных точках;

– круговой сектор AOB, если координаты точек A, O, B известны.

21. Расположить декартову прямоугольную и полярную системы координат так, чтобы полюс совпадал с началом декартовой прямоугольной системы координат, а полярная ось совпадала с осью абсцисс.

Найти формулы, выражающие

а) x и y через r и φ; б) r и φ через x и y.

22. Начертить фигуры, заданные следующими уравнениями в полярной системе координат: $r = 1$; $r = a$; $\varphi = \pi/2$; $\varphi = const$.

23. Найти полярные координаты точек, симметричных с точкой M(r; φ) относительно полюса и относительно полярной оси.

24. Дана окружность с диаметром OA = 2R. Из конца диаметра O поведена хорда OB, и из конца её B опущен перпендикуляр на диаметр OA; из основания этого перпендикуляра C опущен перпендикуляр снова на хорду OB. Какую кривую опишет основание M этого второго перпендикуляра, когда хорда OB вращается вокруг O?

<u>Замечание</u>: Вывести уравнение искомой фигуры сначала в полярных координатах.

Построить эту фигуру.

25. Отрезок АВ постоянной длины $2a$ скользит своими концами по сторонам прямого угла. Из вершины прямого угла О на этот отрезок опущен перпендикуляр ОМ. Найти геометрическое место оснований этих перпендикуляров.

Замечание: Предварительно вывести уравнение искомой фигуры сначала в полярных координатах.

Построить эту фигуру.

Теоремы Чевы и Менелая.

Теорема Чевы: Пусть $A'B'C'$ – три точки, лежащие соответственно на сторонах ВС, СА и АВ треугольника. Для того, чтобы прямые AA', BB', CC' пересекались в одной точке или были все параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$

Прямые, исходящие из вершин треугольника и пересекающиеся в одной точке, называются *прямыми Чевы*.

1. Сформулировать и доказать прямую и обратную теоремы для обоих случаев разными способами:

– проведя через вершину А данного треугольника прямую ВС до пересечения с BB' и CC' и рассматривая подобные треугольник.;

– выражая интересующие нас отношения отрезков через отношения площадей треугольников.

2. Показать, что как следствия из теоремы Чевы могут быть получены известные теоремы:

– Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

– Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке.

– Высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентр треугольника).

– Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанного круга, пересекаются в одной точке, называемой *точкой Жергонна*[*].

[*] Традиционно обозначается *Ge, G* или *K*.

– Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания вневписанной окружности со сторонами треугольника (а не с их продолжениями), проходят через одну точку. Эта точка называется *точкой Нагеля**.

– Прямые, соединяющие вершины треугольника с точками касания одной из вневписанных окружностей со стороной и продолжениями сторон треугольника, проходят через одну точку.

– Прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие (внутренним образом) противолежащие стороны на части, пропорциональные квадратам прилежащих сторон, проходят через одну точку. Эти прямые называются *симедианами* треугольника, а точка их пересечения – *точкой Лемуана***.

3. Доказать, что для каждой из прямых Чевы, пересекающихся внутри треугольника в точке К, существует соотношение: $\frac{AK}{KA'} = \frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B}$.

4. Рассмотреть частные случаи предшествующей теоремы, когда прямые Чевы – а) медианы; б) биссектрисы внутренних углов.

Сделать выводы.

5. Показать, как свойства прямых Чевы может быть распространена на прямые Чевы, пересекающиеся вне треугольника, если отрезки, рассматриваемые в теореме, считать направленными.

Теорема Менелая:

Если стороны треугольника AB, BC, CA или их продолжения пересекаются прямой в точках C_1, B_1, A_1, то $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = -1$.

6. Доказать теорему Менелая и ей обратную.

Замечание: Учитывать направления отрезков!

7. Доказать теорему Чевы, дважды применив теорему Менелая и перемножая почленно полученные результаты (равенства).

* Названа по имени Христиана Генриха фон Нагеля, впервые охарактеризовавшего её в статье 1836 г. Традиционно обозначается *N*.

** Впервые точку Лемуана обнаружил (1809 г.) швейцарский геометр и тополог Симон Антуан Жан Люилье. Этой точке было посвящено исследование (1847 г.) Эрнста Вильгельма Гребе, в честь которого в Германии она называлась *точкой Гребе*. Точка названа в честь французского геометра Эмиля Лемуана, опубликовавшего (1873 г.) доказательство существования точки. Традиционно обозначается *L/*

8. Показать, что, как следствия из теоремы Менелая, могут быть выведены следующие теоремы:

– Точки пересечения биссектрис внешних углов при вершинах неравнобедренного треугольника с продолжениями его сторон лежат на одной прямой.

– Точки пересечения биссектрис внутренних углов при двух вершинах неравнобедренного треугольника и биссектрисы внешнего угла при третьей вершине со сторонами или с продолжениями сторон этого треугольника лежат на одной прямой.

9. Сформулировать теорему, являющуюся обобщением теоремы Менелая для плоского многоугольника и доказать её.

Теорема Карно:

Если стороны плоского многоугольника или их продолжения пересечены прямой, то произведение отрезков сторон, не имеющих общих концов, равно произведению остальных отрезков.

10. Используя теорему Менелая доказать теорему Паскаля:

Точки пересечения противоположных сторон вписанного в окружность шестиугольника ABCDEF лежат на одной прямой.

Основные принципы построения чертежей пространственных фигур.

Повторяются: определение параллельного проектирования и его основные свойства:

При параллельном проектировании в данном направлении l:

– прямая, не параллельная l, проектируется в прямую; луч – в луч; отрезок – в отрезок;

– параллельные прямые (не параллельные l) проектируются в параллельные прямые или в одну прямую (когда?);

– отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, сохраняется.

