Бондаренко Н.П., Федосеев А.Е.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

УДК 517.968.2

Бондаренко Н.П., Федосеев А.Е. Методы решения интегральных уравнений: Учеб. пособие для студ. матем. спец. Саратов, 2014. – 62 с.

Учебное пособие содержит лекции по методам решения интегральных уравнений для студентов математических специальностей.

Рекомендуют к печати:

*Кафедра математической физики
и вычислительной математики
Саратовского государственного университета
имени Н.Г. Чернышевского*

Кандидат физико-математических наук *В.С. Рыхлов*

Предисловие

Пособие «Методы решение интегральных уравнений» содержит лекции по одноименному спецкурсу, который читается студентам СГУ, обучающимся по направлению «Прикладная математика и информатика» и проходящим специализацию на кафедре математической физики и вычислительной математики.

Материал курса основывается на теории интегральных уравнений, изложенной в учебниках и монографиях [1, 2, 3, 4, 5]. В лекциях содержатся упражнения для самостоятельного решения и замечания о связи излагаемого материала с другими известными студентам разделами математики.

Предполагается, что читатели знакомы с базовым курсом вещественного, комплексного и функционального анализа, линейной алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений. Если имеются пробелы в знаниях по этим предметам — рекомендуем обратиться к учебникам [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Для удобства наиболее важные термины, «которые вы должны были проходить», в тексте помечены звездочкой (*). Если какие-то из них вам непонятны — обязательно найдите их в учебниках или лекциях за 1–2 курс, почтите не только определения, но и немного вокруг них (свойства, признаки, теоремы). Это термины, понимание которых очень существенно для понимания курса.

С авторами можно связаться по электронной почте BondarenkoNP@info.sgu.ru. Будем благодарны за любые замечания и предложения.

Содержание

Лекция 1. Введение

Функциональное уравнение — это задача, состоящая в нахождении неизвестной функции, превращающей заданное соотношение в тождество. Интегральное уравнение — это функциональное уравнение, в котором неизвестная функция стоит под знаком интеграла. К таким уравнениям сводятся многие задачи математической физики. Существует тесная связь между интегральными и дифференциальными уравнениями. В этом курсе мы изучим основные методы решения интегральных уравнений.

Пусть G — область* в пространстве R^n. Рассмотрим *уравнение Фредгольма первого рода*:

$$\int\limits_G \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)$$

и *уравнение Фредгольма второго рода*:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x). \tag{I}$$

Здесь $f(x) \in C(\bar{G})$, $\mathscr{K}(x,y) \in C(\bar{G}\times\bar{G})$[1] — заданные функции, $\varphi(x) \in C(\bar{G})$ — неизвестная функция.

Функция $\mathscr{K}(x,y)$ называется *ядром*, функция $f(x)$ — *свободным членом* интегрального уравнения. Комплексное число λ называется *спектральным параметром* (в дальнейшем мы будем исследовать зависимость решения уравнения (I) от значений параметра).

Уравнение Фредгольма первого рода как правило представляет собой некорректно поставленную задачу [2] и в данном курсе не изучается.

Если в уравнении (I) свободный член f равен нулю, то такое уравнение называется *однородным*:

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_G \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,dy. \tag{II}$$

Рассмотрим некоторые примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям.

1. *Равновесие нагруженной струны.* Рассмотрим струну, т.е. упругую материальную нить длины l, которая может свободно изгибаться, но оказывает сопротивление растяжению, пропорциональное величине этого растяжения. Пусть концы струны закреплены в точках $x = 0$ и $x = l$. Тогда в положении равновесия струна совпадает с отрезком оси x, $0 \leqslant x \leqslant l$. Предположим теперь, что в точке $x = \xi$ к струне приложена вертикальная сила $P = P_\xi$. Под действием этой силы струна отклонится от положения равновесия и примет, очевидно, форму ломаной, изображенной на рис. 1.

Найдем величину δ отклонения струны в точке ξ под действием силы P_ξ, приложенной к этой точке. Если сила P_ξ мала по сравнению с натяжением ненагруженной

[1]Через $C(\bar{G})$ мы обозначаем класс функций, непрерывных в замыкании* области G, через $C(\bar{G}\times\bar{G})$ — множество функций двух аргументов, непрерывных в декартовом квадрате* $\bar{G}\times\bar{G}$.

Для простоты можно ограничиться изучением теории интегральных уравнений на интервале $G = (a,b)$. В этом случае $\bar{G} = [a,b]$. Однако мы будем проводить рассуждения для произвольной области, поскольку это почти не усложняет выкладки.

