Голубь А. В., Корнев В. В., Халова В. А., Хромов А. П.

ВОПРОСЫ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Учебное пособие
для студентов механико-математического факультета
и аспирантов физико-математических специальностей

УДК 517.984(075.8)
ББК 22.162я73
В74

Голубь А. В., Корнев В. В., Халова В. А., Хромов А. П.
В74 Вопросы сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов : учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. и асп. физ.-мат. спец. – LULU Publishing. Inc., USA, 2014. – 60 с. : ил.
ISBN 978-1-312-22341-7

Учебное пособие посвящено исследованию сходимости разложений Фурье по собственным и присоединенным функциям интегральных операторов. Основное внимание уделено проблеме равносходимости этих разложений и соответствующих тригонометрических рядов Фурье. Проводится подробное доказательство теоремы равносходимости для случая одномерного возмущения оператора интегрирования методом Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра. Обсуждается вид интегральных операторов, для которых равносходимость имеет место. В последней главе, носящей обзорный характер, описываются дифференциальные, интегро-дифференциальные и интегральные уравнения, которые могут быть исследования методами данного пособия.

Для студентов механико-математического факультета, а также аспирантов, обучающихся по физико-математическим специальностям.

Рекомендуют к печати:
Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
Саратовского государственного университета
Доктор физико-математических наук профессор *С. И. Дудов*

УДК 517.984(075.8)
ББК 22.162я73

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-1-312-22341-7

Введение

Пусть A интегральный оператор

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt, \qquad x \in [0,1], \tag{0.1}$$

действующий для определенности в $L_2[0,1]$. Ядро $A(x,t)$ есть комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию Гильберта – Шмидта

$$\int_0^1 \int_0^1 |A(x,t)|^2\,dx\,dt < \infty. \tag{0.2}$$

В этом случае оператор A имеет дискретный спектр с единственной предельной точкой 0. Обозначим через $R_\lambda(A)$ резольвенту Фредгольма оператора A, т. е. $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$, где E — единичный оператор и λ — комплексный параметр. Пусть γ — простой замкнутый кусочно-гладкий контур, не проходящий через характеристические числа оператора A. Интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\lambda(A)\,d\lambda$$

носит название проектора Рисса, играющего большую роль в вопросах спектральной теории операторов. Он обладает тем замечательным свойством, что $-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\lambda(A)f\,d\lambda$ есть сумма членов ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A, соответствующим характеристическим значениям λ_n, попавшим внутрь γ. В частности,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r} R_\lambda(A)f\,d\lambda = S_r(f,x), \tag{0.3}$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным и присоединенным функциям оператора A, для тех λ_n, для которых

$|\lambda_n| < r$. Формула (0.3) дает нам нам широко распространенный метод исследования сходимости $S_r(f,x)$ при $r \to \infty$, носящий название метода расширяющихся контуров Коши – Пуанкаре. Успех применения данного метода достигается за счет получаемой информации о R_λ при больших $|\lambda|$ (асимптотики или оценок R_λ), а также структуры R_λ из-за специфических свойств оператора A.

Поскольку класс интегральных операторов (0.1) с условием (0.2) весьма обширен, то задача изучения $S_r(f,x)$ при больших r является очень трудной. Мы свое внимание сосредотачиваем на получении результатов типа теоремы равносходимости.

Теоремы равносходимости разложений по собственным функциям и с обычным тригонометрическим рядом Фурье впервые были установлены для оператора Штурма – Лиувилля в работах В. А. Стеклова [1] и А. Хаара [2] и дали начало крупному направлению исследований в спектральной теории дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных операторов, как самосопряженных, так и несамосопряженных, активно развиваемому и в настоящее время. Большой вклад в это направление внесен и отечественными математиками (Я. Д. Тамаркин, В. А. Марченко, Б. М. Левитан, М. А. Наймарк, В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, А. А. Шкаликов, А. П. Хромов и др.).

Основное внимание в настоящей работе уделяем случаю оператора:

$$Af = If + (f,v)g(x), \tag{0.4}$$

где $If = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ — оператор интегрирования, $(f,v) = \int\limits_0^1 f(t)v(t)\,dt$, $v(t)$, $g(x)$ — произвольные комплекснозначные функции.

Этот оператор замечателен тем, что добавочное слагаемое к оператору интегрирования является простейшим одномерным интегральным оператором и изучение его сильно упрощается. В то же время методы, применяемые здесь, содержат существенные черты методов, применяемых во многих других случаях.

Первая глава посвящена только оператору (0.4). Последующие главы показывают перспективу применения методов главы 1 в наиболее общих случаях и изложение в них носит обзорный характер.

1. Одномерное возмущение оператора интегрирования

1.1. Наводящие примеры

Пример 1. Рассмотрим оператор (0.1) для самого простого ядра $A(x,t) \equiv 1$. В этом случае задача на собственные значения имеет вид

$$y(x) = \lambda \int_0^1 y(t)\,dt. \tag{1.1}$$

Исследуем (1.1). Дифференцируя (1.1), получим

$$y'(x) = 0. \tag{1.2}$$

Значит, $y(x) = c$ — константа. Подставляя (1.2) в (1.1) получим

$$c(1-\lambda) = 0.$$

Отсюда следует, что ненулевое собственное значение только одно — $\lambda = 1$. Соответствующая собственная функция $y(x) \equiv 1$. Таким образом, в этом самом простом случае вопрос о разложении по собственным функциям не встает.

Пример 2. Пусть

$$Af = \int_0^x f(t)\,dt. \tag{1.3}$$

В этом случае $y = \lambda A y$ есть

$$y(x) = \lambda \int_0^x y(t)\,dt. \tag{1.4}$$

Отсюда

$$y'(x) = \lambda y(x), \tag{1.5}$$

$$y(0) = 0. \tag{1.6}$$

Из (1.5) имеем $y(x) = ce^{\lambda x}$. В силу (1.6) получаем $c = 0$, т. е. оператор A не имеет собственных значений.

Пример 3. Возьмем в качестве оператора A:

$$Af = \int\limits_0^x f(t)\,dt - \int\limits_0^1 f(t)\,dt, \tag{1.7}$$

т. е. разность операторов из примеров 1 и 2. Так как в этом случае $Af = -\int\limits_x^1 f(t)\,dt$, то вопрос, фактически, сводится к случаю примера 2, т. е. нет собственных значений.

Пример 4. Пусть

$$Af = \int\limits_0^x f(t)\,dt + \int\limits_0^1 f(t)\,dt, \tag{1.8}$$

т. е. теперь оператор A есть сумма операторов из примеров 1 и 2.

Пусть $y(x) = \lambda Ay(x)$, т. е.

$$y(x) = \lambda\left[\int\limits_0^x y(t)\,dt + \int\limits_0^1 y(t)\,dt\right]. \tag{1.9}$$

Дифференцируя (1.9), придем к

$$y'(x) = \lambda y(x). \tag{1.10}$$

Беря в (1.9) $x = 0$ и $x = 1$, получим

$$y(1) = 2y(0). \tag{1.11}$$

Общее решение (1.10) есть $y(x) = ce^{\lambda x}$. Подставив это в (1.11), получим $ce^{\lambda} = 2c$. Отсюда уравнение для собственных значений есть $e^{\lambda} = 2$. Таким образом, оператор A теперь имеет бесчисленное множество собственных значений

$$\lambda_n = 2n\pi i + \ln 2 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Соответствующие собственные функции есть

$$y_n(x) = e^{\lambda_n x} = e^{2n\pi i x} 2^x \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Таким образом, получили бесчисленное множество собственных значений и собственных функций.

1.2. Задача обращения

Пример 4 как раз и приводит к изучению оператора (0.4). Но теперь это уже не такое простое дело. То, что в примере 4 собственные функции есть функции тригонометрической системы, умноженные не одну и ту же функцию, наводит на мысль получить для оператора A теоремы равносходимости по собственным и присоединенным функциям и по обычной тригонометрической системе. Теперь, правда, трудно найти собственные значения и собственные функции. Но для изучения сходимости разложений по собственным функциям, как показывает формула (0.3), их знать и не обязательно. Главное, это изучить резольвенту $R_\lambda(A)$ при больших $|\lambda|$. В примерах § 1.1 есть и зачатки метода изучения $R_\lambda(A)$, особенно в примере 4. Чтобы решить вопрос о собственных значениях и собственных функциях мы сделали переход от оператора A к оператору A^{-1}, который в примере 4 есть

$$A^{-1}y = y'(x), \qquad y(1) = 2y(0).$$

В целях упрощения выкладок нам удобно взять

$$g(x) = -1 + \int_0^x \varphi(t)\, dt,$$

$$v(t) = \gamma\psi(t).$$

Теорема 1.1. *Если* $1+(\varphi,\psi)\neq 0$, $\gamma=-\dfrac{1}{1+(\varphi,\psi)}$, $\psi(0)=0$, $\psi(1)=1$, $\psi(t)\in C^1[0,1]$, $\varphi(x)\in C[0,1]$, *то* A^{-1} *существует и*

$$A^{-1}y=y'(x)+\varphi(x)(y',\psi), \tag{1.12}$$

$$y(0)-y(1)+(y,\psi')=0. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть $Af=0$. Тогда

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt+g(x)(f,v)=0. \tag{1.14}$$

При $x=0$ отсюда $g(0)(f,v)=0$. Но $g(0)=-1$. Тогда $(f,v)=0$. Поэтому (1.14) переходит в $\int\limits_0^x f(t)\,dt=0$. Отсюда $f(x)\equiv 0$, т. е. A^{-1} существует. Найдем A^{-1}. Если $y=Af$, то

$$y(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt+g(x)(f,v). \tag{1.15}$$

Отсюда

$$y(0)=-(f,v). \tag{1.16}$$

Дифференцируем (1.15)

$$y'(x)=f(x)+\varphi(x)(f,v). \tag{1.17}$$

Отсюда

$$(y'(x),v)=(f,v)+(\varphi,v)(f,v),$$

но $1+(\varphi,v)=1+\gamma(\varphi,\psi)=\dfrac{1}{1+(\varphi,\psi)}$. Поэтому

$$f(x)=y'(x)-\varphi(x)(f,v)=y'(x)-\varphi(x)\frac{(y',v)}{1+(\varphi,v)}=$$

$$=y'(x)-\varphi(x)\frac{\gamma(y',\psi)}{1+(\varphi,v)}=y'(x)-\varphi(x)(1+(\varphi,\psi)(y',\psi)=$$

$$=y'(x)+\varphi(x)(y',\psi).$$

Значит,

$$A^{-1}y = y'(x) + \varphi(x)(y', \psi). \tag{1.18}$$

Далее, из (1.16) получаем

$$y(0) = -(f, v) = -(y' + \varphi(x)(y', \psi), v) = -(y', v) - (\varphi, v)(y', \psi) =$$
$$= -(\gamma + (\varphi, v))(y', \psi) = (y', \psi).$$

Отсюда

$$y(0) - y(1) + (y, \psi') = 0. \tag{1.19}$$

Теорема доказана. □

В дальнейшем будем пользоваться лишь теоремой 1.1.

Дадим полное решение задачи об обращении оператора A.

Теорема 1.2. *Оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда*

$$|g(0)| + |1 + (g, v)| > 0. \tag{1.20}$$

Доказательство. Пусть A^{-1} не существует, т. е. существует $y(x) \neq 0$, что $Ay = 0$, или

$$\int_0^x y(t)\,dt + g(x)(y, v) = 0. \tag{1.21}$$

Отсюда

$$g(0)(y, v) = 0. \tag{1.22}$$

Если $g(0) \neq 0$, то $(y, v) = 0$, и поэтому из (1.21) получаем $\int_0^x y(t)\,dt = 0$. Отсюда $y \equiv 0$. Значит, $g(0) = 0$. Далее, из (1.21) имеем

$$y(x) + g'(x)(y, v) = 0. \tag{1.23}$$

Отсюда

$$(1 + (g'(x), v))(y, v) = 0. \tag{1.24}$$

Если $1 + (g'(x), v) \neq 0$, то из (1.24) $(y, v) = 0$, а отсюда приведенными выше рассмотрениями получаем $y(x) \equiv 0$, т. е. если A^{-1} не существует, то

$$|g(0)| + |1 + (g', v)| = 0.$$

Обратно, пусть $g(0) = 1 + (g', v) = 0$. Если $Ay = 0$, т. е. $\int\limits_0^x y(t)\,dt + g(x)(y, v) = 0$, то

$$y(x) + g'(x)(y, v) = 0. \tag{1.25}$$

Функция $g'(x)$ отлична от тождественного нуля, так как в противном случае $g(0) = 1$. Значит из (1.25) $y(x) = cg'(x)$. Тогда

$$Ay = c\,Ag'(x) = c\Big[\int\limits_0^x g'(t)\,dt + g(x)(g', v)\Big] = c[1 + (g', v)]g(x) = 0,$$

т. е. A^{-1} не существует. Теорема доказана. □

1.3. Формула для резольвенты

В этом параграфе получим явную формулу для резольвенты Фредгольма $R_\lambda(A) = (E - \lambda A)^{-1}A$ оператора A, где A есть оператор (0.4). Исходя из вида (1.12), (1.13) оператора A^{-1} введем следующие операторы:

$$L_0: \quad L_0 y = y'(x), \quad y(0) - y(1) = 0, \tag{1.26}$$

$$L_1: \quad L_1 y = y'(x), \quad V(y) = y(0) - y(1) + (y, \psi') = 0, \tag{1.27}$$

$$L: \quad Ly = y'(x) + \varphi(x)(y', \psi), \quad V(y) = 0. \tag{1.28}$$

Таким образом, $L = A^{-1}$, а операторы L_1 и L_0 более простые, чем L, и мы покажем, как $R_\lambda = R_\lambda(A)$ выражается через $R^0_\lambda = (L_0 - \lambda E)^{-1}$, $R^1_\lambda = (L_1 - \lambda E)^{-1}$. Отметим, что очевидно $R_\lambda = R_\lambda(A) = (L - \lambda E)^{-1}$.

