Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

А.П. Хромов, В.А. Халова

# Проекторы Рисса и ряды Фурье по собственным функциям

*Учебное пособие для студентов механико-математического факультета и аспирантов физико-математических специальностей*



ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009

УДК 517.984(075.8)
ББК 22.162я73
Х94

**Хромов А.П., Халова В.А.**
Х94 Проекторы Рисса и ряды Фурье по собственным функциям: Учеб. пособие для студентов мех.-мат. фак. и асп. физ.-мат. спец. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – 28 с.
ISBN 978-5-292-03945-7

Данное учебное пособие является компактным изложением выражения формулы частичной суммы ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям интегрального оператора через интеграл по контуру от резольвенты в комплексной области спектрального параметра, которая играет важную роль в спектральной теории операторов.

Д ля студентов механико-математического факультета, а также аспирантов, обучающихся по физико-математическим специальностям.

Рекомендуют к печати:
Кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики
Саратовского государственного университета
Доктор физико-математических наук, профессор *С.И. Дудов*

УДК 517.984(075.8)
ББК 22.162я73

Работа издана в авторской редакции

**ISBN 978-5-292-03945-7** 

# 1. Основные понятия и предложения

Через $A$ будем обозначать интегральные операторы вида

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt,$$

действующие в пространстве $L_2[0,1]$.

Мы будем рассматривать операторы Гильберта – Шмидта, т. е. когда ядро $A(x,t)$ удовлетворяет *условию Гильберта – Шмидта*:

$$\int_0^1\int_0^1 |A(x,t)|^2\,dx\,dt < +\infty.$$

*Сопряженный оператор* $A^*$ определяется из условия

$$(Af, g) = (f, A^*g),$$

где $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в $L_2[0,1]$:

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Таким образом, сопряженный оператор имеет вид

$$A^*g = \int_0^1 A^*(x,t)g(t)\,dt = \int_0^1 \overline{A(t,x)}g(t)\,dt,$$

т. е. $A^*(x,t) = \overline{A(t,x)}$.

Оператор $A$ является *самосопряженным* тогда и только тогда, когда

$$A(x,t) = \overline{A(t,x)}.$$

**Определение.** *Конечномерными операторами* называются операторы вида

$$A_n f = \sum_{k=1}^{n} (f, b_k) a_k(x), \tag{1}$$

где $\{b_k(t)\}_1^n$, $\{a_k(x)\}_1^n$ — линейно независимые системы элементов.

Вообще говоря, оператор называется *конечномерным*, если его область значений конечномерна. Легко показать, что конечномерный оператор всегда имеет вид (1).

Итак, пусть $A$ — оператор Гильберта — Шмидта. Его ядро можно представить в виде ряда

$$A(x,t) = \sum_{k,j=1}^{\infty} a_{kj} \varphi_k(x) \overline{\varphi_j(t)},$$

сходящегося в $L_2([0,1] \times [0,1])$.

Здесь $\{\varphi_j\}_1^\infty$ — полная ортонормальная система в $L_2[0,1]$.

Рассмотрим также операторы

$$A_n f = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} \varphi_k(x) (f, \varphi_j).$$

**Теорема 1.** *Последовательность операторов $\{A_n\}_1^\infty$ сходится по норме операторов к оператору $A$, т. е.*

$$\|A - A_n\| \to \infty \quad \textit{при} \quad n \to \infty,$$

*где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве $L_2[0,1]$:*

$$\|f\| = \left( \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

**Доказательство.** Известно, что $\{\varphi_k(x)\varphi_j(t)\}$ есть полная ортонормальная система в $L_2^2 = L_2[0,1] \times L_2[0,1]$. Поэтому имеет место равенство Парсеваля:

$$\int_0^1 \int_0^1 |A(x,t)|^2 \, dx \, dt = \sum_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2.$$

Тогда

$$\int_0^1\int_0^1 |A(x,t)-A_n(x,t)|^2\,dx\,dt = \int_0^1\int_0^1 |A(x,t)|^2\,dx\,dt - \sum_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|^2 =$$

$$= \sum_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}|^2 - \sum_{k,j=1}^{n} |a_{kj}|^2 \to 0, \quad n\to\infty. \tag{2}$$

С другой стороны, имеем

$$\left\|\int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt\right\| = \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt\right|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Применим интегральное неравенство Коши – Буняковского к внутреннему интегралу правой части:

$$\left|\int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt\right| \le \left(\int_0^1 |A(x,t)|^2\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(t)|^2\,dt\right)^{1/2} =$$

$$= \|f\| \left(\int_0^1 |A(x,t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда

$$\left|\int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt\right|^2 \le \|f\|^2 \int_0^1 |A(x,t)|^2\,dt.$$

Тогда имеет место следующее неравенство:

$$\int_0^1 \left|\int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt\right|^2 dx \le \|f\|^2 \int_0^1\int_0^1 |A(x,t)|^2\,dt\,dx.$$

Таким образом,

$$\left\|\int_0^1 A(x,t)f(t)\,dt\right\| \le \|f\| \left(\int_0^1\int_0^1 |A(x,t)|^2\,dt\,dx\right)^{1/2}.$$

Поэтому в силу (2) получаем

$$\|A - A_n\| = \left\| \int_0^1 [A(x,t) - A_n(x,t)] f(t)\, dt \right\| \leq$$

$$\leq \|f\| \left( \int_0^1 \int_0^1 |A(x,t) - A_n(x,t)|^2\, dx\, dt \right)^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Теорема доказана.

## 2. Аналитические оператор-функции

Рассмотрим степенной ряд вида

$$F(\lambda) = F_0 + (\lambda - \lambda_0) F_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 F_2 + \ldots, \tag{3}$$

где $F_i$ — интегральные операторы Гильберта – Шмидта.

Под сходимостью ряда (3) понимается сходимость по норме операторов, при этом остаются справедливыми все факты из теории степенных рядов (только вместо модуля всюду следует писать норму оператора).

Аналогично скалярному случаю можно показать, что радиус круга сходимости степенного ряда (3) определяется по *формуле Коши – Адамара*:

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{\|F_n\|}}.$$

Оператор-функция $F(\lambda)$ называется аналитической в области $G$, если она разлагается в степенной ряд в окрестности каждой точки области $G$.