[2]Задача является корректно поставленной (по Адамару), если ее решение 1) существует, 2) единственно и 3) непрерывно зависит от исходных данных.

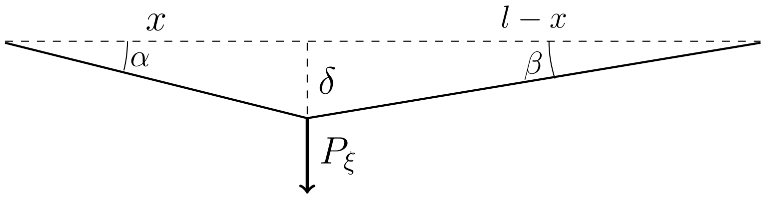

Рис. 1

струны T_0, то горизонтальную проекцию натяжения нагруженной струны можно по-прежнему считать равной T_0. Вертикальные проекции натяжения нити равны

$$T_0 \operatorname{tg} \alpha = T_0 \frac{\delta}{\xi}, \quad T_0 \operatorname{tg} \beta = T_0 \frac{\delta}{l-\xi}.$$

Суммируя вертикальные проекции действующих в точке ξ сил, из условия равновесия струны получаем равенство:

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P_\xi.$$

Откуда находим δ:

$$\delta T_0 \frac{\xi + l - \xi}{\xi(l-\xi)} = P_\xi \ \Rightarrow \ \delta = \frac{\xi(l-\xi)}{T_0 l} P_\xi. \tag{1.1}$$

Пусть теперь $u(x)$ — прогиб струны в некоторой точке x под действием силы P_ξ. Тогда при $0 \leqslant x \leqslant \xi$:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{u(x)}{x} = \frac{\delta}{\xi} \ \Rightarrow \ u(x) = \frac{x}{\xi}\delta,$$

при $\xi \leqslant x \leqslant l$:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{u(x)}{l-x} = \frac{\delta}{l-\xi} \ \Rightarrow \ u(x) = \frac{l-x}{l-\xi}\delta.$$

Используя (1.1), получаем

$$u(x) = P_\xi G(x, \xi),$$

где

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{T_0 l} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \xi, \\ \frac{(l-x)\xi}{T_0 l} & \text{при } \xi \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Предположим, что на струну действует сила, распределенная по ней непрерывно, с плотностью $p(\xi)$. Если эта сила мала, то деформация зависит от силы линейно, а форма нагруженной струны описывается функцией:

$$u(x) = \int_0^l G(x,\xi) p(\xi)\, d\xi. \tag{1.2}$$

Итак, если задана нагрузка, действующая на струну, то формула (1.2) позволяет найти форму, которую примет струна под действием этой нагрузки.

Рассмотрим обратную задачу: *по заданной форме струны $u(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$, найти распределение нагрузки $p(\xi)$.* Чтобы найти функцию p по функции u, необходимо решить уравнение Фредгольма первого рода (1.2).

2. *Свободные и вынужденные колебания струны.* Предположим теперь, что струна совершает колебания. Пусть $u(x,t)$ — положение в момент t той точки струны,

которая имеет абсциссу x, и пусть $\rho = \mathrm{const}$ — линейная плотность струны. На элемент струны длины dx действует сила инерции, равная

$$-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\rho\, dx, \quad \text{откуда} \quad p(\xi) = -\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\rho.$$

Подставив это выражением вместо $p(\xi)$ в формулу (1.2), мы получим

$$u(x,t) = -\int_0^l G(x,\xi)\rho\frac{\partial^2 u(\xi,t)}{\partial t^2}\, d\xi. \tag{1.3}$$

Предположим, что струна совершает гармонические колебания с некоторой фиксированной частотой ω и амплитудой $u(x)$, зависящей от x, то есть

$$u(x,t) = u(x)\sin\omega t.$$

Подставив это выражение в (1.3) и сократив обе части равенства на $\sin\omega t$, получаем для u однородное уравнение Фредгольма второго рода:

$$u(x) = \rho\omega^2\int_0^l G(x,\xi)u(\xi)\, d\xi.$$

Если струна совершает не свободные колебания, а вынужденные, под действием внешней силы, то соответствующее уравнение гармонических колебаний струны будет иметь вид

$$u(x) = \rho\omega^2\int_0^l G(x,\xi)u(\xi)\, d\xi + f(x),$$

т.е. будет неоднородным уравнением Фредгольма второго рода.

3. *Сведение дифференциального уравнения к интегральному.* Иногда решение дифференциального уравнения целесообразно сводить к решению интегрального. В частности, этот прием используется при доказательстве теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений [10, Том 2].

