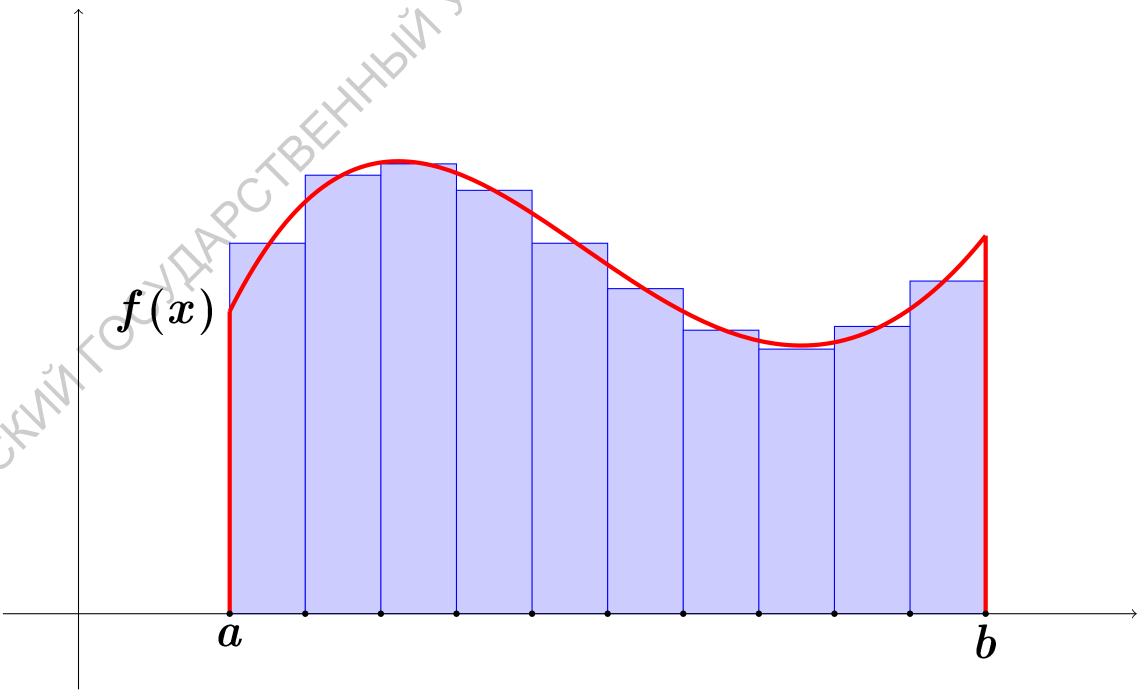
Бондаренко Н.П.

Практические задания по методам вычислений



УДК 519.6

Бондаренко Н.П. Практические задания по методам вычислений: Учеб. пособие для студ. матем., техн. спец. Саратов, 2014. – 36 с.

Учебное пособие представляет собой сборник заданий по методам вычислений для проведения практических занятий со студентами математических и технических специальностей в разных организационных формах.

Рекомендуют к печати:

Кафедра математической физики
и вычислительной математики
Саратовского государственного университета
имени Н.Г. Чернышевского

Кандидат физико-математических наук *В.С. Рыхлов*

Учебное пособие содержит задания по методам вычислений, предлагавшиеся в разные годы студентам факультета компьютерных наук и информационных технологий СГУ. Материал пособия охватывают следующие разделы: интерполирование и приближение функций, численное дифференцирование и интегрирование, решение систем линейных алгебраических уравнений, итерационные методы решения нелинейных уравнений.

Задания предназначены для разных форм практических занятий. Раздел «Теоретические задачи» содержит задачи для решения на аудиторных занятиях «ручкой на бумаге» с применением калькулятора, может также использоваться для самостоятельной работы студентов. Для некоторых наиболее важных задач разобраны решения. Остальные могут быть решены с применением теории из курса лекций или из учебников [1, 2, 3, 4]. Некоторые необязательные задания этого раздела предполагают программирование на компьютере, они помечены символом «звездочка»*. Отдельно приведены типовые задания, предназначенные для контрольной работы. Также пособие содержит задания для лабораторного практикума в компьютерном классе и для индивидуальных проектов.

С автором пособия можно связаться по электронной почте BondarenkoNP@info.sgu.ru. Буду благодарна за любые замечания и предложения.

Содержание

Теоретические задачи 5
Решения 12
Контрольная работа 26
Лабораторный практикум 29
Индивидуальные проекты 33
Список литературы 36

Теоретические задачи

Вводные задачи

1. Вычислить $\sqrt{2}$ методом деления отрезка пополам; по итерационной формуле Герона:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

Оценить число итераций, необходимое для достижения требуемого количества знаков. Вывести аналогичную формулу для $\sqrt[3]{2}$.

2. Вычислить $\sin 0.1$, $\sin 1$ при помощи рядов Тейлора. Определить количества членов ряда, необходимых для достижения заданной точности.

3. Вычислить число π при помощи разложения функции $\operatorname{arctg} x$ в ряд Тейлора.

Интерполяционные многочлены

4. Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = \sin x$ по трем равноотстоящим узлам на отрезке $[0, \pi]$ по формуле Лагранжа и по формуле Ньютона. Сравнить результаты.

5. Оценить погрешность интерполирования в задаче 4 по формуле

$$r_n(x) \leqslant \frac{M_n}{n!}|\omega_n(x)|.$$

Оценить максимум многочлена $\omega_n(x)$, исследуя эту функцию на экстремум. Получить численную оценку погрешности.