Лемма 1.1. *Если $\Delta_0(-\lambda) = 1 - e^\lambda \neq 0$, то R^0_λ существует и имеет вид*

$$R^0_\lambda f = \int\limits_0^1 G_0(x, t, \lambda) f(t)\,dt, \tag{1.29}$$

где функция Грина $G_0(x,t,\lambda)$ имеет вид

$$G_0(x,t,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta_0(-\lambda)}\, e^{\lambda(x-t)}, & t \le x, \\ \frac{1}{\Delta_0(-\lambda)}\, e^{\lambda(1+x-t)}, & t > x. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $y = R_\lambda^0 f$. Тогда

$$y' - \lambda y = f, \tag{1.30}$$

$$U(y) = y(0) - y(1) = 0. \tag{1.31}$$

Общее решение однородного уравнения есть $y = ce^{\lambda x}$. Частное решение неоднородного уравнения есть

$$z(x) = \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\, dt$$

(проверить это дифференцированием). Поэтому

$$y = ce^{\lambda x} + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\, dt. \tag{1.32}$$

Из (1.31) находим c:

$$c = \frac{1}{\Delta_0(-\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)\, dt.$$

Поэтому получаем

$$y = R_\lambda^0 f = \frac{e^{\lambda x}}{\Delta_0(-\lambda)} \int\limits_0^1 e^{\lambda(1-t)} f(t)\, dt + \int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{e^{\lambda x}}{\Delta_0(-\lambda)} \left(\int\limits_0^x e^{-\lambda t} f(t)\, dt + e^{\lambda} \int\limits_x^1 e^{-\lambda t} f(t)\, dt \right).$$

То, что правая часть (1.29) есть резольвента проверяется тривиально.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.2. *Если* $\Delta_0(-\lambda) \neq 0$, $V(e^{\lambda x}) \neq 0$, *то* R^1_λ *существует и имеет вид*

$$R^1_\lambda = R^0_\lambda + Q_\lambda f, \tag{1.33}$$

где $Q_\lambda f = -\dfrac{(R^0_\lambda f, \psi')}{V(e^{\lambda x})}\, e^{\lambda x}$.

Доказательство. Пусть $y = R^1_\lambda f$. Тогда $y - \lambda y = f$, $V(y) = 0$. Значит, $y = ce^{\lambda x} + R^0_\lambda f$. Находим c из граничного условия $V(y) = 0$, т. е.

$$V(y) = 0 = cV(e^{\lambda x}) + V(R^0_\lambda f) = cV(e^{\lambda x}) + U(R^0_\lambda f) + (R^0_\lambda f, \psi') = \\ = cV(e^{\lambda x}) + (R^0_\lambda f, \psi').$$

Отсюда получаем утверждение леммы. □

Следствие 1.1. *Имеет место формула*

$$R^1_\lambda f = \int\limits_0^1 G_1(x, t, \lambda) f(t)\, dt, \tag{1.34}$$

где

$$G_1(x, t, \lambda) = G_0(x, t, \lambda) - \frac{e^{\lambda x}}{V(e^{\lambda x})} \int\limits_0^1 G_0(\xi, t, \lambda)\psi'(\xi)\, d\xi.$$

Лемма 1.3. *Если* $\Delta_0(-\lambda) \neq 0$, $V(e^{\lambda x}) \neq 0$ *и* $y = R_\lambda f$, *то*

$$y(x) = R^1_\lambda f - y(1) R^1_\lambda \varphi(x) + (y, \psi') R^1_\lambda \varphi(x). \tag{1.35}$$

Доказательство. Если $y = R_\lambda f = (L - \lambda E)^{-1} f$, то $Ly - \lambda y = f$, или

$$y' + \varphi(x)(y', \psi) - \lambda y = f, \tag{1.36}$$

$$V(y) = 0. \tag{1.37}$$

Из (1.36), (1.37) получаем

$$y' - \lambda y = f - \varphi(x)(y', \psi), \tag{1.38}$$

$$V(y) = 0. \tag{1.39}$$

Из (1.38), (1.39) получаем

$$y = R_\lambda^1(f - \varphi(x))(y', \psi)) = R_\lambda^1 f - (y', \psi) R_\lambda^1 \varphi(x).$$

Но

$$(y', \psi) = \int_0^1 y'(x)\psi(x)\,dx = y\psi|_0^1 - \int_0^1 y(x)\psi'(x)\,dx = y(1) - (y, \psi').$$

Поэтому

$$y(x) = R_\lambda^1 f - y(1) R_\lambda^1 \varphi(x) + (y, \psi') R_\lambda^1 \varphi(x).$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 1.3. *Если $\Delta_0(-\lambda) \neq 0$, $V(e^{\lambda x}) \neq 0$, $d_0(\lambda) \neq 0$, то R_λ существует и имеет вид*

$$R_\lambda f = R_\lambda^1 f + d(f) R_\lambda^1 \varphi(x), \tag{1.40}$$

где $d(f) = -\dfrac{d_1}{d_0} + \dfrac{d_2}{d_0}$, $d_0 = d_0(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^0 & \alpha_{12}^0 \\ \alpha_{21}^0 & \alpha_{22}^0 \end{vmatrix}$, $d_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^0 \end{vmatrix}$, $d_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^0 & \alpha_{11}^1 \\ \alpha_{21}^0 & \alpha_{21}^1 \end{vmatrix}$, $\alpha_{11}^0 = 1 + R_\lambda^1 \varphi|_{x=1}$, $\alpha_{12}^0 = -R_\lambda^1 \varphi|_{x=1}$, $\alpha_{21}^0 = (R_\lambda^1 \varphi, \psi')$, $\alpha_{22}^0 = 1 - (R_\lambda^1 \varphi, \psi')$, $\alpha_{11}^1 = R_\lambda^1 f|_{x=1}$, $\alpha_{21}^1 = (R_\lambda^1 f, \psi')$.

Доказательство. Имеем

$$y(x) = R_\lambda^1 f - y(1) R_\lambda^1 \varphi(x) + (y, \psi') R_\lambda^1 \varphi(x). \tag{1.41}$$

Отсюда при $x = 1$, получаем:

$$y(1) = R_\lambda^1 f|_{x=1} - y(1) R_\lambda^1 \varphi(x)|_{x=1} + (y, \psi') R_\lambda^1 \varphi(x)|_{x=1}. \tag{1.42}$$

Далее, из (1.41) имеем

$$(y, \psi') = (R_\lambda^1 f, \psi') - y(1)(R_\lambda^1 \varphi, \psi') + (y, \psi')(R_\lambda^1 \varphi, \psi'). \tag{1.43}$$

На (1.42) и (1.43) смотрим как на систему уравнений относительно $y(1)$ и (y, ψ'). Эту систему можно записать так

$$\begin{cases} \alpha_{11}^0 y(1) + \alpha_{12}^0 (y, \psi') = \alpha_{11}^1, \\ \alpha_{21}^0 y(1) + \alpha_{22}^0 (y, \psi') = \alpha_{21}^1. \end{cases}$$

Отсюда по формулам Крамера получаем

$$y(1) = \frac{d_1}{d_0}, \quad (y, \psi') = \frac{d_2}{d_0}. \tag{1.44}$$

Подставляя (1.44) в (1.41) получим (1.40).

Теорема доказана. □

1.4. Поведение резольвенты R_λ при больших $|\lambda|$

Рассмотрим сначала R_λ^0. Сделаем одно замечание о L_0. Собственные значения и собственные функции оператора L_0 определяются из краевой задачи:

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = y(1). \tag{1.45}$$

Отсюда видно, что собственные значения оператора L_0 есть $\lambda_n^0 = 2\pi n i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), а собственные функции — $e^{2\pi n i x}$, т. е. обычная тригонометрическая система. Оператор L_0 не обратим, а вот оператор $L_0 - \alpha E$, где $\alpha \neq \lambda_n^0$, обратим, и его обратным будет R_α^0, т. е. интегральный оператор. Назовем его A_0, т. е. $A_0 = R_\alpha^0$. Тогда

$$(E - \lambda A_0)^{-1} A_0 = (A_0^{-1} - \lambda E)^{-1} = (L_0 - \alpha E - \lambda E)^{-1} = R_{\lambda+\alpha}^0,$$

т. е. A_0 — интегральный оператор, характеристические числа которого есть $2n\pi i + \alpha$, а собственными функциями — тригонометрическая система, и его резольвента $R_\lambda(A_0)$ есть $R_{\lambda+\alpha}^0$.

Положим $\lambda = -\rho$ и будем считать в дальнейшем для определенности, что $\operatorname{Re}\rho \leq 0$. Случай $\operatorname{Re}\rho \geq 0$ рассматривается аналогично. Переход от λ

к ρ в нашем случае делается лишь для того, чтобы согласовать наши дальнейшие рассуждения с хорошо известными рассуждениями в теории дифференциальных операторов. Так в случае оператора Штурма – Лиувилля надо брать $\lambda = -\rho^2$. Это уже более осмысленный переход от λ к ρ по сравнению с нашим.

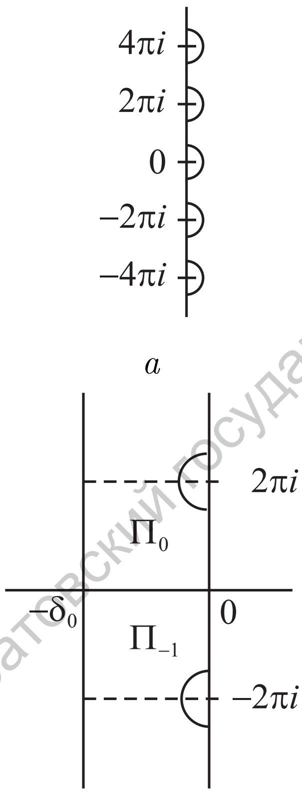
Теорема 1.4. *Обозначим*

$$S_\delta = \Big\{\rho|\operatorname{Re}\rho \le 0,\ \rho \notin \bigcup_k (\rho|\,|\rho - 2k\pi i| \le \delta)\Big\}, \quad 0 < \delta < 2\pi.$$

Тогда в S_δ *справедлива оценка:*

$$|\Delta_0(\rho)| \ge |1 - e^{-\rho}| \ge c|e^{-\rho}|.$$

(Одним и тем же c обозначаем различные положительные постоянные,встречающиеся в оценках.)



б

Рис. 1

Доказательство. Имеем

$$|\Delta_0(\rho)| = |1 - e^{-\rho}| = |e^{-\rho}||1 - e^{\rho}| \ge$$
$$\ge |e^{-\rho}|(1 - |e^{\rho}|) \ge |e^{-\rho}|(1 - e^{\operatorname{Re}\rho}).$$

Если $\operatorname{Re}\rho \le -\delta_1$, то отсюда

$$|\Delta_0(\rho)| \ge (1 - e^{-\delta_1})|e^{-\rho}|.$$

Пусть теперь $-\delta_1 \le \operatorname{Re}\rho \le 0$. Имеем

$$\Delta_0(\rho) = 1 - e^{-\rho} = 1 - e^{-\rho + 2k\pi i} = \Delta_0(\rho - 2k\pi i),$$

т. е. $\Delta_0(\rho)$ — периодическая функция.

Отсюда $\inf|\Delta_0(\rho)| = c_2(\delta) > 0$ в полосе с удаленными кружками (рис. 1).

Лемма доказана. □

Лемма 1.4. *В области S_δ справедливы оценки:*

$$|G_0(x,t,\lambda)| \le \begin{cases} c|e^{\rho(t-x+1)}|, & t \le x, \\ c|e^{\rho(t-x)}|, & t > x. \end{cases}$$

Доказательство следует из лемм 1.1 и 1.4.

Следствие 1.2. *В области S_δ справедлива оценка:*

$$G_0(x,t,\lambda) = O(1),$$

равномерная по всем x, t из $[0,1]$.

Займемся теперь резольвентой R^1_λ оператора L_1. Докажем сначала следующую лемму общего характера.

Лемма 1.5. *Если $f(\xi,\tau)$ непрерывна по ξ, τ из $[0,1]$, то*

$$\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} f(\xi,\tau)\,d\xi = o(e^{z\gamma_1}) + o(e^{z\gamma_2})$$

при $|z| \to \infty$ равномерно по τ. Здесь $\gamma_1, \gamma_2 \in [0,1]$.