Имеет место *теорема Коши:*

$$\int_\Gamma F(\lambda)\, d\lambda = 0 \tag{4}$$

по любому замкнутому контуру $\Gamma$, целиком лежащем в области $G$.

Из (4) вытекает *формула Коши:*

$$F(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu,$$

где $\lambda$ — любая точка, которая лежит внутри замкнутого контура $\Gamma$.

**Определение.** Оператор-функция $F(\lambda)$ называется *мероморфной в области* $G$, если она в этой области имеет представление

$$F(\lambda) = \frac{\tilde{F}(\lambda)}{f(\lambda)},$$

где $\tilde{F}(\lambda)$ аналитическая оператор-функция в $G$, $f(\lambda)$ обычная аналитическая функция в той же области.

Если $F(\lambda)$ мероморфна в любой подобласти всего пространства, то она называется просто *мероморфной*.

Если $\lambda_0$ — произвольный полюс мероморфной оператор-функции $F(\lambda)$, то в достаточно малой окрестности $\lambda_0$ имеет место разложение в ряд Лорана:

$$F(\lambda) = \frac{F_{-\alpha}}{(\lambda - \lambda_0)^{\alpha}} + \ldots + \frac{F_{-1}}{(\lambda - \lambda_0)} + F_0 + F_1(\lambda - \lambda_0) + \ldots . \qquad (5)$$

В разложении (5) $\alpha$ называется *порядком полюса*, а коэффициент при $(\lambda - \lambda_0)^{-1}$, т.е. $F_{-1}$ *вычетом* функции $F(\lambda)$ в точке $\lambda_0$ и обозначается $\operatorname{Res} F(\lambda_0)$.

**Теорема вычетов.** *Пусть* $\Gamma$ — *некоторый замкнутый контур, не содержащий полюсов. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} F(\lambda)\, d\lambda = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} F(\lambda_k),$$

*где суммирование идет по тем* $\lambda_k$, *которые лежат внутри контура* $\Gamma$.

У мероморфной оператор-функции в каждой конечной части плоскости может быть только конечное число полюсов.

# 3. Резольвента и ее свойства

**Определение.** *Резольвентой* (или *резольвентой Фредгольма*) интегрального оператора $A$ называется следующая оператор-функция:

$$R_{\lambda}(A) = (E - \lambda A)^{-1} A,$$

где $E$ — единичный оператор, $\lambda$ — комплексный параметр.

Комплексное число $\lambda$ называется *регулярной точкой*, если оператор $(E - \lambda A)^{-1}$ ограничен.

Таким образом, $R_\lambda(A)$ есть оператор-функция, определенная на множестве регулярных точек.

Появление понятия резольвенты связано со знаменитой теорией Фредгольма, в которой рассматривается уравнение Фредгольма второго рода:

$$y = f + \lambda Ay,$$

где $A$ — вполне непрерывный оператор, откуда следует

$$y = (E - \lambda A)^{-1} f = f + \lambda (E - \lambda A)^{-1} Af = f + \lambda R_\lambda(A) f.$$

**Теорема 2.** *Резольвента $R_\lambda(A)$ допускает разложение в ряд Неймана*

$$R_\lambda(A) = A + \lambda A^2 + \lambda^2 A^3 + \ldots,$$

*сходящийся по норме операторов в круге радиуса*

$$r = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\|A^n\|}}.$$

**Следствие.** *Резольвента $R_\lambda(A)$ в круге радиуса $r$ представляет собой аналитическую оператор-функцию.*

Покажем, что *если $A$ — оператор Гильберта – Шмидта, то $R_\lambda(A)$ мероморфна.*

**Лемма 1.** *Пусть $A$ и $M$ — операторы Гильберта – Шмидта, причем*

$$Af = Mf + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k,$$

*где $\{v_k\}$ и $\{g_k\}$ — линейно независимые системы элементов. Если $R_\lambda(A)$, $R_\lambda(M)$ существуют и $\Delta(\lambda) \neq 0$, то имеет место формула*

$$R_\lambda(A) f = R_\lambda(M) f + \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{k=1}^{m} g_k(\lambda) \sum_{j=1}^{m} ((E - \lambda M)^{-1} f, v_j) \Delta_{jk}(\lambda), \quad (6)$$

*где $\Delta(\lambda) = \det \|\delta_{jk} - \lambda(g_k(\lambda), v_j)\|_1^m$, $g_k(\lambda) = (E - \lambda M)^{-1} g_k$, $\delta_{kj}$ — символ Кронекера, $\Delta_{jk}(\lambda)$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя $\Delta(\lambda)$.*

**Доказательство.** Пусть $y = R_\lambda(A) f = (E - \lambda A)^{-1} Af$. Тогда $y - \lambda Ay = Af$, или

$$(E - \lambda M) y - \lambda \sum_{k=1}^{m} (y, v_k) g_k = Mf + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k. \quad (7)$$

Применяя $(E-\lambda M)^{-1}$ к (7) получаем

$$y-\lambda\sum_{k=1}^{m}(y,v_k)g_k(\lambda)=R_\lambda(M)f+\sum_{k=1}^{m}(f,v_k)g_k(\lambda), \tag{8}$$

где $g_k(\lambda)=(E-\lambda M)^{-1}g_k$.

Из (8) следует, что

$$y=R_\lambda(M)f+\sum_{k=1}^{m}c_kg_k(\lambda). \tag{9}$$

Чтобы найти $c_k$ подставим (9) в (8):

$$R_\lambda(M)f+\sum_{k=1}^{m}c_kg_k(\lambda)-\lambda\sum_{k=1}^{m}\left(R_\lambda(M)f+\sum_{j=1}^{m}c_jg_j(\lambda),v_k\right)g_k(\lambda)=$$

$$=R_\lambda(M)f+\sum_{k=1}^{m}(f,v_k)g_k(\lambda).$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{m}c_kg_k(\lambda)-\lambda\sum_{k=1}^{m}(R_\lambda(M)f,v_k)g_k(\lambda)-$$

$$-\lambda\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}c_j(g_j(\lambda),v_k)g_k(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}(f,v_k)g_k(\lambda),$$