6. Построить чебышевские узлы на отрезке $[0, \pi]$ $(n = 3)$. Построить интерполяционный многочлен для $f(x) = \sin x$ по чебышевским узлам (используя формулу Лагранжа или формулу Ньютона). Оценить погрешность интерполирования.

7. Решить задачу 4 при $n = 4$. Вычислить значение интерполяционного многочлена и погрешность интерполирования в точке $\frac{\pi}{2}$.

8*. Написать программу, строящую интерполяционный многочлен для заданной функции по заданным узлам по формуле Лагранжа и/или по формуле Ньютона. Для оценки погрешности сравнить интерполяционный многочлен с заданной функцией визуально на графике или вычислить погрешность в узлах очень мелкой равномерной сетки.

Кусочно-линейная интерполяция и сплайны

9. Построить функцию кусочно-линейной интерполяции по данным

$$\begin{pmatrix} x_i: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(x_i): & 0 & 0.6 & 2.3 & 1.6 \end{pmatrix} \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

10. Провести построение интерполяционного кубического сплайна по данным

$$a) \begin{pmatrix} x_i: & 0 & 1 & 2 \\ f(x_i): & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} x_i: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(x_i): & 0 & 0.6 & 2.3 & 1.6 \end{pmatrix}$$

1) На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ записать представление сплайна через неизвестные коэффициенты

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3.$$

2) Выписать условия $s(x_i) = f(x_i)$ вместе с условиями непрерывности сплайна:

$$s_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad s_i(x_i) = f(x_i).$$

3) Выписать условия непрерывности $s'(x)$:

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i).$$

4) Выписать условия непрерывности $s''(x)$:

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i).$$

5) Выписать краевые условия: $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.

6) Из полученных условий составить систему и решить ее. Записать получившийся в результате сплайн.

11. Как определить значение функции кусочно-линейной интерполяции (задание 9) или сплайна (задание 10, a), b)) в конкретной точке x? Например, $x = 0.5$, $x = 1.7$.

12*. Написать программу построения кубического сплайна по равноотстоящим узлам. Протестировать ее на результатах задания 10. Экспериментально проверить теорему о равномерной сходимости процесса интерполирования сплайнами для какой-нибудь конкретной функции $f(x)$. (Погрешность вычислять, беря максимум $|f(x) - s(x)|$ по узлам очень мелкой сетки).

13*. Подобрать такую последовательность сеток, чтобы процесс интерполирования сплайнами не сходился. Продемонстрировать результат экспериментально, при помощи программы.

14. Построить интерполяционный сплайн степени 2 дефекта 1 (на одном из примеров из задания 10).

Численное дифференцирование

15. Найти разностные производные первого и второго порядка для функции $f(x) = x^3 - x + 1$ по формулам:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \text{(правая производная)}, \qquad (1)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad \text{(левая производная)}, \qquad (2)$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}, \qquad (3)$$

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \qquad (4)$$

16. Найти погрешность аппроксимации для разностных производных (2) и (3), используя формулы Тейлора.

17. Пусть $\{x_k\}_{k=0}^n$ — равномерная сетка, $x_k = a + kh$, $h = (b-a)/n$. При решении начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений важную роль играют разностные аппроксимации производных в концах отрезка. Их можно получать методом неопределенных коэффициентов. Получите разностные аппроксимации производной $f'(x_0)$ по значениям f в узлах x_0, x_1, x_2 и $f'(x_n)$ по узлам x_{n-2}, x_{n-1}, x_n с погрешностью $O(h^2)$.

18. Сколько узлов нужно, чтобы получить аппроксимацию производной f' с точностью $O(h^3)$? Получите такие аппроксимации для $f'(x_0)$ и $f'(x_1)$.

Численное интегрирование

19*. Написать программу, вычисляющую значение интеграла по **составной** квадратурной формуле прямоугольников/трапеций/Симпсона. Для выбора шага обязательно использовать **правило Рунге**. Протестировать работу программы на интеграле, точное значение которого вам известно. Например,

$$\int_0^\pi \sin x \, dx.$$

Программа должна вычислять значение интеграла с любой наперед заданной точностью ε.

20*. Вычислить длину эллипса с полуосями a и b с заданной точностью ε.

Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом Гаусса

21. Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -8. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

22. Какие условия необходимы для работы метода Гаусса? (см. теорему об LU-разложении). Придумать матрицу 3×3, для которой эти условия не выполняются. Решить для нее систему методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцам, по строкам, по всей матрице.

23. Решить СЛАУ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 5, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

методом Гаусса с выбором главного элемента а) по строкам, б) по столбцам, в) по всей матрице.

24. Найти определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

методом Гаусса. Ответ: -7.

25. Найти обратную матрицу методом Гаусса, сделать проверку.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

26*. Написать программу, вычисляющую определитель матрицы методом Гаусса. Учесть случаи, когда угловые миноры равны нулю, в том числе и сам определитель может быть равен нулю.

Решение СЛАУ итерационными методами

27. Решить СЛАУ методами простой итерации и Зейделя:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Выполнить три итерации. Сравнить результат с точным решением $(1, 1)$. (Его можно получить, например, методом Гаусса).

28. Решить СЛАУ методами простой итерации и Зейделя:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 11, \\ -x_1 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Сравнить с точным решением. Ответ: $(1, 2, 3)$.