Доказательство. Положим

$$\tilde f(\xi,\tau) = \begin{cases} f(\gamma_1,\tau), & \xi < \gamma_1, \\ f(\xi,\tau), & \gamma_1 \le \xi \le \gamma_2, \\ f(\gamma_2,\tau), & \xi > \gamma_2, \end{cases}$$

и введем в рассмотрение функцию Стеклова:

$$\tilde f_h(\xi,\tau) = \frac{1}{2h}\int\limits_{\xi-h}^{\xi+h} \tilde f(\xi_1,\tau)\,d\xi_1.$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} f(\xi,\tau)\,d\xi = \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} \tilde f(\xi,\tau)\,d\xi = \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi}[\tilde f_h(\xi,\tau) + (\tilde f(\xi,\tau) - \tilde f_h(\xi,\tau)]\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} \tilde{f}_h(\xi,\tau)\,d\xi + \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} [\tilde{f}(\xi,\tau) - \tilde{f}_h(\xi,\tau)]\,d\xi = I_1 + I_2. \qquad (1.46)$$

Далее

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} \tilde{f}_h(\xi,\tau)\,d\xi = \frac{e^{z\xi}}{z} \tilde{f}_h(\xi,\tau)\Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} - \frac{1}{z} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} (\tilde{f}_h(\xi,\tau))_\xi\,d\xi =$$

$$= \frac{e^{z\xi}}{z} \tilde{f}_h(\xi,\tau)\Big|_{\gamma_1}^{\gamma_2} - \frac{1}{2hz} \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} [\tilde{f}_h(\xi+h,\tau) - \tilde{f}_h(\xi-h,\tau)]\,d\xi.$$

Отсюда

$$I_1 = O_h\left(\frac{1}{|z|}|e^{z\gamma_1}| + |e^{z\gamma_1}|\right), \qquad (1.47)$$

где O_h — означает, что оценочная константа зависит от h.

Рассмотрим теперь I_2. Имеем

$$\tilde{f}(\xi,\tau) - \tilde{f}_h(\xi,\tau) = \tilde{f}(\xi,\tau) - \frac{1}{2h} \int\limits_{\xi-h}^{\xi+h} \tilde{f}(\xi_1,\tau)\,d\xi_1 = \frac{1}{2h} \int\limits_{\xi-h}^{\xi+h} [\tilde{f}(\xi,\tau) - \tilde{f}(\xi_1,\tau)]\,d\xi_1.$$

Задаем $\varepsilon > 0$. Тогда существует $h(\varepsilon)$, что $|\tilde{f}(\xi,\tau) - \tilde{f}_h(\xi,\tau)| \le \varepsilon$, если $|\xi - \xi_1| \le h(\varepsilon)$. Поэтому при таком $h(\varepsilon)$ получаем оценку:

$$|I_2| \le \varepsilon(|e^{z\gamma_1}| + |e^{z\gamma_2}|). \qquad (1.48)$$

В целом рассуждаем таким образом. Берем $\varepsilon > 0$ и выбираем $h(\varepsilon)$ так, чтобы выполнялось (1.48). Фиксируем теперь такое $h(\varepsilon)$ и подбираем $z_0(\varepsilon)$ так, чтобы

$$|I_1| \le \varepsilon(|e^{z\gamma_1}| + |e^{z\gamma_2}|) \quad \text{при} \quad |z| > z_0(\varepsilon). \qquad (1.49)$$

Это возможно из (1.47). В целом при $|z| \ge z_0(\varepsilon)$

$$\left| \int\limits_{\gamma_1}^{\gamma_2} e^{z\xi} f(\xi,\tau)\,d\xi \right| \le \varepsilon(|e^{z\gamma_1}| + |e^{z\gamma_2}|) \quad \text{при} \quad |z| \ge z_0(\varepsilon).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.6. *В области S_δ при больших значениях $|\rho|$ имеет место оценка:*

$$G_1(x,t,\lambda) = O(1),$$

равномерная по x и t.

Доказательство. Из $R^1_\lambda f = R^0_\lambda f - \dfrac{(R^0_\lambda f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda x}$ имеем

$$G_1(x,t,\lambda) = G_0(x,t,\lambda) - \frac{e^{\lambda x}}{V(e^{\lambda x})} \int\limits_0^1 G_0(\xi,t,\lambda)\psi'(\xi)\,d\xi. \qquad (1.50)$$

Поэтому по следствию леммы 1.4 получаем

$$G_1(x,t,\lambda) = O(1) + O\left(\left|\frac{e^{\lambda x}}{V(e^{\lambda x})}\right|\right).$$

Далее, имеем

$$V(e^{\lambda x}) = 1 - e^\lambda + \int\limits_0^1 e^{\lambda x}\psi'(x)\,dx = 1 - e^\lambda + o(|e^\lambda|) + o(1) = 1 - e^\lambda + o(|e^\lambda|)$$

(потому, что $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$). Значит,

$$\left|V(e^{\lambda x})\right| \geq |e^\lambda|(|1 - e^{-\lambda}| - o(1)) \geq c|e^\lambda|.$$

Поэтому

$$\frac{e^{\lambda x}}{V(e^{\lambda x})} = O(1).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.7. *Если $\varphi(x)$ — функция ограниченной вариации на $[0,1]$, то*

$$\|R^1_\lambda \varphi\|_\infty = O(1/\lambda)$$

в S_δ равномерно по x ($\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L_\infty[0,1]$).

Доказательство. Имеем

$$R_\lambda^1\varphi(x) = \int\limits_0^1 G_1(x,t,\lambda)\varphi(t)\,dt =$$

$$= \varphi(\xi)\int\limits_0^\xi G_1(x,t,\lambda)\,dt\Big|_0^1 - \int\limits_0^1\int\limits_0^\xi G_1(x,t,\lambda)\,dt\,d\varphi(\xi) =$$

$$= \varphi(1)\int\limits_0^1 G_1(x,t,\lambda)\,dt - \int\limits_0^1\int\limits_0^\xi G_1(x,t,\lambda)\,dt\,d\varphi(\xi).$$

Отсюда

$$\|R_\lambda^1\varphi(x)\|_\infty = O\left(\Big\|\int\limits_0^1 G_1(x,t,\lambda)\,dt\Big\|_\infty\right) + O\left(\Big\|\int\limits_0^1\int\limits_0^\xi G_1(x,t,\lambda)\,dt\,d\varphi(\xi)\Big\|_\infty\right).$$

Имеем

$$\int\limits_0^1 G_0(x,t,\lambda)\,dt = \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\int\limits_0^x e^{\rho(t-x)}\,dt + \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\int\limits_x^1 e^{\rho(t-x-1)}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\,\frac{1}{\rho}e^{\rho(t-x)}\Big|_0^x + \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\,\frac{1}{\rho}e^{\rho(t-x-1)}\Big|_x^1 = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$(|\Delta_0(\rho)| \geq c|e^{-\rho}|)$.

Аналогично,

$$\int\limits_0^\xi G_0(x,t,\lambda)\,dt = O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad \int\limits_0^\xi G_0(x,t,\lambda)\,dx = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\xi G_1(x,t,\lambda)\,dt = \int\limits_0^\xi G_0(x,t,\lambda)\,dt - \frac{e^{\lambda x}}{V(e^{\lambda x})}\int\limits_0^1 \psi'(\xi)\,d\xi\int\limits_0^\xi G_0(\xi,t,\lambda)\,dt = O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

И окончательно получаем

$$\|R_\lambda^1\varphi\|_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right) = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.8. *Если* $f(x) \in L_p[0,1]$ $(1 < p \le \infty)$, *то в* S_δ *при больших* $|\rho|$

$$\|R^1_\lambda f\|_\infty = O(\varkappa_q(\rho)\|f\|_p)$$

где $\varkappa_q(\rho) = \dfrac{1}{|Re\,\rho|^{1/q}}(1-|e^{q\rho}|)^{1/q}$, $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{p}=1$.

Доказательство. Имеем

$$|R^1_\lambda f| = \left|\int\limits_0^1 G_1(x,t,\lambda)f(t)\,dt\right| \le \int\limits_0^1 |G_1(x,t,\lambda)||f(t)|\,dt \le$$

$$\le \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_0^1 |G_1(x,t,\lambda)|^q\,dt\right)^{1/q} = \|f\|_p\left(\int\limits_0^1 |G_1(x,t,\lambda)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Далее

$$|G_1(x,t,\lambda)|^q = \left|G_0(x,t,\lambda) - \frac{e^{-\rho x}}{V(e^{-\rho x})}\int\limits_0^1 \psi'(\tau)G_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau\right|^q \le$$

$$\le 2^q\left(|G_0^q(x,t,\lambda)| + c^q\left|\int\limits_0^1 \psi'(\tau)G_0(\tau,t,\lambda)\,d\tau\right|^q\right) \le$$

$$\le 2^q\left(|G_0^q(x,t,\lambda)| + c^q c_1^q\int\limits_0^1 |G_0(\tau,t,\lambda)|^q\,d\tau\right).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_0^1 |G_1^q(\tau,t,\lambda)|\,d\tau = O\left(\int\limits_0^1 |G_0^q(x,t,\lambda)|\,dt + \int\limits_0^1\int\limits_0^1 |G_0^q(\tau,t,\lambda)|\,d\tau\,dt\right). \quad (1.51)$$

Далее,

$$\int\limits_0^1 |G_0(x,t,\lambda)|^q\,dt = \int\limits_0^x + \int\limits_x^1 = \int\limits_0^x \frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q}|e^{\rho(t-x)q}|\,dt +$$

$$+\frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q}\int\limits_x^1 \frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q}|e^{\rho q(t-x-1)}|\,dt =$$

$$= \frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q} \left(\int\limits_0^x e^{q(t-x)\mathrm{Re}\,\rho}\, dt + \int\limits_x^1 e^{q(t-x-1)\mathrm{Re}\,\rho}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q} \left(\frac{1}{q\mathrm{Re}\,\rho} e^{-qx\mathrm{Re}\,\rho} e^{qt\mathrm{Re}\,\rho}\Big|_0^x + \frac{1}{q\mathrm{Re}\,\rho} e^{-q(x+1)\mathrm{Re}\,\rho} e^{qt\mathrm{Re}\,\rho}\Big|_x^1 \right) =$$

$$= \frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q |q\mathrm{Re}\,\rho|} \left(1 - e^{-qx\mathrm{Re}\,\rho} + e^{-qx\mathrm{Re}\,\rho} - e^{-q\mathrm{Re}\,\rho}\right) =$$

$$= \frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q q\mathrm{Re}\,\rho} (1 - e^{-q\mathrm{Re}\,\rho}) = O(\varkappa_q^q(\rho)).$$

Аналогично оценивается и интеграл $\int\limits_0^1 |G_0^q(\tau, t, \lambda)|\, d\tau$:

$$\int\limits_0^1 |G_0^q(\tau, t, \lambda)|\, d\tau = O\left(\frac{1}{|\Delta_0(\rho)|^q q\mathrm{Re}\,\rho} \right) (1 - e^{-q\mathrm{Re}\,\rho}) = O(\varkappa_q^q(\rho)).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.9. *В области S_δ при больших $|\rho|$ справедливы оценки:*

$$\alpha_{jj}^0 = 1 + o(1), \quad \alpha_{ij} = o(1), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \tag{1.52}$$

$$\alpha_{jj}^0 = 1 + O(\varkappa_1(\rho)), \quad \alpha_{ij} = O(\varkappa_1(\rho)), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \tag{1.53}$$

Доказательство. Имеем

$$\alpha_{11}^0 = 1 + R_\lambda^1 \varphi|_{x=1}.$$

Но

$$R_\lambda^1 \varphi|_{x=1} = R_\lambda^0 \varphi|_{x=1} - \frac{(R_\lambda^0 \varphi, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^\lambda. \tag{1.54}$$

Имеем

$$R_\lambda^0 \varphi|_{x=1} = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} \int\limits_0^1 e^{\rho(t-1)} \varphi(t)\, dt.$$

Так как

$$\int\limits_0^1 e^{\rho t} \varphi(t)\, dt = o(1) + o(e^\rho)$$

для непрерывной $\varphi(x)$, то

$$R_\lambda^0\varphi|_{x=1} = \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\int\limits_0^1 e^{\rho(t-1)}\varphi(t)\,dt = o(1) + o(e^\rho) = o(1), \tag{1.55}$$

поскольку $\operatorname{Re}\rho \leq 0$. Далее,

$$R_\lambda^0\varphi = \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\int\limits_0^x e^{\rho(t-x)}\varphi(t)\,dt + \frac{1}{\Delta_0(\rho)}\int\limits_x^1 e^{\rho(t-x-1)}\varphi(t)\,dt =$$

$$= O\left(\frac{1}{|e^{-\rho}|}|e^{-\rho x}|(o(1)+o(e^{\rho x}))\right) + O\left(\frac{1}{|e^{-\rho}|}|e^{-\rho(x+1)}|(o(e^{\rho x})+o(1))\right) = o(1).$$

Так как $\dfrac{e^\lambda}{V(e^{\lambda x})} = O(1)$, то $R_\lambda^1\varphi|_{x=1} = o(1)$. Значит, $\alpha_{11}^0 = 1 + o(1)$. Теперь имеем

$$\left|\int\limits_0^x e^{\rho t}\varphi(t)\,dt\right| \leq C\int\limits_0^x |e^{\rho t}|\,dt = C\frac{1}{\operatorname{Re}\rho}(|e^{x\rho}|-1),$$

$$\left|\int\limits_x^1 e^{\rho t}\varphi(t)\,dt\right| \leq C\frac{1}{\operatorname{Re}\rho}(|e^\rho| - |e^{x\rho}|).$$

Поэтому

$$R_\lambda^1\varphi(x) = O\left(\frac{1}{|e^{-\rho}|}|e^{-\rho x}|\int\limits_0^x |e^{\rho t}||\varphi(t)|\,dt\right) +$$

$$+O\left(\frac{1}{|e^{-\rho}|}|e^{-\rho(x+1)}|\int\limits_x^1 |e^{\rho t}||\varphi(t)|\,dt\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{|e^{-\rho}|}|e^{-\rho x}|\frac{1}{\operatorname{Re}\rho}(|e^{x\rho}|-1)\right) + O\left(\frac{1}{|e^{-\rho}|}|e^{-\rho(x+1)}|\frac{1}{\operatorname{Re}\rho}(|e^\rho|-|e^{\rho x}|)\right) =$$

$$= O(\varkappa_1(\rho)).$$

Получим, таким образом, следующую оценку:

$$R_\lambda^1\varphi(x)|_{x=1} = O(\varkappa_1(\rho)).$$

Отсюда
$$\alpha_{11}^0 = 1 + o(\varkappa_1(\rho)).$$
Далее,
$$\alpha_{12}^0 = -R_\lambda^1\varphi|_{x=1} = o(1), \quad \alpha_{12}^0 = O(\varkappa_1(\rho)).$$
Точно так же получаем
$$\alpha_{21}^0 = (R_\lambda^1\varphi, \psi') = \begin{cases} o(1), \\ O(\varkappa_1(\rho)), \end{cases}$$
$$\alpha_{22}^0 = 1 - (R_\lambda^1\varphi, \psi') = 1 + o(1),$$
$$\alpha_{22}^0 = 1 + O(\varkappa_1(\rho)).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.10. *В области S_δ при больших $|\rho|$ справедлива асимптотическая формула:*
$$R_\lambda^1 f = R_\lambda^0 f + O(\tilde{\varkappa}_1(\rho)\|f\|_1),$$
равномерная по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Здесь $\tilde{\varkappa}_1(\rho) = \varkappa_1(\rho)|e^{\rho\varepsilon}|$, $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_1[0,1]$.