или

$$\sum_{k=1}^{m}\left(c_k-\lambda\sum_{j=1}^{m}c_j(g_j(\lambda),v_k)\right)g_k(\lambda)=\sum_{k=1}^{m}\left(f+\lambda R_\lambda(M)f,v_k\right)g_k(\lambda).$$

Из линейной независимости $\{g_k\}$ следует линейная независимость $\{g_k(\lambda)\}$. Поэтому

$$c_k-\lambda\sum_{j=1}^{m}c_j(g_j(\lambda),v_k)=(f+\lambda R_\lambda(M)f,v_k),\quad k=1,\ldots,m. \tag{10}$$

Так как

$$f+\lambda R_\lambda(M)f=(E+\lambda(E-\lambda M)^{-1}M)f=$$

$$= (E - \lambda M)^{-1}(E - \lambda M + \lambda M)f = (E - \lambda M)^{-1}f,$$

то

$$\sum_{k=1}^{m} c_j(\delta_{jk} - \lambda(g_j(\lambda), v_k)) = ((E - \lambda M)^{-1}f, v_k), \quad k = 1, \ldots, m, \tag{11}$$

где $\delta_{jk}$ — символ Кронекера. Определитель этой системы есть $\Delta(\lambda) \neq 0$. Поэтому, решая систему (11), получаем:

$$c_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \sum_{j=1}^{m} ((E - \lambda M)^{-1}f, v_j)\Delta_{jk}(\lambda), \tag{12}$$

где $\Delta_{jk}(\lambda)$ — алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя $\Delta(\lambda)$. Подставляя (12) в (9), придем к (6).

Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Если* $\Delta(\lambda) \neq 0$ *и* $R_\lambda(M)$ *существует, то* $R_\lambda(A)$ *существует и справедлива формула* (6).

**Доказательство.** Пусть $\Delta(\lambda) \neq 0$, $R_\lambda(M)$ существует. Покажем, что правая часть (9), где $c_k$ определяется из (10), есть $R_\lambda(A)f$. Находя отсюда $c_k$ и подставляя в (9), придем к (6).

В самом деле, в силу (10) правая часть (6), которую обозначим через $y$, есть

$$y = R_\lambda(M)f + \sum_{j=1}^{m} c_j g_j(\lambda). \tag{13}$$

Умножим обе части (13) скалярно на $v_k$, $k = 1, \ldots, m$:

$$(y, v_k) = (R_\lambda(M)f, v_k) + \sum_{j=1}^{m} c_j(g_j(\lambda), v_k), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Отсюда

$$\lambda \sum_{k=1}^{m} (y, v_k)g_k(\lambda) = \lambda \sum_{k=1}^{m} (R_\lambda(M)f, v_k)g_k(\lambda) +$$

$$+ \lambda \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} c_j(g_j(\lambda), v_k)g_k(\lambda). \tag{14}$$

Из (13) и (14) получим:

$$y - \lambda \sum_{k=1}^{m} (y, v_k)g_k(\lambda) = R_\lambda(M)f + \sum_{k=1}^{m} c_k g_k(\lambda) -$$

$$
-\lambda \sum_{k=1}^{m} (R_\lambda(M)f, v_k) g_k(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{m} g_k(\lambda) \sum_{j=1}^{m} c_j (g_j(\lambda), v_k) =
$$

$$
= R_\lambda(M)f + \sum_{k=1}^{m} g_k(\lambda) \left[ c_k - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j (g_j(\lambda), v_k) \right] -
$$

$$
-\lambda \sum_{k=1}^{m} g_k(\lambda)(R_\lambda(M)f, v_k).
$$

В силу (10)

$$
c_k - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j (g_j(\lambda), v_k) = (f + \lambda R_\lambda(M)f, v_k).
$$

Отсюда получаем:

$$
y - \lambda \sum_{k=1}^{m} (y, v_k) g_k(\lambda) = R_\lambda(M)f + \sum_{k=1}^{m} g_k(\lambda)(f + \lambda R_\lambda(M)f, v_k) -
$$

$$
-\sum_{k=1}^{m} g_k(\lambda)(\lambda R_\lambda(M)f, v_k) = R_\lambda(M)f + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k(\lambda),
$$

т. е.

$$
y - \lambda \sum_{j=1}^{m} (y, v_j) g_k(\lambda) = R_\lambda(M)f + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k(\lambda) \tag{15}
$$

(ср. (8)). Применяя оператор $E - \lambda M$ к (15), получим:

$$
y - \lambda M y - \lambda \sum_{k=1}^{m} (y, v_k) g_k = Mf + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k,
$$

или

$$
y - \lambda A y = Af. \tag{16}
$$

Утверждаем, что $y - \lambda A y = 0$ имеет только нулевое решение. Для этого надо снова повторить рассуждения в начале доказательства с учетом того, что $f = 0$. Поэтому из (16) получаем $y = (E - \lambda A)^{-1} A f = R_\lambda(A) f$. Лемма доказана.

**Следствие 1.** *Если* $\Delta(\lambda) = 0$, *то* $\lambda$ — *характеристическое значение.*

**Доказательство.** Пусть $\Delta(\lambda) = 0$. Тогда однородная система

$$c_k - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j (g_j(\lambda), v_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{17}$$

имеет ненулевое решение. Положим

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k g_k(\lambda). \tag{18}$$

Тогда

$$(E - \lambda M)\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k g_k. \tag{19}$$

В силу (18) имеем

$$(\varphi, v_j) = \sum_{k=1}^{m} c_k (g_k(\lambda), v_j),$$

а в силу (17)

$$\sum_{k=1}^{m} c_k (g_k(\lambda), v_j) = \frac{c_j}{\lambda},$$

поэтому

$$c_k = \lambda(\varphi, v_k). \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), получаем:

$$(E - \lambda M)\varphi = \lambda \sum_{k=1}^{m} (\varphi, v_k) g_k.$$

Поэтому

$$\varphi - \lambda A\varphi = (E - \lambda M)\varphi - \lambda \sum_{k=1}^{m} (\varphi, v_k) g_k = 0,$$

т. е. $\varphi$ — собственный вектор, $\lambda$ — характеристическое значение.