29. Убедиться в том, что для систем из заданий 27 и 28 выполняется условие строгого диагонального преобладания. Следовательно, методы простой итерации и Зейделя для них сходятся.

Итерационные методы решения нелинейных уравнений

30. Решить нелинейное уравнение $x^2 - e^x = 0$ методами простой итерации и Ньютона. Для выбора начального приближения использовать графический метод. Сравнить скорость сходимости методов. Ответ: -0.7034674224.

31. Убедиться, что для уравнения из предыдущего задания выполняется достаточное условие сходимости метода простой итерации ($|s'(x)| < 1$ в окрестности корня).

32*. Решить нелинейные уравнения

$$a)\, x - \cos x = 0, \quad b)\ \sin x - 2\cos x = 0$$

1. методом простой итерации $x_{k+1} = s(x_k)$;
2. методом Ньютона $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$;
3. модифицированным методом Ньютона $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$;
4. методом секущих $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$.

Написать программу, реализующую все четыре метода. Сравнить количество итераций, необходимых разным методам для достижения требуемой точности.

Ответ: a) 0.7390851332, b) 1.107148717794, -2.034443935795.

Решения

4. *Построить интерполяционный многочлен для функции $f(x) = \sin x$ по трем равноотстоящим узлам на отрезке $[0, \pi]$ по формуле Лагранжа и по формуле Ньютона. Сравнить результаты.*

Построим равноотстоящие узлы:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \pi.$$

Найдем значения функции в этих узлах:

$$y_0 = f(x_0) = \sin 0 = 0, \quad y_1 = f(x_1) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

$$y_2 = f(x_2) = \sin\pi = 0.$$

Начнем с интерполяционной формулы Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_{nk}(x),$$

где $l_{nk}(x)$ — базисные многочлены, определяемые формулой

$$l_{nk}(x) = \frac{\prod_{j=\overline{0,n}, j\neq k}(x - x_j)}{\prod_{j=\overline{0,n}, j\neq k}(x_k - x_j)}.$$

Запишем данные формулы для $n = 2$:

$$L_2(x) = y_0 l_{20}(x) + y_1 l_{21}(x) + y_2 l_{22}(x),$$

$$l_{20}(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad l_{21}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

$$l_{22}(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Заметим, что поскольку в нашем случае $y_0 = y_2 = 0$, нам необходимо найти только многочлен $l_{21}(x)$. В общем случае нужны все три базисных многочлена. Итак, подставляя значения x_0, x_1, x_2 и раскрывая скобки, находим:

$$l_{21}(x) = -\frac{4x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi}.$$

По формуле для $L_2(x)$ получаем

$$L_2(x) = -\frac{4x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi}.$$

Мы построили интерполяционный многочлен по формуле Лагранжа. Если требуется вычислить его значение в некоторой заданной точке s нужно просто подставить $x = s$.

Перейдем к формуле Ньютона:

$$L_n(x) = f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+ \\ + \dots + f(x_0,\dots,x_n)(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}).$$

Для $n = 2$:

$$L_2(x) = f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1).$$

Вычислим разделенные разности:

$$f(x_0,x_1) = \frac{f(x_0)-f(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{0-1}{0-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi},$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{1-0}{\pi-\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi},$$

$$f(x_0,x_1,x_2) = \frac{f(x_0,x_1)-f(x_1,x_2)}{x_0-x_2} = \frac{\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}}{0-\pi} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Подставим результат в формулу Ньютона:

$$L_2(x) = 0+\frac{2}{\pi}(x-0)-\frac{4}{\pi^2}(x-0)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}x-\frac{4}{\pi^2}\left(x^2-\frac{\pi}{2}x\right).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем

$$L_2(x) = -\frac{4x^2}{\pi^2} + \frac{4x}{\pi}.$$

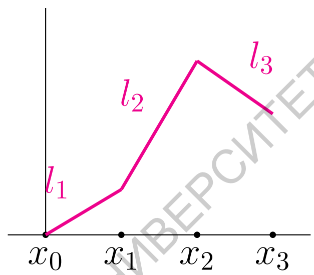
Таким образом, решая задачу по формуле Лагранжа и по формуле Ньютона, мы получили один и тот же интерполяционный многочлен.

9. *Построить функцию кусочно-линейной интерполяции по данным*

$$\begin{pmatrix} x_i: & 0 & 1 & 2 & 3 \\ f(x_i): & 0 & 0.6 & 2.3 & 1.6 \end{pmatrix} \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Функция кусочно-линейной интерполяции является линейной на каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$:

$$l(x) = l_i(x) = a_i + b_i(x - x_i), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = \overline{1, n}.$$



В нашем случае

$$l_1(x) = a_1 + b_1(x - 1), \quad x \in [0, 1],$$
$$l_2(x) = a_2 + b_2(x - 2), \quad x \in [1, 2],$$
$$l_3(x) = a_3 + b_3(x - 3), \quad x \in [2, 3].$$

Необходимо, чтобы значения функции $l(x)$ совпадали со значениями $f(x)$ в узлах x_i, $i = \overline{0, n}$. Выпишем эти условия:

$$\begin{aligned} l_1(x_0) &= 0 &\Rightarrow\quad & a_1 - b_1 = 0, \\ l_1(x_1) &= 0.6 &\Rightarrow\quad & a_1 = 0.6, \\ l_2(x_1) &= 0.6 &\Rightarrow\quad & a_2 - b_2 = 0.6, \\ l_2(x_2) &= 2.3 &\Rightarrow\quad & a_2 = 2.3, \\ l_3(x_2) &= 2.3 &\Rightarrow\quad & a_3 - b_3 = 2.3, \\ l_3(x_3) &= 1.6 &\Rightarrow\quad & a_3 = 1.6. \end{aligned}$$