1. Какая фигура будет изображением расположенной в пространстве каждой из следующих фигур: прямоугольного треугольника, равнобедренного треугольника, прямоугольника, квадрата, ромба, параллелограмма, трапеции, окружности с парой взаимно-перпендикулярных диаметров, правильного шестиугольника, правильного пятиугольника?

2. Построить изображение наклонного параллелепипеда.

3. Построить изображение правильной пятиугольной призмы.

Верно ли утверждение, что удобнее начинать с построения изображения верхнего основания призмы?

4. Построить изображение правильной треугольной пирамиды. Можно ли строго определить положение основания высоты этой пирамиды на чертеже?

5. Построить изображение правильной восьмиугольной пирамиды. Как добиться того, чтобы боковые рёбра на изображении не перекрывали друг друга?

6. Доказать справедливость теоремы Польке-Шварца:

Всякий четырёхугольник вместе с диагоналями может служить изображением любого данного тетраэдра.

7. Ученик начал изображение треугольной усечённой пирамиды с изображения её верхнего и нижнего оснований, а затем соответствующие вершины этих треугольников соединил отрезками. Можно ли утверждать, что изображение получилось правильным? Ответ обосновать.

8. Описать последовательность действий при построении изображения усечённой призмы. Сколько точек общего положения выбирается при этом произвольно?

9. Верно ли утверждение, что апофему и высоту усечённой пирамиды на её изображении нельзя проводить произвольно, что они должны проводиться соответственно параллельно апофеме и высоте полной пирамиды?

10. Записать последовательность действий при построении изображений прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса. Верно ли утверждение, что точки касания контурных образующих конуса должны быть концами одного диаметра?

11. Записать последовательность действий при решении задачи на построение изображений многогранников, вписанных в конус и цилиндр или описанных около конуса и цилиндра.

12. Составить подборку задач на построение многогранников, вписанных в цилиндр или конус или описанных около этих круглых тел (не менее 15 задач).

13. Верно ли утверждение, что при любом сочетании шара с призмой построение изображения всегда следует начинать с построения изображения шара, а затем около него описывать или в него вписывать изображение данной призмы?

Замечание: Построение изображения сочетаний шара с любыми пространственными телами всегда следует выполнять в ортогональной проекции.

14. Верно ли утверждение, что когда строится изображение прямой описанной призмы, то всегда нужно сначала около экваториального эллипса описать изображение многоугольника основания призмы?

15. Верно ли утверждение, что построение изображения наклонной призмы, описанной около шара, фактически сводится к построению изображения наклонной призмы, описанной около наклонного цилиндра, который в свою очередь описан около шара?

16. Записать последовательность действий при построении изображения:

(а) прямой призмы, вписанной в шар;

(б) прямой призмы, описанной около шара;

(в) наклонной призмы, описанной около шара.

17. Дана задача:

Найти отношение объёмов и поверхностей шара вписанного в куб и описанного около того же куба.

Требуется построить каноническую проекцию сечения данной комбинации геометрических тел плоскостью, проходящей через общий центр описанного и вписанного шаров. Построение обосновать!

18. Решить задачу аналогичную предыдущей, заменив в ней куб на треугольную призму.

19. Всякую ли пирамиду можно вписать в шар?

(Нет, только такую, около основания которой можно описать окружность).

20. Построить изображение:

– правильной четырёхугольной пирамиды, вписанной в шар;

– правильного тетраэдра, вписанного в шар;

– правильной шестиугольной усечённой пирамиды, вписанной в шар.

Построение обосновать. Записать последовательность действий при построении изображений в каждом случае.

21. Доказать теорему:

«В любую треугольную пирамиду можно вписать шар»,

Выполнив соответствующие построения с изображением необходимых биссекторных плоскостей трёхгранных углов.

22. Верны ли следующие утверждения:

– В любую правильную пирамиду можно вписать шар.

– В любую многоугольную пирамиду, у которой многогранный угол при вершине является правильным, можно вписать шар?

Ответ обосновать, выполнить соответствующие построения.

23. Построить изображение шаров: вписанного в правильный тетраэдр и описанного около этого тетраэдра.

24. Верно ли утверждение, что построение изображения сочетания любого тела с шаром всегда следует начинать с шара?

25. Составить подборку задач на построение многогранников, конуса, цилиндра и шара (не менее 15 задач).

26. Составить подборку задач на построение изображений комбинаций многогранников, конуса, цилиндра и шара (не менее 15 задач).

27. Составить подборку задач на комбинацию шаров с другими телами, для решения которых удобно выполнить каноническую проекцию сочетания данных геометрических тел (не менее 15 задач на вычисление или доказательство).

28. Построить изображение шаров: вписанного в данный октаэдр и описанного около этого октаэдра. Записать последовательность действий при выполнении построения.

29. Придумать задачи, требующие построения изображений комбинаций октаэдра с конусом и цилиндром.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: Справочное пособие. / Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

2. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. ср. шк. – М.: Просвещение, 1992.

3. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. ср. шк. – М.: Просвещение, 1989.

4. Эрдниев П.М., Эрдниев Б.П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986.

Исследовательские задачи в системе
углубленного изучения математики

Составитель: Петрова Елена Степановна

Редактор Е.А. Малютина

Подписано к печати 26.06.93
Формат 60 × 84/16 Объём 1,5 усл. п. л.
Тираж 300 экз. Заказ № 42

СГПИ им. К.А. Федина. 410071, Саратов, ул. Мичурина, 92