**Следствие 2.** *Если $\lambda$ — характеристическое значение, то*

$$\Delta(\lambda) = 0.$$

**Доказательство.** Пусть $\lambda$ — характеристическое значение, т. е. $y - \lambda Ay = 0$, $y \neq 0$. Тогда

$$y - \lambda My - \lambda \sum_{k=1}^{m} (y, v_k) g_k = 0.$$

Отсюда как в доказательстве леммы 1 приходим к тому, что

$$y = \sum_{k=1}^{m} c_k g_k(\lambda)$$

и $c_k$ удовлетворяет системе:

$$c_k - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j (g_j(\lambda), v_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Но $c_k$ одновременно в нуль не обращаются (так как $y \neq 0$). Значит, определитель $\Delta(\lambda)$ этой системы равен нулю. Что и требовалось доказать.

Таким образом, *характеристические числа оператора $A$ совпадают с нулями определителя $\Delta(\lambda)$.*

**Теорема 3.** *Если $A$ — оператор Гильберта – Шмидта, то резольвента $R_\lambda(A)$ есть мероморфная оператор-функция параметра $\lambda$.*

**Доказательство.** Зададим $\varepsilon > 0$. По теореме 1 представим $A$ в виде

$$Af = Mf + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k,$$

где $\|M\| < \varepsilon$. Пусть $0 < q < 1$ и $\lambda$, такие что $|\lambda| \|M\| \leq q$. Тогда ряд

$$M + \lambda M^2 + \lambda^2 M^3 + \ldots$$

сходится в круге радиуса $r = |\lambda|$. Но по теореме 2 этот ряд имеет своей суммой $R_\lambda(M)$. Поэтому, в частности, при $|\lambda| < \dfrac{q}{\varepsilon}$ в силу следствия теоремы 2 $R_\lambda(M)$ представляет собой аналитическую оператор-функцию. Поэтому в круге $|\lambda| < \dfrac{q}{\varepsilon}$ в силу следствий 1, 2 леммы 1 резольвента $R_\lambda(A)$ является мероморфной. А в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $R_\lambda(A)$ есть мероморфная функция во всей комплексной плоскости.

**Теорема 4.** *Если $\lambda_0$ — характеристическое значение, то в окрестности $\lambda_0$ разложение $R_\lambda(A)f$ в ряд Лорана имеет вид*

$$R_\lambda(A)f = \frac{A_{-n}f}{(\lambda-\lambda_0)^n} + \frac{A_{-n+1}f}{(\lambda-\lambda_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{A_{-1}f}{\lambda-\lambda_0} + A_0 f + (\lambda-\lambda_0)A_1 f + \ldots,$$

*причем $A_{-n}, \ldots, A_{-1}$ — конечномерные операторы.*

Это утверждение следует из теоремы 3 и леммы 1.

**Теорема 5 (тождество Гильберта).** *Пусть $\lambda \neq \mu$, $\lambda$ и $\mu$ не являются характеристическими числами оператора $A$. Тогда имеет место формула*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

**Доказательство.** Прежде всего покажем, что

$$(E - \lambda A)^{-1} A = A (E - \lambda A)^{-1}. \tag{21}$$

В самом деле, имеем $A(E - \lambda A) = (E - \lambda A)A$. Откуда

$$(E - \lambda A)^{-1} A (E - \lambda A)(E - \lambda A)^{-1} =$$

$$= (E - \lambda A)^{-1} (E - \lambda A) A (E - \lambda A)^{-1},$$

т. е. справедливость равенства (21) доказана. Поэтому

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (E - \lambda A)^{-1} A - (E - \mu A)^{-1} A =$$

$$= (E - \lambda A)^{-1} A - A (E - \mu A)^{-1} =$$

$$= (E - \lambda A)^{-1} (A(E - \mu A) - (E - \lambda A)A)(E - \mu)^{-1} =$$

$$= (E - \lambda A)^{-1} (\lambda - \mu) A^2 (E - \mu A)^{-1} = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A).$$

Теорема доказана.

**Следствие 1.** $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

**Доказательство.** Имеем

$$R_\lambda R_\mu = \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu} = \frac{R_\mu - R_\lambda}{\mu - \lambda} = R_\mu R_\lambda.$$

**Следствие 2.** *Если $B$ — решение уравнения*

$$B = R_\mu(A) + (\lambda - \mu) B R_\mu(A),$$

*то $B = R_\lambda(A)$.*

**Доказательство.** Имеем

$$B(E - (\lambda - \mu) R_\mu(A)) = R_\mu(A),$$

т.е.

$$B(E - (\lambda - \mu)(E - \mu A)^{-1}) A = (E - \mu A)^{-1} A.$$

Отсюда получаем следующее равенство:

$$B(E - \mu A - (\lambda - \mu)A)(E - \mu A)^{-1} = A(E - \mu A)^{-1},$$

или

$$B(E - \lambda A)(E - \mu A)^{-1} = A(E - \mu A)^{-1}.$$

Таким образом,

$$B(E - \lambda A) = A.$$

Утверждаем, что $E - \lambda A$ обратим. В противном случае по альтернативе Фредгольма существует $\varphi \neq 0$, такое что $\varphi - \lambda A\varphi = 0$. Тогда

$$B(E - \lambda A)\varphi = B \cdot 0 = 0 = A\varphi.$$

Значит и $\varphi = 0$ — противоречие. Таким образом, $B = R_\lambda(A)$.

**Следствие 3.** *Если $B$ удовлетворяет уравнению*

$$B = R_\mu(A) + (\lambda - \mu)R_\mu(A)B,$$

*то* $B = R_\lambda(A)$.

**Доказательство.** Имеем

$$B^* = R_{\overline{\mu}}(A^*) + (\overline{\lambda} - \overline{\mu})B^* R_{\overline{\mu}}(A^*).$$

Тогда по следствию 2 $B^* = R_{\overline{\lambda}}(A^*)$. Следовательно, $B = R_\lambda(A)$. Что и требовалось доказать.

# 4. Проекторы Рисса. Представление частичной суммы ряда Фурье контурным интегралом

Пусть $\gamma$ — какой-нибудь контур в $\lambda$-плоскости, не проходящий через характеристические значения. Оператор

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\lambda \, d\lambda$$

называется *проектором Рисса.* Исследуем этот оператор.