Доказательство. Имеем
$$R_\lambda^1 f = R_\lambda^0 f - \frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda x}.$$
Имеем при $\varphi \in L_\infty[0,1]$
$$|R_\lambda^0\varphi| \le \int_0^1 |G_0(x,t,\lambda)|\varphi(t)\,dt \le \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |G_0(x,t,\lambda)|\,dt =$$
$$= O(\varkappa_1(\rho))\|\varphi\|_\infty = O(\varkappa_1(\rho)).$$
Аналогично
$$\int_0^1 G_0(x,t,\lambda)\varphi(x)\,dx = O(\varkappa_1(\rho)).$$

Поэтому
$$(R_\lambda^0 f, \psi') = \int\limits_0^1 f(t)\,dt \int\limits_0^1 G_0(x,t,\lambda)\psi'(x)\,dx = O(\varkappa_1(\rho)\|f\|_1).$$
Далее, при $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ имеем
$$\frac{e^{\lambda x}}{V(e^{\lambda x})} = O\left(\frac{e^{-\rho x}}{e^{-\rho}}\right) = O(e^{\rho(1-x)}) = O(e^{\rho\varepsilon}).$$
Поэтому
$$\frac{(R_\lambda^0 f, \psi')e^{\lambda x}}{V(e^{\lambda x})} = O(\varkappa_1(\rho)e^{\rho\varepsilon}\|f\|_1).$$
Лемма доказана. □

Наконец, получаем следующую асимптотику для $R_\lambda f$.

Теорема 1.5. *В области S_δ при больших $|\rho|$ справедлива асимптотическая формула:*
$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f - R_\lambda^0 f|_{x=1} R_\lambda^0 \varphi(x) + O((\tilde{\varkappa}_1(\rho) + \varkappa_1^2(\rho))\|f\|_1),$$
равномерная по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Доказательство. Имеем
$$R_\lambda f = R_\lambda^1 f + d(f) R_\lambda^1 \varphi(x),$$
где $d(f) = -\dfrac{d_1}{d_0} + \dfrac{d_2}{d_0}$.

Далее,
$$d_0 = \begin{vmatrix} 1+o(1) & o(1) \\ o(1) & 1+o(1) \end{vmatrix} = 1 + o(1).$$
Поэтому
$$\frac{1}{d_0} = 1 + o(1).$$
Имеем
$$d_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_\lambda^1 f|_{x=1} & -R_\lambda^1 \varphi|_{x=1} \\ (R_\lambda^1 f, \psi') & 1 - (R_\lambda^1 \varphi, \psi') \end{vmatrix} =$$

$$= R^1_\lambda f|_{x=1}(1-(R^1_\lambda\varphi,\psi')) + R^1_\lambda\varphi|_{x=1}(R^1_\lambda f,\psi') =$$
$$= R^1_\lambda f|_{x=1} - R^1_\lambda f|_{x=1}(R^1_\lambda\varphi,\psi') + R^1_\lambda\varphi|_{x=1}(R^1_\lambda f,\psi') =$$
$$= R^1_\lambda f|_{x=1} - R^1_\lambda f|_{x=1}(R^1_\lambda\varphi,\psi') + O(\varkappa_1^2(\rho)\|f\|_1).$$

Далее,

$$\frac{1}{d_0} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1+O(\varkappa_1(\rho)) & O(\varkappa_1(\rho)) \\ O(\varkappa_1(\rho)) & 1+O(\varkappa_1(\rho)) \end{vmatrix}} - 1 + 1 = 1 + \frac{O(\varkappa_1(\rho))}{1+O(1)} = 1 + O(\varkappa_1(\rho)).$$

Поэтому

$$\frac{d_1}{d_0} = (1+O(\varkappa_1(\rho)))(R^1_\lambda f|_{x=1} - R^1_\lambda f|_{x=1}(R^1_\lambda\varphi,\psi') + O(\varkappa_1^2(\rho)\|f\|_1)) =$$
$$= (1+O(\varkappa_1(\rho)))(R^1_\lambda f|_{x=1} + R^1_\lambda f|_{x=1}O(\varkappa_1^2(\rho)) + O(\varkappa_1^2(\rho)\|f\|_1)) =$$
$$= R^1_\lambda f|_{x=1} + O(\varkappa_1^2(\rho))R^1_\lambda f|_{x=1} + O(\varkappa_1^2(\rho)\|f\|_1)). \tag{1.56}$$

Отсюда имеем еще более грубую оценку:

$$\frac{d_2}{d_0} = \frac{1}{d_0}\begin{vmatrix} \alpha^0_{11} & \alpha^1_{12} \\ \alpha^0_{21} & \alpha^1_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{d_0}\begin{vmatrix} 1+R^1_\lambda\varphi|_{x=1} & R^1_\lambda f|_{x=1} \\ -R^1_\lambda\varphi|_{x=1} & (R^1_\lambda f,\psi') \end{vmatrix} =$$
$$= \frac{1}{d_0}(R^1_\lambda f,\psi') + R^1_\lambda\varphi|_{x=1}(R^1_\lambda f,\psi') + R^1_\lambda\varphi|_{x=1}R^1_\lambda f|_{x=1}. \tag{1.57}$$

Далее,

$$(R^1_\lambda f,\psi') = O(\varkappa_1(\rho)\|f\|_1)), \tag{1.58}$$

$$R^1_\lambda\varphi|_{x=1} = R^0_\lambda\varphi|_{x=1} - \frac{(R^0_\lambda\varphi,\psi')}{V(e^{\lambda x})}e^\lambda = O(\varkappa_1(\rho)) + O((R^0_\lambda\varphi,\psi')) = O(\varkappa_1(\rho)). \tag{1.59}$$

Поэтому

$$\frac{d_2}{d_0} = O(\varkappa_1(\rho)\|f\|_1). \tag{1.60}$$

Значит,

$$R_\lambda f = R^1_\lambda f + d(f)R^1_\lambda\varphi(x) = R^1_\lambda f + (-R^1_\lambda f|_{x=1} + O(\varkappa_1(\rho)\|f\|_1))R^1_\lambda\varphi(x). \tag{1.61}$$

Имеем

$$R_\lambda^1 f = R_\lambda^0 f - \frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda x}.$$

Поэтому из (1.61) получаем

$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f - \frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda x} +$$
$$+ \left(-R_\lambda^0 f|_{x=1} + \frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda} + O(\varkappa_1(\rho)\|f\|_1) \right) R_\lambda^1 \varphi(x) =$$
$$= R_\lambda^0 f - R_\lambda^0 f|_{x=1} R_\lambda^1 \varphi(x) - \frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda x} +$$
$$+ \left(-\frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda} + O(\varkappa_1(\rho)\|f\|_1) \right) R_\lambda^1 \varphi(x). \tag{1.62}$$

Но при $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$\frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda x} = O(\tilde{\varkappa}_1(\rho)\|f\|_1), \tag{1.63}$$

где $\tilde{\varkappa}_1(\rho) = e^{\rho\varepsilon}\varkappa_1(\rho)$. Далее,

$$\left(-\frac{(R_\lambda^0 f, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda} + O(\varkappa_1(\rho)\|f\|_1) \right) R_\lambda^1 \varphi(x) = O(\varkappa_1^2(\rho)\|f\|_1).$$

Поэтому из (1.62) получаем

$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f - R_\lambda^0 f|_{x=1} R_\lambda^1 \varphi(x) + O((\tilde{\varkappa}_1(\rho) + \varkappa_1^2(\rho))\|f\|_1)). \tag{1.64}$$

Наконец, при $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$

$$R_\lambda^1 \varphi(x) = R_\lambda^0 f - \frac{(R_\lambda^0 \varphi, \psi')}{V(e^{\lambda x})} e^{\lambda x} = R_\lambda^0 \varphi(x) + O(\tilde{\varkappa}_1(\rho)).$$

Поэтому из (1.64) получаем

$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f - R_\lambda^0 f|_{x=1} R_\lambda^0 \varphi(x) + O((\tilde{\varkappa}_1(\rho) + \varkappa_1^2(\rho))\|f\|_1)).$$

Теорема доказана. □

1.5. Теорема равносходимости

В этом параграфе получим для произвольной $f(x) \in L[0,1]$ теорему равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям оператора (0.4) и в обычный тригонометрический ряд Фурье.

Лемма 1.11. *Справедлива оценка:*

$$\int\limits_{|\rho|=r} (\tilde{\varkappa}_1(\rho) + \varkappa_1^2(\rho))\, d\rho = O(1).$$

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \tilde{\varkappa}_1(\rho)|d\lambda| = \int\limits_{\operatorname{Re}\rho\le 0} + \int\limits_{\operatorname{Re}\rho\ge 0} .$$

Мы рассмотрим случай, когда $\operatorname{Re}\rho \le 0$. В этом случае,

$$\int\limits_{\operatorname{Re}\rho\le 0} \tilde{\varkappa}_1(\rho)|d\lambda| = \int\limits_{\operatorname{Re}\rho\le 0} |e^{\rho\varepsilon}|\tilde{\varkappa}_1(\rho)\,|d\rho| =$$

(по дуге окружности, но $\rho = re^{i\vartheta}$, $\vartheta \in [\pi/2, 3\pi/2]$, т. е. левая полуплоскость)

$$= \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\varepsilon \operatorname{Re}\rho} \frac{1}{|\operatorname{Re}\rho|}(1 - e^{\operatorname{Re}\rho}) r\, d\vartheta =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{\varepsilon r\cos\vartheta} \frac{1}{r|\cos\vartheta|}(1 - e^{r\cos\vartheta}) r\, d\vartheta = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} . \qquad (1.65)$$

Рассмотрим первый интеграл в (1.65) и выполним в нём замену: $\tau = \vartheta - \pi/2$, т. е. $\vartheta = \pi/2 + \tau$. Тогда, $\cos\vartheta = -\sin\tau$ и

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} = \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-r\varepsilon\sin\tau} \frac{1}{r\sin\tau}(1 - e^{r\sin\tau}) r\, d\tau.$$

Так как $2\tau/\pi \le \sin\tau \le \tau$, то

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \le \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-2\varepsilon r\tau/\pi} \frac{1}{2r\tau/\pi}(1 - e^{r\tau}) r\, d\tau = \frac{\pi}{2} \int\limits_{0}^{\pi r/2} e^{-2\varepsilon\xi/\pi} \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi}\, d\xi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int\limits_0^1 + \frac{\pi}{2}\int\limits_1^{\pi r/2} = e + \frac{\pi}{2}\int\limits_1^{\pi r/2}.$$

Но

$$\int\limits_1^{\pi r/2} \leq \int\limits_1^{\pi r/2} e^{-2\varepsilon\xi/\pi}\frac{d\xi}{\xi} \leq \int\limits_1^{\infty} < \infty.$$

Второй интеграл в (1.65) рассматривается аналогично. Значит,

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \tilde{\varkappa}_1(\rho)|d\lambda| = O(1).$$

Рассмотрим теперь $\int\limits_{|\lambda|=r} \tilde{\varkappa}_1^2(\rho)|d\lambda|$. Имеем

$$\int\limits_{\substack{\operatorname{Re}\rho\leq 0\\ |\rho|=r}} \tilde{\varkappa}_1^2(\rho)|d\rho| = \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{1}{r^2\cos^2\vartheta}(1-e^{r\cos\vartheta})^2 r\,d\vartheta = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2}.$$

Рассмотрим лишь интеграл $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}$. Имеем