Значения коэффициентов a_1, a_2, a_3 уже найдены. Посчитаем b_1, b_2, b_3:

$$\begin{aligned}
&b_1 = a_1 = 0.6,\\
&b_2 = a_2 - 0.6 = 2.3 - 0.6 = 1.7,\\
&b_3 = a_3 - 2.3 = 1.6 - 2.3 = -0.7.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили следующую функцию кусочно-линейной интерполяции

$$l(x) = \begin{cases} 0.6 + 0.6(x-1), & x \in [0,1],\\ 2.3 + 1.7(x-2), & x \in [1,2],\\ 1.6 - 0.7(x-3), & x \in [2,3]. \end{cases}$$

10. *Провести построение интерполяционного кубического сплайна по данным*

$$a)\begin{pmatrix} x_i: & 0 & 1 & 2\\ f(x_i): & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad b)\begin{pmatrix} x_i: & 0 & 1 & 2 & 3\\ f(x_i): & 0 & 0.6 & 2.3 & 1.6 \end{pmatrix}$$

Разберем пример a).

1) *На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ запишем представление сплайна через неизвестные коэффициенты*

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3.$$

На отрезке $[x_0, x_1] = [0, 1]$:

$$s_1(x) = a_1 + b_1(x-1) + \frac{c_1}{2}(x-1)^2 + \frac{d_1}{6}(x-1)^3.$$

На отрезке $[x_1, x_2] = [1, 2]$:

$$s_2(x) = a_2 + b_2(x-2) + \frac{c_2}{2}(x-2)^2 + \frac{d_2}{6}(x-2)^3.$$

2) *Выпишем условия $s(x_i) = f(x_i)$ вместе с условиями непрерывности сплайна:*

$$s_i(x_{i-1}) = f(x_{i-1}), \quad s_i(x_i) = f(x_i).$$

$$
\begin{aligned}
s_1(x_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 - b_1 + \frac{c_1}{2} - \frac{d_1}{6} = 0,\\
s_1(x_1) = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = 3,\\
s_2(x_1) = 3 \quad &\Rightarrow \quad a_2 - b_2 + \frac{c_2}{2} - \frac{d_2}{6} = 3,\\
s_2(x_2) = 1 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = 1.
\end{aligned}
$$

3) *Выпишем условия непрерывности $s'(x)$:*

$$s'_i(x_i) = s'_{i+1}(x_i).$$

В нашем случае будет условие непрерывности в одном внутреннем узле x_1:

$$s'_1(x_1) = s'_2(x_1) \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2 - c_2 + \frac{d_2}{2}.$$

4) *Выпишем условия непрерывности $s''(x)$:*

$$s''_i(x_i) = s''_{i+1}(x_i).$$

$$s''_1(x_1) = s''_2(x_1) \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 - d_2.$$

5) *Выпишем краевые условия: $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.*

$$
\begin{aligned}
s''(x_0) = s''_1(0) = c_1 - d_1 = 0,\\
s''(x_n) = s''_2(2) = c_2 = 0.
\end{aligned}
$$

6) *Из полученных условий составим систему (подставив уже известные значения $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $c_2 = 0$:*

$$
\begin{cases}
b_1 - \frac{c_1}{2} + \frac{d_1}{6} = 3,\\
b_2 + \frac{d_2}{6} = -2,\\
b_1 = b_2 + \frac{d_2}{2},\\
c_1 = -d_2,\\
c_1 - d_1 = 0.
\end{cases}
$$

Исключим d_1 и d_2, пользуясь двумя после последними уравнениями системы:

$$
\begin{aligned}
b_1 - \frac{c_1}{2} + \frac{c_1}{6} &= 3,\\
b_2 - \frac{c_1}{6} &= -2,\\
b_1 &= b_2 - \frac{c_1}{2}.
\end{aligned}
$$

Выразим b_1 и b_2 из первых двух уравнений и подставим в третье:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 3 + \frac{c_1}{3},\\
b_2 &= -2 + \frac{c_1}{6},\\
3 + \frac{c_1}{3} &= -2 + \frac{c_1}{6} - \frac{c_1}{2}.
\end{aligned}
$$

В общем случае (при большем количестве узлов), мы бы получили трехдиагональную систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных c_i. В данном случае система состоит из одного уравнения относительно c_1. Решая его, находим

$$
\frac{c_1}{3} - \frac{c_1}{6} + \frac{c_1}{2} = -2 - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2c_1}{3} = -5 \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = -\frac{15}{2}.
$$

Далее вычисляем:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 3 - \frac{15}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2},\\
b_2 &= -2 + \frac{15}{2 \cdot 2} = -\frac{13}{4},\\
d_1 &= -\frac{15}{2},\\
d_2 &= \frac{15}{2}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы построили интерполяционный кубический сплайн:

$$s(x) = \begin{cases} 3 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{15}{4}(x-1)^2 - \frac{5}{4}(x-1)^3, & x \in [0,1], \\ 1 - \frac{13}{4}(x-2) + \frac{5}{4}(x-2)^3, & x \in [1,2]. \end{cases}$$