**Теорема 6.** $P^2 = P$.

**Доказательство.** Имеем

$$P^2 = P\Big( -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_\lambda\, d\lambda\Big) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} R_\mu\, d\mu \int\limits_{\gamma} R_\lambda\, d\lambda,$$

где $\gamma_1$ — другой контур, близкий к контуру $\gamma$ (для определенности $\gamma_1$ содержит $\gamma$ и между $\gamma$ и $\gamma_1$ нет характеристических чисел оператора $A$). Тогда, используя тождество Гильберта, имеем

$$P^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} d\mu \int\limits_{\gamma} R_\mu R_\lambda\, d\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} d\mu \int\limits_{\gamma} \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda-\mu}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} d\mu \int\limits_{\gamma} \frac{R_\lambda}{\lambda-\mu}\, d\lambda - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} d\mu \int\limits_{\gamma} \frac{R_\mu}{\lambda-\mu}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma} R_\lambda\, d\lambda \int\limits_{\gamma_1} \frac{d\mu}{\lambda-\mu} - \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} R_\mu\, d\mu \int\limits_{\gamma} \frac{d\lambda}{\lambda-\mu} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_\lambda\, d\lambda = P.$$

Что и требовалось доказать.

**Теорема 7.** $AP = PA$.

**Доказательство.** Имеем

$$AP = A\Big( -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_\lambda\, d\lambda\Big) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} AR_\lambda\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} R_\lambda A\, d\lambda = PA.$$

Что и требовалось доказать.

**Теорема 8.** *Пусть $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — два непересекающихся замкнутых контура, не проходящих через характеристические числа оператора $A$, и $P_j = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_j} R_\lambda\, d\lambda$. Тогда $P_1 P_2 = 0$.*

**Доказательство.** Используя тождество Гильберта, имеем

$$P_1P_2 = P_1\Big( -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} R_\mu\, d\mu\Big) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{\gamma_1} R_\lambda\, d\lambda \int\limits_{\gamma_2} R_\mu\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1} d\lambda \int\limits_{\gamma_2} \frac{R_\lambda - R_\mu}{\lambda - \mu}\, d\mu = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1} R_\lambda d\lambda \int\limits_{\gamma_2} \frac{d\mu}{\lambda - \mu} -$$

$$-\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_2} R_\mu d\mu \int\limits_{\gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda - \mu} = 0,$$

так как внутренние интегралы равны нулю.

Пусть теперь $\gamma = \{\lambda | \, |\lambda - \lambda_0| = \delta\}$, где $\lambda_0$ характеристическое значение оператора $A$, а $\gamma$ — контур, не содержащий других характеристических чисел.

Обозначим $P_{\lambda_0} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda d\lambda$ и рассмотрим многообразие $\mathfrak{N}_{\lambda_0} = P_{\lambda_0} L_2$. По теореме 4 $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ конечномерное пространство.

**Лемма 3.** *Оператор $A$ инвариантен на $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$, т.е. если $f \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$, то и $Af \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$.*

**Доказательство.** Если $f \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$, то $f = P_{\lambda_0} f$. Поэтому

$$Af = AP_{\lambda_0} f = A\left(-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda f \, d\lambda\right) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda (Af) d\lambda = P_{\lambda_0} Af.$$

Лемма доказана.

Таким образом, оператор $A$ можно рассматривать на конечномерном пространстве $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$.

**Лемма 4.** *Пусть $A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$ есть $A$ на $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Тогда $A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$ — конечномерный оператор, имеющий только одно характеристическое значение $\lambda_0$.*

**Доказательство.** Так как $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ конечномерно, то и $A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$ конечномерный. Покажем, что $\lambda_0$ есть его характеристическое значение.

В самом деле, пусть $\varphi \neq 0$ и $\varphi - \lambda_0 A\varphi = 0$. Тогда

$$\varphi - \lambda A\varphi + (\lambda - \lambda_0) A\varphi = 0.$$

Отсюда

$$(E - \lambda A)\varphi + (\lambda - \lambda_0) A\varphi = 0.$$

Значит,

$$\varphi + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda \varphi = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \left[\frac{\varphi}{\lambda - \lambda_0} + R_\lambda \varphi\right] d\lambda = 0,$$

т. е. $\varphi = P_{\lambda_0}\varphi$. Тогда $A\varphi = A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}\varphi = \frac{1}{\lambda_0}\varphi$, т.е. $\lambda_0$ характеристическое значение оператора $A$.

Пусть $\lambda_1$ — другое характеристическое число для $A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}$, т.е. $\varphi_1 \neq 0$ и $\varphi_1 - \lambda_1 A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}\varphi_1 = 0$. Тогда

$$\varphi_1 - \lambda A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}\varphi_1 + (\lambda - \lambda_1)A_{\mathfrak{N}_{\lambda_0}}\varphi_1 = 0$$

и

$$\varphi_1 + (\lambda - \lambda_1)R_\lambda\varphi_1 = 0.$$

Пусть контуры $\gamma_1 = \{\lambda|\ |\lambda - \lambda_1| = \delta\}$ и $\gamma$ не пересекаются. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{\varphi_1}{\lambda - \lambda_1}d\lambda = 0.$$

Значит, имеет место следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R_\lambda\varphi_1 = 0,$$

т.е. $P_{\lambda_0}\varphi_1 = 0$. Но $\varphi_1 \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Следовательно, $\varphi_1 = P_{\lambda_0}\varphi_1 = 0$, т.е. получилось противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 5.** *Имеет место следующая формула:*

$$\begin{gathered}(E - \mu A)^s R_\lambda = (E - \mu A)^{s-1}A + (\lambda - \mu)(E - \mu A)^{s-2}A^2 + \\ + \cdots + (\lambda - \mu)^{s-1}A^s + (\lambda - \mu)^s R_\lambda A^s.\end{gathered} \tag{22}$$

**Доказательство.** Формулу (22) докажем по индукции. Имеем

$$(E - \mu A)R_\lambda = (E - \mu A)(E - \lambda A)^{-1}A =$$

$$= (E - \lambda A + (\lambda - \mu)A)(E - \lambda A)^{-1}A = A + (\lambda - \mu)A(E - \lambda A)^{-1}A =$$

$$= A + (\lambda - \mu)(E - \lambda A)^{-1}A^2 = A + (\lambda - \mu)R_\lambda A.$$

Тем самым при $s = 1$ формула (22) получена.