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2\sin^2\tau}(1-e^{r\sin\tau})^2 r\,d\tau \leq \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{r^2(2/\pi)^2\tau^2}(1-e^{-r\tau})^2 r\,d\tau =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\int\limits_0^{\pi r/2} \frac{1}{\xi^2}(1-e^{-\xi})^2\,d\xi = \frac{\pi^2}{4}\left(\int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\pi r/2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{\pi^2}{4}\left(\int\limits_0^1 + \int\limits_1^{\pi r/2}\frac{1}{\xi^2}\,d\xi\right) \leq c < \infty.$$

Лемма доказана. □

Лемма 1.12. *Множество ступенчатых функций всюду плотно в $L[0,1]$.*

Доказательство. Пусть $f(x) \in L[0,1]$. Введём в рассмотрение функцию срезки

$$f_N(x) = \begin{cases} N, & |f(x)| \geq N, \\ f(x), & |f(x)| < 1. \end{cases}$$

тогда $|f_N(x)| \leq N$. Поэтому

$$\|f - f_N\|_1 = \int\limits_0^1 |f(t) - f_N(t)|\, dt = \int\limits_{|f(t)| \geq N} |f(t) - f_N(t)|\, dt \leq 2 \int\limits_{|f(t)| \geq N} |f(t)|\, dt.$$

Положим $A_N = \{t|\ |f(t)| \geq N\}$. Тогда $\operatorname{mes} A_N \to 0$ при $N \to \infty$. В самом деле, имеем

$$\int\limits_0^1 |f(t)|\, dt \geq \int\limits_{A_N} |f(t)|\, dt \geq N \operatorname{mes} A_N.$$

Отсюда $\operatorname{mes} A_N \to 0$ при $N \to \infty$. По свойству абсолютной непрерывности для заданного $\varepsilon > 0$ существует такое N, что

$$\int\limits_{A_N} |f(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Фиксируем N и рассмотрим $f_N(t)$. По теореме Лузина существует непрерывная функция $\varphi_N(t)$ такая, что $\operatorname{mes}\{t|\ \varphi_N(t) \neq f_N(t)\} < \varepsilon$ и $|\varphi_N(t)| \leq N$. По свойству равномерной непрерывности можно построить такое разбиение $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$, что $|\varphi_N(\tau_1) - \varphi_N(\tau_2)| < \varepsilon$, если τ_1, τ_2 из одного отрезка разбиения. Построим теперь следующую ступенчатую функцию $g(t) = \varphi_N(t_k)$, если $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Тогда имеем оценку:

$$\|f - g\|_1 \leq \|f - f_N\|_1 + \|f - \varphi_N\|_1 + \|\varphi_N - g(t)\|_1 \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 1.13. *Если $\varphi(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$, то для любой $f(x) \in L[0,1]$*

$$\lim_{r \to \infty} \max_{[\varepsilon, 1-\varepsilon]} \left| \int\limits_{|\lambda| = r} R_\lambda^0 \varphi(x) R_\lambda^0 f|_{x=1}\, d\lambda \right| = 0.$$

Доказательство. Имеем

$$R_\lambda^0\varphi(x) = \int\limits_0^1 G_0(x,t,\lambda)g(t)\,dt = \frac{e^{-\rho x}}{\Delta_0(\rho)}\int\limits_0^x e^{\rho t}\varphi(t)\,dt + \frac{e^{-\rho(1+x)}}{\Delta_0(\rho)}\int\limits_x^1 e^{\rho t}\varphi(t)\,dt =$$

$$= \frac{e^{-\rho x}}{\Delta_0(\rho)}\Big[\frac{1}{\rho}\varphi(t)\Big|_0^x - \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x e^{\rho t}\,d\varphi(t)\Big] + \frac{e^{-\rho(1+x)}}{\Delta_0(\rho)}\Big[\frac{1}{\rho}\varphi(t)\Big|_x^1 - \frac{1}{\rho}\int\limits_x^1 e^{\rho t}\,d\varphi(t)\Big].$$

Первая скобка имеет оценку

$$[1] = \frac{1}{\rho}\varphi(t)\Big|_0^x - \frac{1}{\rho}\int\limits_0^x e^{\rho t}\,d\varphi(t) = O\left(\frac{1}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\rho}e^{\rho x}\right) + O\left(\frac{1}{|\rho|}\overset{1}{\underset{0}{V}}\varphi\right) +$$

$$+\frac{1}{|\rho|}|e^{\rho x}|O\left(\overset{1}{\underset{0}{V}}\varphi\right) = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Вторая скобка имеет оценку:

$$[2] = \frac{1}{\rho}\varphi(t)\Big|_x^1 - \frac{1}{\rho}\int\limits_x^1 e^{\rho t}\,d\varphi(t) = O\left(\frac{e^{\rho}}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\rho}e^{\rho x}\right) + O\left(\frac{e^{\rho x}}{\rho}\right) +$$

$$+\frac{1}{|\rho|}O\left(\int\limits_x^1 |e^{\rho t}|\,|d\varphi(t)|\right) = O\left(\frac{|e^{\rho x}|}{|\rho|} + \frac{1}{|\rho|}|e^{\rho x}|\int\limits_x^1 |d\varphi(t)|\right) = O\left(\frac{e^{\rho x}}{\rho}\right).$$

Отметим ещё оценку $\dfrac{1}{\Delta_0(\rho)} = O(e^{-\rho})$ в S. Тогда

$$R_\lambda^0\varphi(x) = \frac{e^{-\rho x}}{\Delta_0(\rho)}[1] + \frac{e^{-\rho(1+x)}}{\Delta_0(\rho)}[2] = O\left(\frac{e^{-\rho x}e^{\rho}}{\rho}\right) + O\left(\frac{e^{-\rho(1+x)}e^{\rho}}{\rho}\,e^{\rho x}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

т. е.

$$R_\lambda^0\varphi(x) = O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{1.66}$$

Далее,

$$R_\lambda^0 f|_{x=1} = \int\limits_0^1 G_0(1,t,\lambda)f(t)\,dt = \int\limits_0^1 \frac{e^{\rho(t-1)}}{\Delta_0(\rho)}f(t)\,dt = \int\limits_0^1 O(e^{\rho(t-1)}e^{\rho})f(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 O(e^{\rho t}) f(t)\, dt = \int_0^1 O(|f(t)|)\, dt = O(\|f\|_1),$$

т. е.

$$R_\lambda^0 f|_{x=1} = O(\|f\|_1). \tag{1.67}$$

Значит,

$$R_\lambda^0 \varphi(x) R_\lambda^0 f|_{x=1} = O\left(\frac{1}{\rho}\|f\|_1\right). \tag{1.68}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ \operatorname{Re}\rho\le 0}} R_\lambda^0 \varphi(x) R_\lambda^0 f(1)\, d\lambda = \int\limits_{\substack{|\rho|=r \\ \operatorname{Re}\rho\le 0}} O\left(\frac{1}{\rho}\right) \|f\|_1\, |d\rho| = O(\|f\|_1). \tag{1.69}$$

Пусть теперь $f(x) = \chi(x)$, где $\chi(x)$ — характеристическая функция. Имеем

$$R_\lambda^0 \chi(1) = \int_0^1 G_0(1,t,\lambda)\chi(t)\, dt = \int_\alpha^\beta G_0(1,t,\lambda)\, dt = \int_\alpha^\beta \frac{e^{\rho(t-1)}}{\Delta_0(\rho)}\, dt = \frac{e^{\rho(t-1)}}{\rho\Delta_0(\rho)}\bigg|_\alpha^\beta =$$
$$= O\left(\frac{1}{\rho} e^{\rho(\beta-1)} e^{\rho}\right) + O\left(\frac{1}{\rho} e^{\rho(\alpha-1)} e^{\rho}\right) = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ \operatorname{Re}\rho\le 0}} R_\lambda^0 \varphi(x) R_\lambda^0 \chi(1)\, d\lambda = \int O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\, |d\rho| \le C\frac{1}{r^2} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} r\, d\varphi \le \frac{C}{r} \to 0.$$

Таким образом,

$$\lim_{r\to\infty} \Bigg\| \int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ \operatorname{Re}\rho\le 0}} R_\lambda^0 \varphi(x) R_\lambda^0 \chi(1)\, d\lambda \Bigg\|_{C[0,1]} = 0. \tag{1.70}$$

Если $f(x)$ ступенчатая функция, т. е.

$$f(x) = \sum_{k=1}^N c_k \chi_k(x),$$

то для неё получим

$$\lim_{r\to\infty}\Big\| \int\limits_{\substack{|\lambda|=r \\ \operatorname{Re}\rho\le 0}} R^0_\lambda\varphi(x)R^0_\lambda f(1)\,d\lambda \Big\|_{C[0,1]} = 0. \tag{1.71}$$

Лемма доказана. $\square$

Теперь докажем теорему равносходимости.

Теорема 1.6. *Если* $\varphi(x)\in C[0,1]\cap V[0,1]$, *то для любой* $f(x)\in L[0,1]$ *имеет место*

$$\lim_{r\to\infty}\max_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}|S_r(f,x)-\sigma_r(f,x)| = 0, \tag{1.72}$$

где $S_r(f,x)$ *— частная сумма ряда Фурье функции* $f(x)$ *по собственным и присоединенным функциям оператора* L *для тех собственных значений* λ_k, *для которых* $|\lambda_k|\le r$; $\sigma_r(f,x)$ *— частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции* $f(x)$ *по тригонометрической системе* $\{e^{2k\pi ix}\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *для тех* k, *для которых* $|2k\pi|<r$.

Доказательство. В [3] было показано, что

$$S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda.$$

Так как тригонометрическая система есть система собственных функций (присоединенных нет) оператора L_0, то

$$\sigma_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R^0_\lambda f\,d\lambda.$$

Поэтому (1.72) есть

$$\lim_{r\to\infty}\max_{\varepsilon\le x\le 1-\varepsilon}|\Omega_r(f,x)| = 0, \tag{1.73}$$

где

$$\Omega_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}[R_\lambda f - R^0_\lambda f]\,d\lambda.$$

Так как $\varphi(x)$ есть функция ограниченной вариации, то как и при доказательстве леммы 1.7 (даже проще)

$$\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} R^0_\lambda \varphi(x)\, d\lambda \Big\|_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Поэтому в силу следствия леммы 1.5

$$\|R^0_\lambda f\|_\infty \le \max_{x\in[0,1]} \int\limits_0^1 |G_0(x,t,\lambda)||f(t)|\, dt \le c\|f\|_1.$$

Следовательно,

$$\Big\| \int\limits_{|\lambda|=r} R^0_\lambda \varphi(x) R^0_\lambda f|_{x=1}\, d\lambda. \Big\|_\infty \le c\|f\|_1.$$

Поэтому по теореме 1.4 в силу леммы 1.11

$$\|\Omega_r(f,x)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = O(\|f\|_1), \tag{1.74}$$

где $\|\cdot\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}$ — норма в $C[\varepsilon,1-\varepsilon]$. Далее, если $f(x)$ — ступенчатая функция, то

$$\|\Omega_r(f,x)\| = O(1/r). \tag{1.75}$$

Поэтому для множества ступенчатых функций (1.72) имеет место. А тогда в силу леммы 1.12 и (1.74) по теореме Банаха–Штейнгауза (1.72) имеет место и для любой $f(x)\in L[0,1]$. Теорема доказана. □

Остановимся на точности условий теоремы 1.6. Именно, покажем, что если $\varphi(x)\in C[0,1]$, но $\varphi(x)\notin V[0,1]$, то равносходимость, вообще говоря, не имеет места.

Пусть равносходимость имеет место в точке $x_0\in[\varepsilon,1-\varepsilon]$. Рассмотрим линейные функционалы в $L[0,1]$

$$\Phi_r(f) = \int\limits_{|\lambda|=r} R^0_\lambda \varphi(x_0) R^0_\lambda f|_{x=1}\, d\lambda. \tag{1.76}$$

В силу оценки $\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0\varphi(x_0)R_\lambda^0 f|_{x=1}\,d\lambda = O(1)$ по теореме Банаха–Штейнгауза их нормы ограничены. по теореме Рисса функционал в $L[0,1]$ имеет вид

$$F(f) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx, \tag{1.77}$$

где $g(x) \in L_\infty[0,1]$, $\|F\| = \|g\|_\infty$. Представим (1.77) в виде (1.76):

$$\Phi_r(f) = \int\limits_0^1 f(t)g_r(t)\,dt,$$

где $g_r(t) = \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0\varphi(x_0)G_0(1,t,\lambda)\,d\lambda$. поэтому должно выполняться условие

$$\|g_r(t)\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |g_r(t)| \le c \tag{1.78}$$

независимо от r.