Мы подробно разобрали этот пример, начав с системы условий на сплайн, вывели из этих условий систему линейных уравнений относительно коэффициентов и решили ее. При большем количестве узлов сплайна система уравнений становится более громоздкой, поэтому можно не проделывать подробно ее вывод, а пользоваться готовыми формулами из лекций (см. также [1, Глава 3, §4]):

$$h_i c_{i-1} + 2(h_{i+1} + h_i)c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right),$$

$$i = \overline{1, n-1}, \quad c_0 = c_n = 0,$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}, \quad b_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} + \frac{h_i}{2}c_i - \frac{h_i^2}{6}d_i,$$

где $h_i = x_i - x_{i-1}$, $f_i = f(x_i)$.

16. *Найти погрешность аппроксимации для разностных производных, используя формулы Тейлора.*

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad \text{(левая производная)},$$

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки x: $[x-\delta, x+\delta]$. Тогда при $h \leqslant \delta$ верна формула Тейлора

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad \xi \in (x-h, x).$$

Найдем погрешность первой из данных в условии формул численного дифференцирования. Разность между приближенным и точным значением производной равна

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h}-f'(x)=-\frac{h}{2}f''(\xi).$$

Т.к. производная $f''(x)$ непрерывна на $[x-\delta,x+\delta]$, она ограничена константой $M_2=\max\limits_{\xi\in[x-\delta,x+\delta]}|f''(\xi)|$. Следовательно, погрешность не превышает $\frac{M_2h}{2}$, т.е. равна $O(h)$ при $h\to 0$.

Для оценки погрешности второй формулы, предположим, что $f\in C^3[x-\delta,x+\delta]$. При $h<\delta$ имеем

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(\xi_+),\quad \xi_+\in(x,x+h),$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(\xi_-),\quad \xi_-\in(x,x-h).$$

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)+\frac{h^3}{12}(f'''(\xi_+)+f'''(\xi_-)).$$

Поскольку $|f'''(\xi_\pm)|\leqslant M_3$, $M_3=\max\limits_{\xi\in[x-\delta,x+\delta]}f'''(\xi)$, получаем

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}-f'(x)\right|\leqslant\frac{M_3h^2}{6},$$

т.е. погрешность формулы составляет $O(h^2)$ при $h\to 0$.

Отметим, что при $h<<1$ имеем $h^2<<h$, поэтому вторая формула — более точная.

21. *Решить СЛАУ методом Гаусса:*

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6,\\ 2x_1+x_2=4,\\ -x_1+x_2-3x_3=-8.\end{cases}$$

Выпишем матрицу системы и столбец свободных коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Составим расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -8 \end{array} \right)$$

Наша первая цель — привести ее к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали. Отнимем от второй строки первую, умноженную на 2, а к третьей строке прибавим первую:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{array} \right)$$

Мы получили нули в первом столбце. Умножим вторую строку на -1 и отнимем ее, умноженную на 2, от третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right)$$

Разделим третью строку на -6:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Итак, мы получили систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Теперь выполним обратный ход метода Гаусса. Найдем x_3 из третьего уравнения: $x_3 = 3$. Подставим это значение во второе уравнение и найдем x_2:

$$x_2 = 8 - 2x_3 = 8 - 6 = 2.$$

Далее выразим x_1 из первого уравнения:

$$x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Система решена.

27. *Решить СЛАУ методами простой итерации и Зейделя:*

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

В качестве начального приближения взять нулевой вектор. Выполнить три итерации. Сравнить результат с точным решением $(1, 1)$.

Выразим из первого уравнения x_1, а из второго x_2:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_2}{3} + \frac{2}{3}, \\ x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Согласно методу простой итерации,

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{x_2^{(k)}}{3} + \frac{2}{3}, \\ x_2^{(k+1)} = \frac{x_1^{(k)}}{2} + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

где $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$ — приближение на k-й итерации, $k = 0, 1, 2, \ldots$. При $k = 0$ имеем начальное приближение:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим первое приближение:

$$x_1^{(1)} = \frac{x_2^{(0)}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$
$$x_2^{(1)} = \frac{x_1^{(0)}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Вычислим второе приближение:

$$x_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6},$$
$$x_2^{(2)} = \frac{x_1^{(1)}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.$$

Вычислим третье приближение:

$$x_1^{(3)} = \frac{x_2^{(2)}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6 \cdot 3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{18},$$
$$x_2^{(3)} = \frac{x_1^{(2)}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{11}{12}.$$

Заметим, что третье приближение

$$\begin{pmatrix} 17/18 \\ 11/12 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.944 \\ 0.917 \end{pmatrix}$$

уже достаточно близко к точному решению $(1, 1)$.