Пусть формула (22) установлена при некотором $s$. Покажем, что она верна и при $s + 1$. Имеем

$$(E - \mu A)^{s+1}R_\lambda = (E - \mu A)(E - \mu A)^s R_\lambda = (E - \mu A)\{(E - \mu A)^{s-1}A +$$

$$+ (\lambda - \mu)(E - \mu A)^{s-2}A^2 + \cdots + (\lambda - \mu)^{s-1}A^s + (\lambda - \mu)^s R_\lambda A^s\} =$$

$$= (E - \mu A)^s A + (\lambda - \mu)(E - \mu)^{s-1} A^2 + \cdots + (\lambda - \mu)^{s-1}(E - \mu A) A^s +$$
$$+ (\lambda - \mu)^s \{A + (\lambda - \mu) R_\lambda A\} A^s.$$

Лемма доказана.

**Лемма 6.** *Если* $(E - \lambda_0 A)^s f = 0$, *то*

$$R_\lambda f = -\frac{f}{\lambda - \lambda_0} - \frac{\lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^2} f_1 - \frac{\lambda \lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^3} f_2 - \cdots - \frac{\lambda^{s-1} \lambda_0}{(\lambda - \lambda_0)^{s+1}} f_s,$$

*где* $f_j = (E - \lambda_0 A) f_{j-1}$ *и* $f_0 = f$.

**Доказательство.** Имеем

$$f_1 = (E - \lambda_0 A) f_0 = (E - \lambda A + (\lambda - \lambda_0) A) f_0.$$

Отсюда $(E - \lambda A)^{-1} f_1 = (E + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda) f_0$. Но $(E - \lambda A)^{-1} = E + \lambda R_\lambda$. Поэтому

$$f_1 + \lambda R_\lambda f_1 = f_0 + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda f_0. \tag{23}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} f_2 + \lambda R_\lambda f_2 &= f_1 + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda f_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_s + \lambda R_\lambda f_s &= f_{s-1} + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda f_{s-1}, \\ 0 &= f_s + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda f_s. \end{aligned} \tag{24}$$

Умножаем первое соотношение в (24) на $\dfrac{\lambda}{\lambda - \lambda_0}$, второе — на $\dfrac{\lambda^2}{(\lambda - \lambda_0)^2}$, предпоследнее — на $\dfrac{\lambda^{s-1}}{(\lambda - \lambda_0)^{s-1}}$, последнее на $\dfrac{\lambda^s}{(\lambda - \lambda_0)^s}$, сложим их и прибавим еще (23). Получим:

$$f_1 + \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0} f_2 + \cdots + \frac{\lambda^{s-1}}{(\lambda - \lambda_0)^{s-1}} f_s =$$
$$= f_0 + \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0} f_1 + \cdots + \frac{\lambda^s}{(\lambda - \lambda_0)^s} f_s + (\lambda - \lambda_0) R_\lambda f_0.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Обозначим $\mathfrak{M}_{\lambda_0} = \{f \mid (E - \lambda_0 A)^{s_f} f = 0,\ s_f \in \mathbb{N}\}$.

**Теорема 9.** *Имеет место* $\mathfrak{N}_{\lambda_0} = \mathfrak{M}_{\lambda_0}$.

**Доказательство.** Докажем сначала, что $\mathfrak{N}_{\lambda_0} \subset \mathfrak{M}_{\lambda_0}$.

Пусть $f \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Тогда $f = P_{\lambda_0} f = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda f\, d\lambda$, где $\gamma$ — контур, содержащий только одно характеристическое значение $\lambda_0$. По лемме 5 имеем

$$(E-\lambda_0 A)^s R_\lambda f = (E-\lambda_0 A)^{s-1} A f + (\lambda-\lambda_0)(E-\lambda_0 A)^{s-2} A^2 f +$$

$$+ \cdots + (\lambda-\lambda_0)^{s-1} A^s f + (\lambda-\lambda_0)^s R_\lambda A^s f.$$

Отсюда

$$\frac{(E-\lambda_0 A)^s}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda f\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\lambda-\lambda_0)^s R_\lambda A^s f\, d\lambda.$$

Поэтому

$$(E-\lambda_0 A)^s f = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\lambda-\lambda_0)^s R_\lambda A^s f\, d\lambda. \qquad (25)$$

Пусть $\lambda_0$ является полюсом $R_\lambda$ порядка $\nu$. Тогда если $s = \nu$, то интеграл справа в (25) равен нулю, т.е. $(E-\lambda_0 A)^\nu f = 0$. Значит, $f \in \mathfrak{M}_{\lambda_0}$, т.е. $\mathfrak{N}_{\lambda_0} \subset \mathfrak{M}_{\lambda_0}$.

Установим теперь, что $\mathfrak{M}_{\lambda_0} \subset \mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Пусть $f \in \mathfrak{M}_{\lambda_0}$. Тогда по лемме 5 имеем

$$R_\lambda f = -\frac{f}{\lambda-\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{(\lambda-\lambda_0)^2} f_1 - \cdots - \frac{\lambda^{s-1}\lambda_0}{(\lambda-\lambda_0)^{s+1}} f_s.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R_\lambda f\, d\lambda = -f,$$

т.е. $f \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$. Теорема доказана.

**Определение.** Пусть $H_1$ и $H_2$ — два подпространства, причем $H_2 \subset H_1$. Система элементов $f_1, \ldots, f_s$ из $H_1$ называется *линейно независимой по модулю* $H_2$, если из того, что $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i f_i \in H_2$ следует, что $\alpha_i = 0$.

Введем в рассмотрение следующие множества:

$$\mathfrak{M}_j = \{f \,|\, (E-\lambda_0 A)^j f = 0\}.$$

Тогда очевидно, что $\mathfrak{M}_j \subset \mathfrak{M}_{j+1}$ и все $\mathfrak{M}_j$, начиная с некоторого, совпадают и равны $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$. Так как $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$ — конечномерно, то конечномерны и все $\mathfrak{M}_j$.