Далее, имеем

$$g_r(t) = \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{e^{\rho(t-1)}}{1-e^{-\rho}} R_\lambda^0\varphi(x_0)\,d\lambda.$$

Отсюда, в силу (1.78) при $t=0$ и $t=1$ получаем

$$\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{e^{-\rho}}{1-e^{-\rho}} R_\lambda^0\varphi(x_0)\,d\lambda = O(1), \quad \int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{1-e^{-\rho}} R_\lambda^0\varphi(x_0)\,d\lambda = O(1). \tag{1.79}$$

Из (1.79) получаем

$$\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0\varphi(x_0)\,d\lambda = O(1). \tag{1.80}$$

Интеграл слева в (1.80) есть частичная сумма обычного тригонометрического ряда Фурье функции $\varphi(x)$. Если бы равносходимость имела место для любой функции $\varphi(x) \in C[0,1]$, то из (1.80) получаем, что нормы функционалов $\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0\varphi(x_0)\,d\lambda$ ограничены по r (по теореме Банаха–

Штейнгауза). В то же время если $\varphi(x) \in C[0,1]$, то $\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0 \varphi(x_0)\, d\lambda$ сходится. А тогда опять по теореме Банаха – Штейнгауза $\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda^0 \varphi(x_0)\, d\lambda$ сходится. Но известно, что для непрерывных функций ряд Фурье может расходиться в точке. Получили противоречие. Тем самым теорема 1.6 точна. $\square$

2. Анализ теоремы равносходимости для произвольного интегрального оператора

Задача разложения по собственным функциям интегрального оператора в действительности нечетко определена. Дело в том, что одну и туже систему собственных и присоединенных функций имеют бесчисленное множество интегральных операторов (функции операторов). Поэтому следует взять из всего семейства таких операторов некоторый специальный в определенном смысле простой, или канонический, для которого уже следует проводить исследование сходимости разложений по собственным функциям. И что такое канонический оператор опять не ясно. А вот в случае теоремы равносходимости можно указать такого вида канонический оператор [4]. Мы в этой главе покажем, что для теоремы равносходимости каноническим оператором может служить интегральный оператор, ядро $A(x,t)$ которого обладает тем свойством, что $\dfrac{\partial}{\partial x}A(x,t)$ имеет скачок на линии $t=x$, равный 1. Более того, мы установим, что, если для некоторого интегрального оператора A имеет место теорема равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье, то существует интегральный оператор $Bf=\int\limits_0^1 B(x,t)f(t)\,dt$, который имеет ту же систему собственных и присоединенных функций, что и оператор A, но теперь уже $\dfrac{\partial}{\partial x}B(x,t)$ имеет на линии $t=x$ скачок, равный 1. К сожалению, переход от оператора A к оператору B не носит конструктивного характера.

Итак, предположим, что для некоторого интегрального оператора $Af=\int\limits_0^1 A(x,t)f(t)\,dt$ имеет место теорема равносходимости, т. е. для любой $f(x)\in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty}\|S_r(f,x)-\sigma_r(f,x)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]}=0. \tag{2.1}$$

Пусть $\Omega_l(x,t)$ — ядро оператора $S_r(f,x)-\sigma_r(f,x)$ причем здесь l равно числу членов в $\sigma_r(f,x)$. Тогда k_l — число членов в $S_r(f,x)$.

Введем новые обозначения:

$$\sigma_l(f) = \sigma_r(f, x), \quad S_{k_l}(f) = S_r(f, x).$$

Теперь, если $r \to \infty$, то l последовательно пробегает натуральный ряд, а k_l — некоторая подпоследовательность членов натурального ряда. Таким образом, (2.1) переходит в

$$\lim_{r\to\infty} \|S_{k_l}(f) - \sigma_l(f)\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0. \tag{2.2}$$

К сожалению, условие (2.2) в наших дальнейших рассуждениях сейчас недостаточно. Мы будем ещё требовать, чтобы

$$\left\| \frac{1}{l}\,\frac{\partial}{\partial x}(S_{k_l}(f) - \sigma_l(f)) \right\|_{[\varepsilon,1-\varepsilon]} = O(1). \tag{2.3}$$

В конкретных случаях (в частности, в дифференциальных операторах) условие (2.3) выполняется. Нам не известны случаи, когда оно не выполняется.

Положим

$$S_{k_l}(f) - S_{k_{l-1}}(f) - \sigma_l(f) + \sigma_{l-1}(f) = \int\limits_0^1 \gamma_l(x,t) f(t)\,dt$$

$(S_{k_{-1}}(f) = \sigma_{-1}(f) = 0)$. Тогда мы имеем

$$S_{k_l}(f) - \sigma_l(f) = \int\limits_0^1 \Omega_l(x,t) f(t)\,dt,$$

где

$$\Omega_l(x,t) = \sum_{k=0}^{l} \gamma_k(x,t).$$

Лемма 2.1. *Имеют место оценки:*

$$\Omega_l(x,t) = O(1), \quad \frac{\partial}{\partial x}\Omega_l(x,t) = O(1), \tag{2.4}$$

равномерные по $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *и* $t \in [0,1]$.

Утверждение леммы следует из (2.2) и (2.3) по теореме Банаха–Штейнгауза.

Образуем

$$\Sigma_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{\gamma_k(x,t)}{\alpha - (2k\pi i)^2}, \quad \alpha \neq (2k\pi i)^2. \tag{2.5}$$

Лемма 2.2. *Имеет место формула:*

$$\Sigma_N = \frac{\Omega_N}{\alpha - (2N\pi i)^2} + 4\pi^2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2k+1)\Omega_k(x,t)}{(\alpha - (2k\pi i)^2)(\alpha - (2(k+1)\pi i)^2)}.$$

Доказательство. Используем преобразование Абеля суммы (2.5). Имеем

$$\Sigma_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{\Omega_k - \Omega_{k-1}}{\alpha - (2k\pi i)^2} = \frac{\Omega_N}{\alpha - (2N\pi i)^2} +$$
$$+4\pi^2 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(2k+1)\Omega_k(x,t)}{(\alpha - (2k\pi i)^2)(\alpha - (2(k+1)\pi i)^2)}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.3. Σ_N *при* $n \to \infty$ *стремится к непрерывно дифференцируемой по* x *функции равномерно по* $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$ *и* $t \in [0,1]$.

Утверждение леммы следует из лемм 2.1 и 2.2.

Рассмотрим теперь оператор:

$$y'', \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1). \tag{2.6}$$

Отметим, что этот оператор есть L_0^2.

Лемма 2.4. *Собственные значения оператора* (2.6) *есть* $\lambda_k = -4k^2\pi^2$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$y'' + \rho^2 y = 0, \tag{2.7}$$

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1). \tag{2.8}$$

Общее решение уравнения (2.7) есть $y = C_1 e^{\rho i x} + C_2 e^{-\rho i x}$. Подчиним его граничным условиям (2.8). Получим

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = c_1 e^{\rho i} + c_2 e^{-\rho i}, \\ (c_1 - c_2)\rho i = (c_1 e^{\rho i} + c_2 e^{-\rho i})\rho i, \end{gathered} \tag{2.9}$$

или

$$(1 - e^{\rho i})c_1 + (1 - e^{-\rho i})c_2 = 0,$$
$$(1 - e^{\rho i})c_1 - (1 - e^{-\rho i})c_2 = 0.$$

Отсюда c_1 и c_2 могут быть одновременно не равны нулю тогда и только тогда, когда

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} 1 - e^{\rho i} & 1 - e^{-\rho i} \\ 1 - e^{\rho i} & -(1 - e^{-\rho i}) \end{vmatrix} = -2(1 - e^{\rho i})(1 - e^{-\rho i}) = 0,$$

а именно когда $1 - e^{\rho i} = 0$ или $1 - e^{-\rho i} = 0$, т. е. $\rho_k = 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

Тем самым утверждение леммы получено при $\lambda \neq 0$. Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда уравнение (2.7) есть $y'' = 0$. Общее решение его есть $y = c_1 + c_2 x$. Из краевых условий (2.8) следует, что $c_2 = 0$, а $y = c_1$ есть собственная функция.

Лемма доказана. □

Лемма 2.5. *Собственные функции оператор* (2.6) *есть для* $\lambda_0 = 0$, $\varphi_0(x) = 1$, *для* $\lambda_k = -4k^2\pi^2 \quad (k = 1, 2, \ldots) \quad \varphi_{k,1}(x) = e^{2k\pi i x}$ *и* $\varphi_{k,2}(x) = e^{-2k\pi i x}$.

Доказательство. Для $\lambda_0 = 0$ это утверждение содержится в доказательстве леммы 2.4. Пусть теперь $\lambda_k = -4\pi^2 k^2$. В этом случае собственная функция имеет вид $\varphi(x) = c_1 e^{2k\pi i x} + c_2 e^{-2k\pi i x}$. Из граничных условий получаем

$$c_1 + c_2 = c_1 + c_2,$$
$$c_1 - c_2 = c_1 - c_2,$$

т. е. граничные условия выполняются при любых c_1 и c_2. Значит, $\varphi(x) = c_1 e^{2k\pi i x}$ и $\varphi(x) = c_2 e^{-2k\pi i x}$ являются собственными функциями и поскольку это фундаментальная система решений уравнения (2.7), то других собственных функций быть не может.

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.6. *Пусть* R_λ *резольвента оператора* (2.6). *Тогда*

$$R_\lambda = R^0_{\rho i} R^0_{-\rho i},$$

где R^0_λ *— резольвента* L_0 *и* $\lambda = -\rho^2$.

Доказательство. Пусть $R_\lambda f$. Тогда $y'' + \rho^2 y = f$, $y(0) = y(1)$, $y'(0) = y'(1)$. Имеем

$$\left(\frac{d}{dx} + \rho i\right)\left(\frac{d}{dx} - \rho i\right) y = f. \tag{2.10}$$

Положим $z = y' + \rho i y$. Тогда

$$z' + \rho i z = f, \quad z(0) = z(1).$$

Поэтому $z = R^0_{-\rho i} f$. Отсюда имеем

$$y' - \rho i y = z = R^0_{-\rho i} f, \quad y(0) = y(1).$$

Отсюда

$$y = R^0_{\rho i} R^0_{-\rho i} f.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.7. *Пусть* $R_\lambda f = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda) f(t)\,dt$. *Тогда в* S_δ *имеет место оценка:*

$$G(x,t,\lambda) = O(\varkappa(\rho i)).$$

Доказательство. По лемме 2.6 имеем

$$G(x,t,\lambda) = \int\limits_0^1 G_0(x,\tau,\rho i) G_0(\tau,t,-\rho i)\,d\tau.$$

Отсюда

$$G(x,t,\lambda) = O\left(\int_0^1 |G_0(x,\tau,\rho i)|\,d\tau\right) = O(\chi(\rho i)).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.8. *Если $f = R_\alpha g$, где $g \in L[0,1]$, то*

$$\lim_{r\to\infty} \|f(x) - S_r(f,x)\|_{C[0,1]} = 0,$$

где сейчас $S_r(f,x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda f\,d\lambda$ и R_λ — резольвента оператора (2.6).

Доказательство. Имеем по тождеству Гильберта

$$\frac{R_\lambda - R_\alpha}{\lambda - \alpha} = R_\lambda R_\alpha \rho.$$

Поэтому

$$\frac{R_\lambda g}{\lambda - \alpha} - \frac{f}{\lambda - \alpha} = R_\lambda f.$$

Отсюда

$$f - S_r(f,x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g}{\lambda - \alpha}\,d\lambda.$$

Отсюда по лемме 2.7 получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda g}{\lambda - \alpha}\,d\lambda = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\int\limits_{|\rho|=\sqrt{r}} \chi(\rho i)|d\rho|\|g\|_1\right).$$

Но

$$\int\limits_{|\rho|=\sqrt{r}} \chi(\rho i)|d\rho| = O\left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{r}\varphi}(1 - e^{\sqrt{\rho}\varphi})\sqrt{r}\,d\varphi\right) =$$

$$= O\left(\int_0^{\pi\sqrt{r}/2} \frac{1}{\xi}(1 - e^{-\xi})\,d\xi\right) = O(\ln r).$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.9. *Если* $\alpha > 0$, *то* $R_\alpha^* = R_\alpha$ (R_α^* — *оператор, сопряженный для* R_α).