В методе Зейделя для вычисления второй (и последующих) компонент решения используются уже посчитанные на текущей итерации компоненты:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{x_2^{(k)}}{3} + \frac{2}{3}, \\ x_2^{(k+1)} = \frac{x_1^{(k+1)}}{2} + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Получаем первое приближение:

$$x_1^{(1)} = \frac{x_2^{(0)}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$
$$x_2^{(1)} = \frac{x_1^{(1)}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6},$$

второе приближение:

$$x_1^{(2)} = \frac{x_2^{(1)}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6\cdot 3} + \frac{2}{3} = \frac{17}{18},$$
$$x_2^{(2)} = \frac{x_1^{(2)}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{17}{18\cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = \frac{35}{36}$$

и третье приближение:

$$x_1^{(3)} = \frac{x_2^{(2)}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{35}{36\cdot 3} + \frac{2}{3} = \frac{107}{108},$$
$$x_2^{(3)} = \frac{x_1^{(3)}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{107}{108\cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} = \frac{215}{216}.$$

Мы видим, что приближение, полученное на третьей итерации метода Зейделя точнее третьего приближения метода простой итерации:

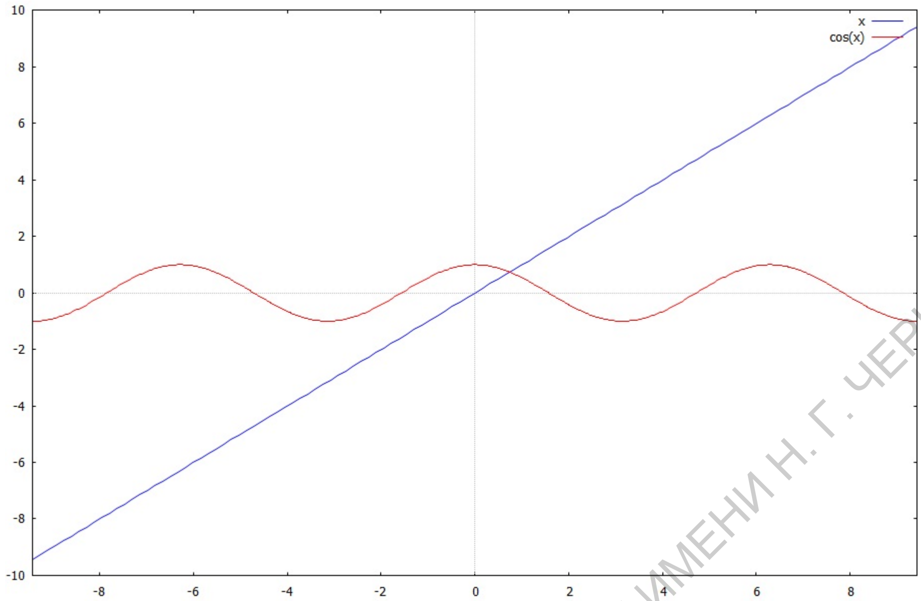
$$\begin{pmatrix} 107/108 \\ 215/216 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.991 \\ 0.995 \end{pmatrix}.$$

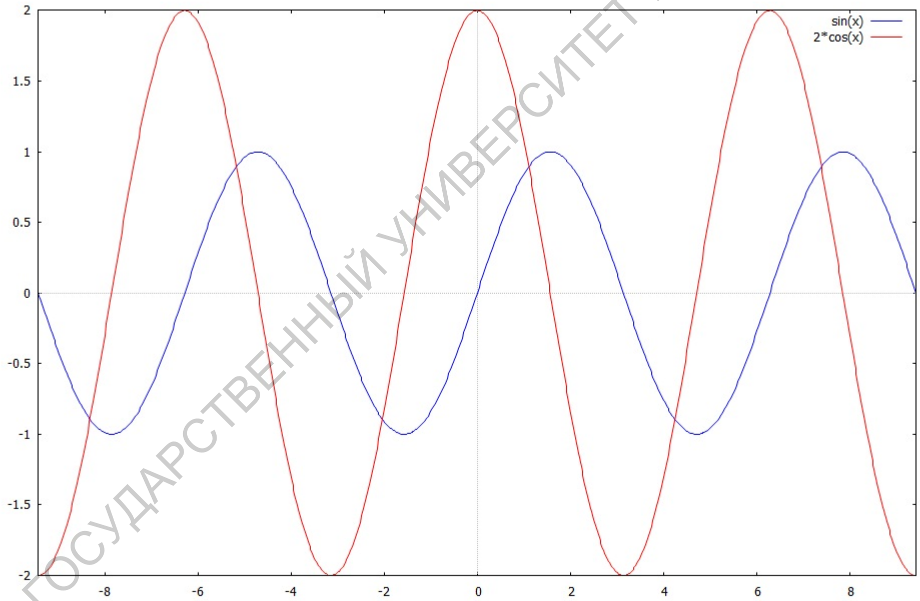
32*. *Решить нелинейные уравнения*

$$a)\, x - \cos x = 0, \quad b)\, \sin x - 2\cos x = 0$$

1. *методом простой итерации* $x_{k+1} = s(x_k)$;
2. *методом Ньютона* $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$;
3. *модифицированным методом Ньютона* $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}$;
4. *методом секущих* $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$.

Выберем начальное приближение графическим методом.





Из графиков мы видим, что уравнение a) имеет один положительный корень. Можно взять начальное приближение $x_0 = \pi/3$. Функции в уравнении b) периодические и оно имеет бесконечно много корней: $x_- + 2\pi k$ и $x_+ + 2\pi k$ при всех целых k. За x_+ и x_- здесь обозначены наименьшие по абсолютной величине положительный и отрицательный корни соотвественно. Для x_+ можно взять начальное приближение $\pi/2$, для x_-

— $-\pi/2$.