Пусть $s$ — минимальный номер, когда $\mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_{\lambda_0}$. Обозначим через $f_{11}, \ldots, f_{1\nu_1}$ систему элементов из $\mathfrak{M}_s$, являющейся максимально линейно независимой по модулю $\mathfrak{M}_{s-1}$.

**Лемма 7.** *Система элементов* $(E - \lambda_0 A)f_{11}, \ldots, (E - \lambda_0 A)f_{1\nu_1}$ *линейно независима по модулю* $\mathfrak{M}_{s-2}$.

**Доказательство.** Ясно, что система $\{(E - \lambda_0 A)f_{1j}\}$ принадлежит $\mathfrak{M}_{s-1}$. Пусть $\sum \beta_j (E - \lambda_0 A) f_{1j} \in \mathfrak{M}_{s-2}$. Тогда $\sum \beta_j f_{1j} \subset \mathfrak{M}_{s-1}$ и, значит, $\beta_j = 0$. Лемма доказана.

Дополним теперь систему $\{(E - \lambda_0 A)f_{1,j}\}$ элементами $f_{21}, \ldots, f_{2\nu_2}$ до максимальной линейно независимой системы по модулю $\mathfrak{M}_{s-2}$, т.е.

$$(E - \lambda_0 A)f_{11}, \ldots, (E - \lambda_0 A)f_{1\nu_1}, f_{21}, \ldots, f_{2\nu_2} \tag{26}$$

есть система элементов из $\mathfrak{M}_{s-1}$, максимально линейно независимая по модулю $\mathfrak{M}_{s-2}$. По лемме 6 система

$$(E - \lambda_0 A)^2 f_{11}, \ldots, (E - \lambda_0 A)^2 f_{1\nu_1}, (E - \lambda_0 A)f_{21}, \ldots, (E - \lambda_0 A)f_{2\nu_2}$$

линейно независима по модулю $\mathfrak{M}_{s-3}$. Образуем как и выше максимальную линейно независимую систему по модулю $\mathfrak{M}_{s-3}$:

$$\begin{gathered}(E - \lambda_0 A)^2 f_{11}, \ldots, (E - \lambda_0 A)^2 f_{1\nu_1}, \\ (E - \lambda_0 A)f_{21}, \ldots, (E - \lambda_0 A)f_{2\nu_2},\ f_{31}, \ldots, f_{3\nu_3}.\end{gathered} \tag{27}$$

Продолжая этот процесс, придем к системе

$$(E - \lambda_0 A)^{s-1} f_{11}, \ldots, (E - \lambda_0 A)^{s-1} f_{1\nu_1}, \ldots, f_{s1}, \ldots, f_{s\nu_s}. \tag{28}$$

Очевидно, что объединение всех систем (26)–(28) и еще $f_{11}, \ldots, f_{1\nu_1}$ есть максимальная линейно независимая система элементов из $\mathfrak{M}_{\lambda_0}$.

Обозначим по новому элементы этой системы. Теперь это система $\{\varphi_j\}$, где $\varphi_1 = (E - \lambda_0 A)^{s-1} f_{11}$, $\varphi_2 = (E - \lambda_0 A)^{s-2} f_{11}$, ..., $\varphi_s = f_{11}$, $\varphi_{s+1} = (E - \lambda_0 A)^{s-1} f_{12}$, $\varphi_{s+2} = (E - \lambda_0 A)^{s-2} f_{12}, \ldots$ Тогда получим

$$(E - \lambda_0 A)\varphi_k = \varepsilon_k \varphi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, p, \tag{29}$$

где $\varepsilon_k$ принимают значения 0 или 1, причем $\varepsilon_1 = 0$.

**Определение 5.** Система $\{\varphi_k\}$, удовлетворяющая (29), называется *системой собственных и присоединенных функций* (здесь если $\varepsilon_k = 0$, то $\varphi_k$ — собственная функция, если $\varepsilon_k = 1$, то $\varphi_k$ — присоединенная функция).

**Определение 6.** Пусть $\{u_j\}$ — некоторая линейно независимая система из $L_2[0,1]$. Система $\{v_j\} \in L_2[0,1]$ называется *биортогональной* к $\{u_j\}$, если $(u_j, v_k) = \delta_{jk}$, где $\delta_{jk}$ — символ Кронекера.

**Лемма 8.** *Имеет место следующая формула:*

$$P_{\lambda_0} f = \sum_{j=1}^{p} (f, \psi_j)\varphi_j,$$

*где $\{\psi_j\}_1^p$ — система, биортогональная к $\{\varphi_j\}_1^p$.*

**Доказательство.** Так как $\{\varphi_k\}$ есть базис в $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$, то

$$P_{\lambda_0} f = \sum_{k=1}^{p} a_k \varphi_k.$$

Обозначим через $\{g_j\}$ любую систему, биортогональную к $\{\varphi_k\}$, т.е. $(g_j, \varphi_k) = \delta_{jk}$. Покажем, что такая система существует.

Действительно, возьмем $g_1 = \varphi_1$, через $L$ обозначим линейную оболочку $\{\varphi_k\}_2^p$. Известно, что $L$ замкнуто. Тогда

$$\inf_{g \in L} \|\varphi_1 - g\| = \delta > 0.$$

По теореме Хана – Банаха существует линейный функционал $F_1$, такой что $F_1(\varphi_1) = 1$, $F_1(g) = 0$, $g \in L$ и $\|F_1\| = 1/\delta$. Он действует на пространстве линейных комбинаций системы $\{\varphi_k\}_1^p$. По той же теореме Хана – Банаха его можно продолжить до линейного функционала на всем $L_2[0,1]$. По теореме Рисса об общем виде линейного функционала $F_1(g) = (g, v_1)$. Проводим аналогичную процедуру для $\varphi_2$ и $L$, образованную из $\{\varphi_1, \varphi_3, \ldots, \varphi_p\}$, и получим $F_2(g) = (g, v_2)$, где $(v_2, \varphi_k) = \delta_{2k}$ и т. д. Таким образом, построим систему $v_1, \ldots, v_p$, такую что

$$(v_j, \varphi_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, p.$$

Теперь имеем $P_{\lambda_0} f = \sum\limits_1^p a_k \varphi_k$. Отсюда

$$a_j = (P_{\lambda_0} f, v_j) = (f, P_{\lambda_0}^* v_j).$$

Положим $\psi_k = P_{\lambda_0}^* v_k$. Тогда

$$P_{\lambda_0} f = \sum_{k=1}^{p} (f, \psi_k)\varphi_k,$$

$$(\varphi_k, \psi_j) = (\varphi_k, P^*_{\lambda_0} v_j) = (P_{\lambda_0}\varphi_k, v_j) = (\varphi_k, v_j) = \delta_{kj}.$$

Лемма доказана.