Доказательство. Имеем

$$R_\alpha = R^0_{\sqrt{\alpha}i} R^0_{-\sqrt{\alpha}i}.$$

Отсюда

$$R_\alpha^* = (R^0_{\sqrt{\alpha}i})^* (R^0_{-\sqrt{\alpha}i})^*.$$

Но

$$(R^0_{\sqrt{\alpha}i})^* = R^0_{-\sqrt{\alpha}i}, \quad (R^0_{-\sqrt{\alpha}i})^* = R^0_{\sqrt{\alpha}i}.$$

Поэтому $R_\alpha^* = R_\alpha$. Лемма доказана. □

Лемма 2.10. *Имеет место формула:*

$$G(x, t, \lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2k\pi i(x-t)}}{\alpha + 4k^2\pi^2}, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. По лемме 2.8

$$\int\limits_0^1 G(x, t, \alpha) g(t)\, dt = \lim_{r \to \infty} S_r(R_\alpha g, x).$$

Но

$$S_r(R_\alpha g, x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(R_\alpha g, e^{2k\pi i x}\right) e^{2k\pi i x} = \sum_{k=-N}^{N} \left(g, R_\alpha(e^{2k\pi i x})\right) e^{2k\pi i x}.$$

Если φ собственная функция, то

$$\varphi'' - \alpha\varphi = (\lambda - \alpha)\varphi.$$

Отсюда $\varphi = (\lambda - \alpha) R_\alpha \varphi$. Поэтому

$$\left(g, R_\alpha(e^{2k\pi i x})\right) = \left(g, \frac{1}{\lambda_k - \alpha} e^{2k\pi i x}\right) = \frac{1}{\alpha + 4k\pi^2} (g, e^{2k\pi i x}).$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.11. *$G(x,t,\alpha)$ непрерывна и первая производная по x имеет на линии $t=x$ скачок, равный 1.*

Доказательство. Имеем

$$G(x,t,\alpha)=\int\limits_0^1 G_0(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau=$$

$$=\int\limits_0^x G_0(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau+\int\limits_x^1 G_0(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau.$$

Пусть $t\le x$. Тогда

$$\int\limits_0^x G_0(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau=\int\limits_0^t+\int\limits_t^x.$$

Пусть $t\ge x$. Тогда

$$\int\limits_x^1 G_0(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau=\int\limits_x^t+\int\limits_t^1.$$

Отсюда видно, что G_x существует при $t\le x$ и $t\ge x$, причем

$$G_x(x,t,\alpha)|_{t\le x}=\int\limits_0^t G_{0x}(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau+$$

$$+\int\limits_t^x G_{0x}(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau+G_0(x,x-0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x-0,t,-\sqrt{\alpha}i)-$$

$$-G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x+0,t,-\sqrt{\alpha}i)+\int\limits_x^1 G_{0x}(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau=$$

$$=G_0(x,x-0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x-0,t,-\sqrt{\alpha}i)-G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)\times$$

$$\times G_0(x+0,t,-\sqrt{\alpha}i)+\sqrt{\alpha}i\int\limits_0^1 G_{0x}(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau.$$

Поскольку $G'_{0,x} = +\sqrt{\alpha}iG_0(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)$. Аналогично

$$G_x(x,t,\alpha)|_{t\geq x} = \int\limits_0^x G_{0x}(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau +$$

$$+\int\limits_x^t G_{0x}(x,\tau,\sqrt{\alpha}i)G_0(\tau,t,-\sqrt{\alpha}i)\,d\tau + G_0(x,x-0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x-0,t,-\sqrt{\alpha}i) -$$

$$-G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x+0,t,-\sqrt{\alpha}i) =$$

$$= G_0(x,x-0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x-0,t,-\sqrt{\alpha}i) - G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)\times$$

$$\times G_0(x+0,t,-\sqrt{\alpha}i) + \sqrt{\alpha}iG(x,t,\alpha).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{t=x-0} - \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{t=x+0} &= G_0(x,x-0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x-0,x-0,-\sqrt{\alpha}i) -\\ &-G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x+0,x-0,-\sqrt{\alpha}i) -\\ &-G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x-0,x+0,-\sqrt{\alpha}i) +\\ &+G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)G_0(x+0,x+0,-\sqrt{\alpha}i).\end{aligned} \tag{2.11}$$

Но

$$G_0(x,t,-\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta_0(\rho)}e^{\rho(t-x)}, & t\leq x,\\ \dfrac{1}{\Delta_0(\rho)}e^{\rho(t-x-1)}, & t\geq x,\end{cases} \qquad \Delta_0(\rho) = 1-e^{-\rho}.$$

Поэтому из (2.11) получаем

$$\frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{t=x-0} - \frac{\partial G}{\partial x}\Big|_{t=x+0} = G_0(x,x-0,\sqrt{\alpha}i)\frac{1}{\Delta_0(-\sqrt{\alpha}i)} -$$

$$-G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)\frac{1}{\Delta_0(-\sqrt{\alpha}i)} - G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)\frac{e^{\sqrt{\alpha}i}}{\Delta_0(-\sqrt{\alpha}i)} +$$

$$+G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i)\frac{e^{\sqrt{\alpha}i}}{\Delta_0(-\sqrt{\alpha}i)} = G_0(x,x-0,\sqrt{\alpha}i) -$$

$$-G_0(x,x+0,\sqrt{\alpha}i) = \frac{1}{\Delta_0(\sqrt{\alpha}i)} - \frac{e^{-\sqrt{\alpha}i}}{\Delta_0(\sqrt{\alpha}i)} = 1.$$

Лемма доказана. □

Теперь мы в состоянии установить основной результат.

Теорема 2.1. *Если для интегрального оператора A имеют место (2.2) и (2.3), то от оператора A можно перейти к интегральному оператору B с теми же собственными и присоединенными функциями, что и у A, но ядро $B(x,t)$ непрерывно, и $\dfrac{\partial}{\partial x}B(x,t)$ имеет скачок на линии $t = x$, равный 1.*

Доказательство. Имеем

$$\Sigma_N = \sum_{l=0}^{N} \frac{S_{k_l}(f) - S_{k_{l-1}}(f)}{\alpha + 4l^2\pi^2} - \sum_{l=0}^{N} \frac{\sigma_l(f) - \sigma_{l-1}(f)}{\alpha + 4l^2\pi^2} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\tilde{N}} \mu_l(f,\varphi_l)\varphi_l - \sum_{l=0}^{N} \frac{(f,e^{2l\pi ix})e^{2l\pi ix} + (f,e^{-2l\pi ix})e^{-2l\pi ix}}{\alpha + 4l^2\pi^2} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\tilde{N}} \mu_l(f,\varphi_l)\varphi_l - \sum_{l=-N}^{N} \frac{(f,e^{2l\pi ix})e^{2l\pi ix}}{\alpha + 4l^2\pi^2}, \qquad (2.12)$$

где φ_k — собственные и присоединенные функции оператора A. Вторая сумма в (2.12) справа стремится к $G(x,t,\alpha)$, первая — к B, а $\Sigma_N \to B_1$, где B_1 непрерывно дифференцируема по x.

Теорема доказана. □

3. Дифференциальные, интегро-дифференциальные и интегральные операторы

Рассмотрим вопрос о равносходимости разложений по собственным функциям операторов, указанных в названии главы, и в тригономтерические ряды Фурье.

3.1. Дифференциальные операторы

В этом параграфе рассмотрим дифференциальный оператор L, порожденный дифференциальным выражением

$$l[y] = y^{(n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_0(x)y(x), \quad x \in [0,1], \tag{3.1}$$

где $p_i(x) \in C[0,1]$, и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)] = 0, \quad j = 1,\ldots,n, \tag{3.2}$$

где a_{jk}, b_{jk} — произвольные комплекснозначные числа. Линейные формы $U_j(y)$ предполагаются линейно независимыми. Оператор (3.1)–(3.2) представляет собой классический случай дифференциальных операторов и вопросы спектральной теории их достаточно хорошо исследованы и изложены в многочисленных монографиях (см. например, М. А. Наймарк [5], Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон [6]).

Займемся сначала задачей обращения оператора L. С этой целью рассмотрим уравнения

$$l[y] = f(x), \tag{3.3}$$

где $f(x) \in L[0,1]$.

Лемма 3.1. *Общее решение уравнения* (3.3) *имеет вид:*

$$y(x) = (y_1(x),\ldots,y_n(x))c + \int_0^x g(x,t)f(t)\,dt, \tag{3.4}$$

где $\{y_j(x)\}_1^n$ *— произвольная фундаментальная система решений однородного уравнения,* $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ *(T — знак транспонирования) — произвольный постоянный вектор,* $g(x,t) = (y_1(x), \dots, y_n(x))z(x)$*,* $z(x) = (z_1(x), \dots, z_n(x))^T$ *— последний столбец матрицы* $Y^{-1}(x)$ *— обратной матрицы Вронского*

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Общее решение однородного уравнения $l[y] = f$ есть $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))c$, где c — произвольный постоянный вектор размерности n. Считая $c = c(x)$, по методу вариации произвольных постоянных получаем для $c'(x)$ систему:

$$Y(x)c'(x) = F(x),$$

где $F(x) = (0, \dots, 0, f(x))^T$. Отсюда

$$c(x) = c + \int_0^x Y^{-1}(t)F(t)\,dt = c + \int_0^x z(t)f(t)\,dt.$$

Значит, общее решение уравнения (3.3) есть

$$y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))c + \int_0^x \sum_{j=1}^n y_j(x)z_j(t)f(t)\,dt.$$

Лемма доказана. □

Теорема 3.1. *Оператор* L^{-1} *существует тогда и только тогда, когда* $\det\Delta \neq 0$*, где* $\Delta = (U_i(y_j))_1^n$*. При этом*

$$L^{-1}f = -(y_1(x), \dots, y_n(x))\Delta^{-1}\int_0^1 U_x(g_1(x,t))f(t)\,dt + \int_0^1 g_1(x,t)f(t)\,dt, \tag{3.5}$$

где $g_1(x,t) = \varepsilon(x,t)g(x,t)$, $\varepsilon(x,t)$ *— функция Хевисайда:* $\varepsilon(x,t)$ *при* $t \le x$ *и* $\varepsilon(x,t) = 0$ *при* $t > x$, U_x *означает, что условия* U *применяется по переменной* x, $U = U(\cdot) = (U_1(\cdot), \ldots, U_n(\cdot))^T$.

Доказательство. Уравнение $l[y] = 0$ имеет общее решение $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))c$. Из условия (3.2), т. е. $U(y) = 0$, получаем $\Delta c = 0$ и, значит, для того, чтобы уравнение $Ly = 0$ имело только нулевое решение (или, что тоже L^{-1} существует), необходимо и достаточно, чтобы $\det \Delta \neq 0$.

Если теперь $Ly = f$, то по лемме 3.1

$$y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))c + \int_0^1 g_1(x,t) f(t)\,dt.$$

Из условия (3.2) $U(y) = 0$, получаем

$$\Delta c + \int_0^1 U_x(g_1(x,t)) f(t)\,dt = 0.$$

Отсюда

$$c = -\Delta^{-1} \int_0^1 U_x(g_1(x,t)) f(t)\,dt$$

и теорема доказана. □

Следствие 3.1. $L^{-1}f = \int_0^1 G(x,t)f(t)\,dt$, *где функция Грина* $G(x,t)$ *есть*

$$G(x,t) = -(y_1(x), \ldots, y_n(x))\Delta^{-1}U_x(g_1(x,t)) + g_1(x,t). \qquad (3.6)$$

Следствие 3.2. *Функция Грина* $G(x,t)$ n *раз непрерывно дифференцируема по* x *и* t *всюду кроме диагонали* $t = x$; $n-2$ *раза непрерывно дифференцируема при всех* x *и* t *и* $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(x,t)$ *имеет на линии* $t = x$ *скачок, равный* 1.

В самом деле, первое слагаемое в (3.6) непрерывно дифференцируемо по x и t, а

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} g_1(x,t)|_{t=x} = \delta_{j,n-1} \quad (j = 0, \ldots, n-1),$$

где $\delta_{j,n-1}$ — символ Кронекера.

Рассмотрим теперь вопрос о разложениях по собственным и присоединенным функциям оператора L. Число λ будет собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда оператор $L - \lambda E$ (E — единичный оператор) не обратим, т. е. когда имеем ситуацию, рассмотренную выше, когда $l[y]$ заменяется на $l[y] - \lambda y$. Теперь мы для оператора $(L - \lambda E)^{-1}$ имеем представление

$$(L - \lambda E)^{-1} f = \int\limits_0^1 G(x,t,\lambda) f(t)\, dt,$$

где $G(x,t,\lambda)$ имеет место формула (3.6), в которой теперь $y_j(x)$, Δ^{-1}, $g_1(x,t)$ зависят от λ, т. е. $y_j(x) = y_j(x,\lambda)$, $\Delta^{-1} = \Delta^{-1}(\lambda)$, $g_1(x,t) = g_1(x,t,\lambda)$. Уравнения $\det\Delta(\lambda) = 0$ будет уравнением для собственных значений оператора L и $G(x,t,\lambda)$ есть не что иное, как ядро резольвенты $R_\lambda(L) = (L - \lambda E)^{-1}$ оператора L. И, если 0 не является собственным значением оператора L, то оператор L^{-1} есть интегральный и $R_\lambda(L) = (E - \lambda L^{-1})^{-1} L^{-1}$ является его резольвентой Фредкольма. Если оператор L не обратим, то следует (если это возможно) от L перейти к $L_1 = L - aE$, где a не является собственным значением и повторить всё вышеприведенное. В спектральной теории дифференциальных операторов ([1], [5]–[11]) проведено исследование $G(x,t,\lambda)$ при больших значениях $|\lambda|$, на основе которого методом Коши – Пуанкаре интегрирование резольвенты по расширяющимся контурам в комплексной плоскости спектрального параметра получен следующий результат.

Теорема 3.2. *Если краевые условия* (3.2) *регулярны по Биркгофу ([5,* *с. 120–121]), то для любой* $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon} |S_r(f,x) - \sigma_{r^{1/n}}(f,x)| = 0,$$

где $S_r(f,x) = -\dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=r} R_\lambda(L) f\, d\lambda$, ε *любое из (0,1/2].*

Это и есть теорема равносходимости разложений произвольной функции из $L[0,1]$ в ряд Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора L и в тригонометрический ряд Фурье. Этот замечательный результат для случая оператора Штурма–Лиувилля впервые был получен В. А. Стекловым [1] и А. Хааром [2], а для случая произвольного дифференциального оператора Я. Д. Тамаркиным [7], [8] и М. Стоуном [9], на основе фундаментальных исследований Г. Д. Биркгофа [10], [11] по дифференциальным системам при больших значениях спектрального параметра.

Поскольку L^{-1} есть интегральный оператор, то теорема 3.2 есть теорема равносходимости и для интегральных операторов в том случае, когда ядро оператора есть функция Грина.

Замечание. Результаты этого параграфа имеют место и для более общих краевых условий вида

$$U_j(y) = U_j^0(y) - \int_0^1 \varphi_j(t) y(t)\, dt = 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{3.7}$$

где $U_j^0(y)$ есть $U_j(y)$ из (3.2), а $\varphi_j(t) \in C[0,1]$. Нас в дальнейшем как раз будут интересовать условия (3.7).