Для построения метода простой итерации нужно привести уравнение к виду $x = s(x)$. Например, $x = \cos x$. Тогда расчетная формула имеет вид $x_{k+1} = \cos x_k$. Остальные методы служат для решения уравнения в виде $f(x) = 0$, т.е. в а) $f(x) = x - \cos x$. Для построения расчетных формул нужно найти производную $f'(x) = 1 + \sin x$ и подставить ее в следующие рассчетные формулы:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_k},$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_0},$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - \cos x_k)(x_k - x_{k-1})}{(x_k - \cos x_k) - (x_{k-1} - \cos x_{k-1})}.$$

Заметим, что метод секущих двухшаговый, для него нужны два начальных приближения x_0 и x_1.

Используйте условие остановки $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Контрольная работа

На контрольной работе всем студентам предлагаются разные варианты. Вариант содержит пять заданий разного уровня сложности из различных тем. Оценка «отлично» ставится за пять правильно выполненных заданий, оценка «хорошо» — за четыре, оценка «удовлетворительно» — за три. Работа рассчитана на 1,5 астрономических часа. Разрешается и рекомендуется использовать калькулятор для вычислений, а также пользоваться любой литературой и личными записями. Далее приведены примеры типовых заданий контрольной работы.

1. Построить интерполяционный многочлен по формуле Лагранжа по узлам $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$ и значениям функции $f(x)$: $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 0.3$, $f(x_3) = -0.1$.

2. Построить интерполяционный многочлен по формуле Ньютона по узлам $x_1 = -0.5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0.5$ и значениям функции $f(x)$: $f(x_1) = -1$, $f(x_2) = 0.3$, $f(x_3) = -0.1$.

3. Построить функцию кусочно-линейной интерполяции для функции $f(x) = x^4 - 1$ по узлам $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$.

4. Построить интерполяционный кубический сплайн для функции $f(x) = x^4 - 1$ по узлам $x_0 = 0$, $x_1 = 0.5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1.5$.

5. Найти разностные производные первого и второго порядка для функции $f(x) = \sin x$.

6. Найти погрешность аппроксимации для формулы численного дифференцирования
$$f'(x) \approx \frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h},$$
используя разложения в ряд Тейлора.

7. Построить квадратурные формулы прямоугольников и трапеций для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0, 1]$. Сравнить результаты с точным значением интеграла $\int_0^1 x^2\,dx$.

8. Построить квадратурную формулу Симпсона для функции $f(x) = x^2$ на отрезке $[0, 1]$. Сравнить результат с точным значением интеграла $\int_0^1 x^2\,dx$.

9. Решить методом Гаусса систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

   При необходимости осуществлять выбор главного элемента по строкам, по столбцам или по всей матрице.

10. Выполнить две итерации метода простой итерации для решения СЛАУ

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$$

   В качестве начального приближения взять $(0, 0)$.

11. Выполнить две итерации метода Зейделя для решения СЛАУ

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 = 4, \\ -x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$$

   В качестве начального приближения взять $(0, 0)$.

12. Выполнить две итерации метода простой итерации для нелинейного уравнения $x - \cos x = 0$. В качестве начального приближения взять $x_0 = 0$.

13. Выполнить две итерации метода Ньютона (как вариант: модифицированного метода Ньютона, метода секущих) для нелинейного уравнения $\sin x - 2\cos x = 0$. В качестве начального приближения взять $x_0 = 0$.

Лабораторный практикум

Задание 1

Для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$, построить:

1. интерполяционный многочлен по равноотстоящим узлам
$$x_k = a + kh, \quad k = \overline{0,n}, \quad h = \frac{b-a}{n},$$
2. интерполяционный многочлен по чебышевским узлам
$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = \overline{0,n},$$
3. интерполяционный кубический сплайн по равноотстоящим узлам,
4. функцию кусочно-линейной интерполяции по равноотстоящим узлам.

Оценить погрешность интерполирования в узлах более мелкой сетки
$$s_k = a + kh_1, \quad k = \overline{0,N}, \quad h_1 = \frac{b-a}{N}, \quad N > n.$$

Числа n и N даются в качестве параметров.

$$\begin{array}{ll}
a) f(x) = \sin^2 x, & [a,b] = [0, 2\pi], \\
b) f(x) = x\cos x, & [a,b] = [0, 2\pi], \\
c) f(x) = x + \sqrt{x^2+1}, & [a,b] = [-1, 1], \\
d) f(x) = x^2 e^x, & [a,b] = [0, 1], \\
e) f(x) = \frac{1}{1+x^2}, & [a,b] = [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}], \\
f) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & [a,b] = [-1/2, 1/2], \\
g) f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & [a,b] = [\operatorname{sh} 1, \operatorname{sh} 2], \\
h) f(x) = |x|, & [a,b] = [-1, 1].
\end{array}$$

Задание 2

Вычислить интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ с заданной точностью ε, используя составную квадратурную формулу

1. прямоугольников,
2. трапеций,
3. Симпсона,
4. Гаусса по трем узлам,
5. Гаусса по четырем узлам.

В качестве проверки сравнить полученное значение с вычисленным аналитически. Для выбора шага интегрирования использовать правило Рунге.

Функцию $f(x)$ и отрезок $[a, b]$ взять из задания 1.

Задание 3

Решить систему линейных уравнений $Ax = b$

1. методом Гаусса,
2. методом Гаусса с выбором главного элемента по строкам,
3. методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцам,
4. методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице,
5. методом квадратного корня,
6. методом простой итерации (с заданной точностью ε),
7. методом Зейделя (с заданной точностью ε).