Все $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ разобьем на следующие группы (новая нумерация):

$$\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{1\nu_1}; \quad \varepsilon_{21}, \ldots, \varepsilon_{2\nu_2}; \quad \varepsilon_{s1}, \ldots, \varepsilon_{s\nu_s}$$

так, что $\varepsilon_{11} = 0$, $\varepsilon_{12} = 1, \ldots, \varepsilon_{1\nu_1} = 1; \ldots; \varepsilon_{s1} = 0$, $\varepsilon_{s2} = 1, \ldots, \varepsilon_{s\nu_s} = 1$, где $\varepsilon_{11} = \varepsilon_1$ и $\varepsilon_{s\nu_s} = \varepsilon_p$.

Соответственно $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ разобьются на такие группы:

$$\varphi_{11}, \ldots, \varphi_{1\nu_1};\ \varphi_{21}, \ldots, \varphi_{2\nu_2};\ \ldots;\ \varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{s\nu_s}.$$

Тогда

$$(E - \lambda_0 A)\varphi_{ji} = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ \varphi_{j,i-1}, & i > 1. \end{cases}$$

Проведем следующую перенумерацию $\psi_1, \ldots, \psi_p$:

$$\psi_{11} = \psi_{\nu_1}, \quad \psi_{12} = \psi_{\nu_1 - 1}, \quad \ldots, \quad \psi_{1\nu_1} = \psi_1,$$

$$\psi_{21} = \psi_{\nu_1+\nu_2}, \quad \ldots, \quad \psi_{2\nu_2} = \psi_{\nu_1+1}$$

и т. д., т. е. в каждой группе нумеруем $\psi_{jk}$ в обратном порядке. Тогда получаем следующее представление для $P_{\lambda_0} f$:

$$P_{\lambda_0} f = \sum_1^p (f, \psi_k)\varphi_k = \int_0^1 A_{-1}(x,t) f(t)\,dt,$$

где

$$A_{-1}(x,t) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\nu_j} \varphi_{ji}(x)\overline{\psi_{j,\nu_j-i+1}(t)}.$$

**Лемма 9.** *Функции $\psi_{jk}(x)$ удовлетворяют уравнениям*

$$(E - \bar\lambda_0 A^*)\psi_{j1} = 0,$$

$$(E - \bar\lambda_0 A^*)\psi_{j,\nu_j-i+1} = \psi_{j,\nu_j-i}, \quad j = 1, \ldots, s, \quad i = 1, \ldots, \nu_j - 1.$$

**Доказательство.** Имеем

$$(E - \lambda_0 A)P_{\lambda_0} f = P_{\lambda_0}(E - \lambda_0 A) f =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\nu_j} \varphi_{ji}(x)((E - \lambda_0 A) f, \psi_{j,\nu_j-i+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\nu_j} \varphi_{ji}(x)(f, (E - \bar{\lambda}_0 A^*)\psi_{j,\nu_j - i+1}),$$

$$(E - \lambda_0 A)P_{\lambda_0} f = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\nu_j} (E - \lambda_0 A)\varphi_{ji}(x)(f, \psi_{j,\nu_j - i+1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=2}^{\nu_j} \varphi_{j,i-1}(x)(f, \psi_{j,\nu_j - i+1}) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{\nu_j - 1} \varphi_{ji}(x)(f, \psi_{j,\nu_j - i}).$$

Отсюда следует утверждение леммы.

**Лемма 10.** *Если $\psi$ — с.п.ф. сопряженного оператора, соответствующего характеристическому значению $\bar{\lambda}_1$, а $\varphi$ — с.п.ф. исходного оператора для характеристического значения $\lambda_0$ и $\lambda_1 \neq \lambda_0$, то $(\psi, \varphi) = 0$.*

**Доказательство.** Имеем $\psi = P^*_{\bar{\lambda}_1}\psi$, $\varphi = P_{\lambda_0}\varphi$. Поэтому

$$(\psi, \varphi) = (P^*_{\bar{\lambda}_1}\psi, P_{\lambda_0}\varphi) = (\psi, P_{\lambda_1} P_{\lambda_0}\varphi) = 0.$$

Лемма доказана.

Из лемм 8 и 10 получаем

**Теорема 10.** *Имеет место формула*

$$S_r(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda| = r} R_\lambda f \, d\lambda,$$

*где* $S_r(f, x) = \sum\limits_{|\lambda_k| < r} (f, \psi_k)\varphi_k$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *системы всех с.п.ф. для тех $\lambda_k$, для которых $|\lambda_k| < r$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — система биортогональная всей системе $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$. Нумерация $\{\varphi_k\}$ идет в порядке возрастания модулей характеристических чисел с учетом кратности (т.е. каждому $\varphi_k$ соответствует теперь только одно $\lambda_k$, или иначе, одно и то же $\lambda_k$ повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных и присоединенных функций.*

Утверждение теоремы дает важное представление частичной суммы $S_r(f, x)$ ряда Фурье по с.п.ф. через интеграл по контуру от резольвенты. Это представление играет значительную роль в спектральной теории операторов.

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


*Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

*Хромов А.П.* Конечномерные возмущения вольтерровых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2004. Т. 10. С.3 163.

*Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Учебное издание

ХРОМОВ Август Петрович,
ХАЛОВА Виктория Анатольевна

# Проекторы Рисса и ряды Фурье по собственным функциям

Учебное пособие для студентов
механико-математического факультета
и аспирантов физико-математических специальностей

Ответственный за выпуск В.А. Халова
Технический редактор Л.В. Агальцова
Макет подготовлен в учебно-методической лаборатории
дифференциальных уравнений и прикладной математики

Подписано в печать 30.09.2009.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Report. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,63 (1,75). Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 100. Заказ 102.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.