3.2. Интегро-дифференциальные операторы

В этом параграфе рассмотрим интегро-дифференциальные операторы вида

$$l[y] = (E + N)(y^{(n)} + \alpha y), \tag{3.8}$$

$$U_j(y) = 0 \quad (j = 1, \dots, n), \tag{3.9}$$

где E — единичный оператор, N — интегральный оператор $Nf = \int\limits_0^1 N(x,t)f(t)\,dt$, α — комплексное число, $U_j(y)$ — условия (3.7). Займемся сначала выяснением степени общности этого оператора.

Теорема 3.3. *Если оператор* $l_0[y] = y^{(n)} + \alpha y$ *с условиями* (3.2) *обратим, то дифференциальный оператор* (3.1), (3.2) *есть частный случай* (3.8), (3.9).

Доказательство. Положим $G_0 f = \int\limits_0^1 G_0(x,t)f(t)\,dt$, где $G_0(x,t)$ — функция Грина оператора $l_0[y]$ с условиями (3.2). Пусть $y^{(n)} + \alpha y = z$ с условиями (3.2). Тогда $y = G_0 z$. Тогда $l[y] = (E + N)z$, где N — интегральный оператор с ядром

$$N(x,t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) \frac{\partial^k}{\partial x^k} G_0(x,t) - \alpha G_0(x,t), \tag{3.10}$$

т. е. для оператора (3.1), (3.2) получаем представление (3.8), (3.9), где $N(x,t)$ есть (3.10), а (3.9) есть (3.2). Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.4. *Если оператор* $l_0[y] = y^{(n)} + \alpha y$ *с условиями* (3.7) *обратим, то оператор* $l[y] = l_1[y] + l_2[y]$, *где* $l_1[y]$ *есть* (3.1), $l_2[y] = \sum\limits_{j=0}^{n} \int\limits_0^1 K_j(x,t) y^{(j)}(t)\,dt$, $K_j(x,t)$ *непрерывны и ограничены при* $t < x$ *и* $t > x$, *с условиями* (3.7) *есть частный случай* (3.8), (3.9).

Доказательство. Положим $G_0 f = \int\limits_0^1 G_0(x,t)f(t)\,dt$, где $G_0(x,t)$ — функция Грина оператора $l_0[y] = y^{(n)} + \alpha y$ с условиями (3.7). Обозначим $y^{(n)} + \alpha y = z$. Тогда $y = G_0 z$. Поэтому в этом случае $l[y] = (E + N)z$, где N — интегральный оператор с ядром

$$N(x,t) = -\alpha G_0(x,t) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j(x) \frac{\partial^j}{\partial x^j} G_0(x,t) + K_n(x,t) -$$

$$-\alpha \int\limits_0^1 K_n(x,\tau)G_0(\tau,t)\,d\tau + \sum_{j=0}^{n-1} \int\limits_0^1 K_j(x,\tau)\frac{\partial^j}{\partial\tau^j}G_0(\tau,t)\,d\tau.$$

Теорема доказана. □

Развитием метода Коши – Пуанкаре интегрирования резольвенты по расширяющимся контурам комплексной плоскости спектрального параметра получается следующий результат.

Теорема 3.5 (теорема равносходимости [4]). *Пусть выполняются требования:*

1) *$N(x,t)$ непрерывна в $[0,1]\times[0,1]$ (при $n=1$ считаем, что $N(x,t)$ непрерывна при $t \le x$ $t \ge x$*[1] *), $N'_t(x,t)$ непрерывна при $t \le x$ и $t \ge x$;*
2) *линейные формы $U_j(y)$ в условиях (3.9) регулярны по Биркгофу [5];*
3) *справедливо хотя бы одно из трех:*
   (a) *в условиях (3.9) можно выразить $y^{(n-1)}(0)$, $y^{(n-1)}(1)$ через низшие производные и $(y,\varphi_j) = \int\limits_0^1 y(t)\varphi_j(t)\,dt$;*
   (b) *$N(x,0)$, $N(x,1)$ — непрерывные функции ограниченной вариации;*
   (c) *$cN(x,1)+dN(x,0)$ — непрерывная функция ограниченной вариации, если среди условий (3.9) есть только одно, содержащее $y^{(n-1)}(0)$ и $y^{(n-1)}(1)$ и оно имеет вид*

$$cy^{(n-1)}(0) + dy^{(n-1)}(1) + \ldots = 0.$$

Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ справедливо

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_{r^{1/n}}(f,x)\|_{C[\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0, \qquad (3.11)$$

где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора (3.8), (3.9) для тех собственных значений λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$.

[1] Здесь под непрерывностью функции $f(x,t)$ непрерывна по x и t при $t<x$ в обычном смысле, $f(x,x-0)$ существует, и, если доопределить $f(x,t)$ на линии $t=x$ как $f(x,x-0)$, то $f(x,t)$ становится непрерывной при $t \le x$. Аналогично понимается непрерывность при $t \ge x$.

3.3. Интегральные операторы

Во второй главе показано, что каноническим интегральным оператором в вопросе равносходимости является интегральный оператор с ядром, обладающим тем свойством, что первая производная его по x имеет скачок, равный 1 на линии $t = x$. В этой главе мы рассмотрим всевозможные интегральные операторы вида

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt \tag{3.12}$$

с ядрами $A(x,t)$, имеющими единичный скачок какой-нибудь производной по x на линии $t = x$. Хотя они и не являются каноническими в смысле главы II, но их можно изучить не приводя предварительно к каноническому виду. Именно, обратный оператор в этом случае имеет вид оператора (3.8), (3.9), к которому можно применить метод главы I, для получения теоремы равносходимости. Займемся задачей обращения оператора (3.12). Оператор (3.17) рассматриваем в $L_2[0,1]$.

Теорема 3.6 ([4]). *Пусть выполнены требования:*

а) производные

$$A_{x^s t^j} = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t) \quad (s, j = 0, \ldots, n)$$

непрерывны при $t \le x$ и $t \ge x$;

б) скачки $p_{sj}(t) = \Delta A_{x^s t^j} = A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t+0} - A_{x^s t^j}(x,t)|_{x=t-0}$ принадлежат $C^{n-1-j}[0,1]$ $(j = 0, \ldots, n-1)$;

в) уравнение $Af = 0$ имеет только нулевое решение;

г)

$$\frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\Big|_{t=x-0} - \frac{\partial^j}{\partial x^j} A(x,t)\Big|_{t=x+0} = \delta_{j,n-1} \quad (j = 0, \ldots, n-1). \tag{3.13}$$

Тогда A^{-1} есть интегро-дифференциальный оператор:

$$A^{-1}y = (E+N)(y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y),$$

определенный на множестве всех функций, имеющих абсолютно непрерывные производные на $[0,1]$ до $(n-1)$-го порядка включительно, $y^{(n)}(x) \in \in L_2[0,1]$, удовлетворяющих краевым условиям (3.9). *Здесь E — единичный оператор, N — интегральный оператор*

$$Nf = \int\limits_0^1 N(x,t)f(t)\,dt$$

с ядром $N(x,t)$, непрерывным при $t \le x$ и $t \ge x$, $a_1, \ldots, a_n$ — непрерывные комплексные числа.

Следствие 3.3. *Если оператор $l_0[y] = y^{(n)} + \alpha y$ с условиями* (3.9) *обратим, то* (3.13) $a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, $a_n = \alpha$.

Применяя теоремы 3.5 приводит к следующему результату.

Теорема 3.7 ([4]). *Предположим, что*

а) интегральный оператор (3.12) *удовлетворяет условиям теоремы 3.6 и следствию из нее;*

б) линейные формы $U_j(y)$ $(j=1,\ldots,n)$ регулярны по Биркгофу;

в) $\overset{1}{\underset{0}{V}}\, \underset{x}{ar}\, A_{x^n}(x,t)$ ограничена по t.

Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$ справедливо (3.17), *где $S_r(f,x)$ — частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора* (3.12) *для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k| < r$.*

Замечание. Условие в) точно. Очень трудно проверяется условие б). Поэтому укажем случай, когда условие б) не требуется.

Теорема 3.8 ([4], [12]). *Если для оператора* (3.12) *выполняются условия а) и в) теоремы 3.7, а вместо б) теоремы 3.7 условие: б) ядро $A(x,t)$ симметрично, т. е. $A(x,t) = \overline{A(t,x)}$, то справедливо заключение теоремы 3.7.*

Доказательство теоремы 3.8 весьма сложно. Оно существенно использует глубокий факт (гипотеза Камке) о регулярности по Биркгофу самосопряженных краевых условий.

3.4. Интегральные операторы с инволюцией

В этом параграфе рассмотрим следующий интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)\,dt, \quad x \in [0,1]. \tag{3.14}$$

Он имеет ту особенность, что вместо линии $t = x$ здесь главная линия $t = 1-x$, т. е. побочная диагональ квадрата. Функция $\vartheta(x) = 1-x$ есть инволюция, т. е. $\vartheta(\vartheta(x)) \equiv x$. Таким образом, оператор (3.14) является оператором с инволюцией. Вообще, изучение дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений с инволюцией имеют давнюю историю, и активно проводятся в настоящее время [13]–[20].

Если в (3.14) вместо $1-x$ взять x, то получим оператор

$$Af = \int_0^{x} A(x,t)f(t)\,dt, \tag{3.15}$$

который является вольтерровым и, таким образом, не имеет собственных значений, отличных от нуля.

Но оператор (3.14) уже не вольтерров. Так самый простой из операторов (3.14) оператор

$$A_0 f = \int_0^{1-x} f(t)\,dt \tag{3.16}$$

имеет бесконечное множество собственных значений и собственных функций. Отметим еще, что более того, оператор A_0^2 есть

$$A_0^2 f = \int_0^{1} G(x,t)f(t)\,dt,$$

$G(x,t)$ — функция Грина оператора $y''(x)$, $y(1) = y'(0) = 0$. Поскольку A_0^2 канонический оператор, то A_0 есть корень квадратный из него. Это небольшой намек на смысл оператора (3.14).

Для исследования разложений по с.п.ф. оператора (3.14) теперь вместо дифференциальных уравнений используются дифференциальные системы в пространстве вектор-функций размерности 2, в частности, хорошо известная система Дирака.

Теорема 3.9 ([4]). *Пусть ядро* $A(x,t)$ *удовлетворяет условиям:*

а) $A(x,t)$, $\dfrac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)$ $\quad (s, j = 1, 2)$ *непрерывны по* x *и* t *при* $0 \le t \le$ $\le x \le 1$;

б) $A(x,x) \equiv 1$.

Тогда для любой $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0<\varepsilon\le x\le 1-\varepsilon} |S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)| = 0. \tag{3.17}$$

Важно, что теперь в силу замечательного свойства $Af|_{x=1} = 0$ не надо налагать трудно проверяемые условия типа условий регулярности Биркгофа, хотя сам оператор может быть и несамосопряженным.

Список литературы

[1] *Стеклов В. А.* Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions definies par les equations diffŕerentielles du second ordre et leurs applications au probl‘eme du devŕeloppement d'une fonction arbitraire en sŕerie procŕedant suivant les dites fonctions // Сообщ. Харьк. мат. о-ва (2). 1907. Т. 10. С. 97–199; Пер. на рус. : Об асимптотическом выражении некоторых функций, определяемых линейным дифференциальным уравнением второго порядка и их применении к задаче разложения произвольной функции в ряд по этим функциям / Ред. и коммент. Н. С. Ландскофа. Харьков : Изд-во Харьк. гос. ун-та, 1956. С. 1–138.

[2] *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Frunktionen-Systeme. Mathematische Annalen. 1910. Vol. 69. P. 331–371. doi:10.1007/BF01456326.

[3] *Хромов А. П., Халова В. А.* Проекторы Рисса и ряды Фурье по собственным функциям : учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. и асп. физ.-мат. спец. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2009. 28 с.

[4] *Хромов А. П.* Теоремы равносходимости для интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Мат. сб. 1981. Т. 114 (156), № 3. С. 378–405.

[5] *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М. : Наука, 1969. 528 с.

[6] *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / пер. с англ. Б. М. Левитан. М. : Изд-во иностр. лит, 1958. 476 с.

[7] *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.

[8] *Tamarkin J. D.* Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions // Math. Zeit. 1927. Vol. 27. P. 1–54.

[9] *Stone M. H.* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. Vol. 28, № 4. P. 695–761.

[10] *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containig a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol. 9, № 2. P. 219–231.

[11] *Birkhoff G. D.* Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. Vol 9, № 4. p. 373–397.

[12] *Минкин А. М.* Регулярность самосопряженных краевых условий // Мат. заметки. 1977. Т. 22, № 6. С. 835–846

[13] *Королева О. А., Хромов А. П.* Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12, № 2. С. 6–13

[14] *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33–50.

[15] *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменным пределом интегрирования // Интегральные преобразования и спектральные функции. Информ. бюллетень. 2006. Т. 6, № 1. С. 46–55.

[16] Хромов А. П. Интегральные операторы с ядрами, разрывными на ломаных линиях // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 115–142.

[17] *Хромов А. П., Кувардина Л. П.* О равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора с инволюцией // Изв. вузов. Математика. 2008. № 5. С. 67–76.

[18] *Корнев В. В., Хромов А. П.* Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 4. С. 18–33.

[19] *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных функций интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 6. С. 733–835.

[20] *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 1643–1646.

Оглавление