Проверить правильность работы вашей программы для матриц

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad c)\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e)\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad f)\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$h)\begin{pmatrix} 10 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 9 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 8 \end{pmatrix}, \quad i)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5, \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

j) матрицы произвольного размера $n \times n$, случайного или специального вида.

В качестве вектора b возьмите вектор из всех единиц, в качестве начального приближения при реализации итерационных методов — нулевой вектор.

Если для некоторых матриц ваш метод не работает, объясните, почему.

Задание 4

Найти все действительные корни нелинейного уравнение с заданной точностью ε

1. методом простой итерации,
2. методом Ньютона,
3. модифицированным методом Ньютона,
4. методом секущих,
5. методом деления отрезка пополам.

Предварительно выполнить отделение корней и найти начальные приближения графическим методом.

$$
\begin{aligned}
&a) x - 0.5\sin x - 0.5 = 0,\\
&b) x - 0.9 - 0.9\cos x^2 = 0,\\
&c) x + x\sin x - x^2 = 0,\\
&d) (x + 0.6)^2 + \exp(x^2) - 2 = 0,\\
&e) \ln\sin x + \operatorname{sh} x = 0,\\
&f) x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0,\\
&g) x^2 + \sqrt{x} - 10\cos x = 0.
\end{aligned}
$$

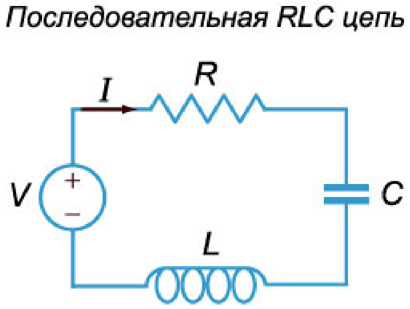
Индивидуальные проекты

1. **Ближайшая точка.** В пространстве заданы n точек ($3 \leqslant n \leqslant 10$) своими координатами (x_i, y_i, z_i). Требуется найти точку, сумма расстояний от которой до заданных минимальна. Для построения наглядных примеров можно сначала решать задачу на плоскости, где точки задаются только двумя координатами (x_i, y_i).

2. **Обратное усреднение.** В обработке изображений часто используется процедура усреднения по «маске». В данной задаче мы рассмотрим маску
$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Исходное изображение представляет собой матрицу $n \times n$ с элементами u_{ij} ($0 \leqslant u_{ij} \leqslant 255$). Элементы усредненной матрицы вычисляются по формуле
$$v_{ij} = \frac{5u_{ij} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}}{9}.$$
Чтобы индексы $i-1$, $i+1$, $j-1$ и $j+1$ не выходили за пределы матрицы, будем считать, что строки и столбцы нумеруются циклически. Т.е. перед первым столбцом идет последний и т.п. Ваша задача — по усреднению $(v_{ij})_{i,j=1}^{n}$ восстановить исходную матрицу $(u_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

3. **Колебания в электрической цепи.** Колебания в электрической цепи, содержащей сопротивление R, индуктивность L и емкость C, описываются уравнением
$$\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{LC}I(t) = 0.$$
Исследуйте закон колебаний, построив график изменения силы тока $I(t)$. Считайте, что начальные значения $I(0)$ и

$\frac{dI}{dt}(0)$ заданы. В качестве примера можно взять значения $R = 1$ Ом, $L = 0.25$ Гн, $C = 1$ мкФ.[1]



4. **Генератор.** Вам дана программа gen.exe. Она получает на вход числа x из интервала $(0, 1)$. Для каждого значения x она выдает значение y, вычисляемое по некоторому неизвестному правилу. Ваша задача — определить это правило. Программа прекращает работу, если введенное значение x не попадает в интервал $(0, 1)$. Результат работы программы подвержен случайной ошибке, имеющей нормальное (гауссовское) распределение. Программа gen.exe использует стандартные потоки ввода/вывода. Можно работать с ней, например, через консоль.

5. **Спираль.** Рассмотрим спираль, заданную в параметрическом виде уравнениями

$$\begin{cases} x(t) = ae^{ct}\cos t \\ y(t) = be^{ct}\sin t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t < \infty.$$

При каких значениях параметров a, b, c спираль имеет конечную длину? Вычислите ее длину при заданных a, b, c с заданной точностью ε.

[1] Рисунок к задаче взят с Интернет-ресурса: Math24.ru. Дифференциальные уравнения. Колебания в электрических цепях. URL: http://www.math24.ru/oscillations-in-electrical-circuits.html (дата обращения: 10.10.2014).

6. **Планарный граф.** Пусть G — неориентированный граф с n вершинами. Построим по нему матрицу

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{если в графе есть ребро} (i, j) \\ d_i & \text{если} i = j \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где d_i — степень вершины i. Свойства матрицы A тесно связаны со структурой графа. Она имеет n неотрицательных собственных значений $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Возьмем два наименьших ненулевых значения λ_2 и λ_3 и соответствующие им собственные векторы $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2)^T$, $x^3 = (x_1^3, x_2^3, \ldots, x_n^3)^T$. Построим на плоскости точки (x_i^2, x_i^3), соответствующие вершинам графа, и соединим их ребрами. В случае если граф планарный, получится его красивая укладка на плоскость. Вам предлагается проверить этот факт на примерах.

Список литературы

[1] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1989.

[2] Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2008.

[3] Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.

[4] Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В двух томах. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1962, 1959.