В качестве примера рассмотрим сведение к интегральному уравнению задачи Коши* для уравнения Штурма-Лиувилля:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \tag{1.4}$$

$$y(0) = a, \quad y'(0) = b. \tag{1.5}$$

Перепишем уравнение (1.4) в виде

$$y'' + \rho^2 y = f(x), \quad \lambda = \rho^2, \tag{1.6}$$

$$f(x) = q(x)y. \tag{1.7}$$

Сначала рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + \rho^2 y = 0 \tag{1.8}$$

и найдем его общее решение методом Эйлера*. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\alpha^2 + \rho^2 = 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm i\rho.$$

Отсюда при $\rho \neq 0$ фундаментальная система решений * (ФСР) уравнения (1.8) имеет вид $\{e^{i\rho x}, e^{-i\rho x}\}$. От нее можно перейти к системе $\{\cos\rho x, \sin\rho x\}$ при помощи невырожденного линейного преобразования. Случай $\rho = 0$ должен быть рассмотрен отдельно. В этом случае характеристическое уравнение имеет один кратный корень $\alpha_{1,2} = 0$ и его ФСР, согласно методу Эйлера, $\{1, x\}$. Чтобы учесть оба случая одновременно, обычно используют ФСР

$$\{y_1(x), y_2(x)\}, \quad y_1(x) = \cos\rho x, \quad y_2(x) = \frac{\sin\rho x}{\rho}. \tag{1.9}$$

Упражнение 1. *Убедитесь непосредственной проверкой, что формулы* (1.9) *дают ФСР уравнения* (1.8) *при любом* ρ.

Далее решим неоднородное уравнение (1.6) методом вариации произвольных постоянных *. Будем искать его общее решение в виде

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x). \tag{1.10}$$

В результате применения метода, получаем систему линейных уравнений

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1' \\ C_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix}.$$

Решим систему по формулам Крамера*:

$$C_1' = -fy_2, \quad C_2' = fy_1.$$

Подставим (1.7) и (1.9) и проинтегрируем полученное равенство:

$$C_1(x) = C_1(0) - \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho t\, q(t)y(t)\,dt,$$

$$C_2(x) = C_2(0) + \int_0^x \cos\rho t\, q(t)y(t)\,dt.$$

Подставляя результат в (1.10), приходим к соотношению

$$y(x) = C_1(0)\cos\rho x + C_2(0)\frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho(x-t)q(t)y(t)\,dt.$$

Для нахождения констант $C_1(0)$ и $C_2(0)$ воспользуемся начальными условиями (1.5):

$$y(0) = C_1(0) = a,$$

$$y'(x) = -C_1(0)\rho\sin\rho x + C_2(0)\cos\rho x + \int_0^x \cos\rho(x-t)q(t)y(t)\,dt,$$

$$y'(0) = C_2(0) = b.$$

Здесь мы воспользовались формулой дифференцирования интеграла с переменными пределами [6, Том 2]:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt = f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Таким образом, мы свели задачу Коши (1.4)-(1.5) к эквивалентному ей интегральному уравнению

$$y(x) = a\cos\rho x + b\frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho(x-t)q(t)y(t)\,dt. \tag{1.11}$$

Это интегральное уравнение Фредгольма II рода с ядром

$$\mathscr{K}(x,t,\rho) = \begin{cases} \frac{\sin \rho(x-t)}{\rho} q(t), & t \leqslant x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

Обратим внимание на две отличительные черты этого ядра. Во-первых, оно обладает свойством

$$\mathscr{K}(x,t) = 0, \quad t > x, \tag{1.12}$$

т.е. может быть отлично от нуля только в области, обозначенной на рис. 2. Интегральные уравнения с ядром вида (1.12) называется *уравнением Вольтерра*. Уравнения Вольтерра представляют собой частный случай уравнений Фредгольма.

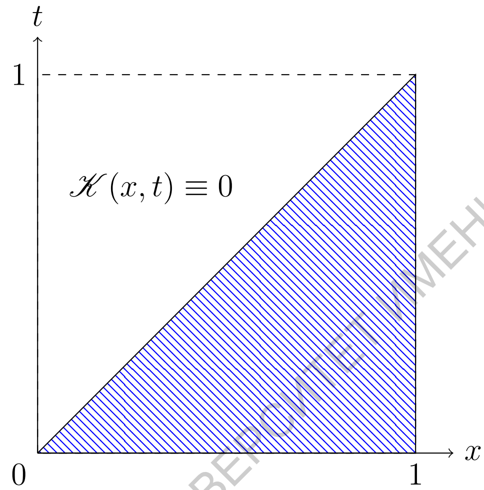

Рис. 2

Во-вторых, ядро в уравнении (1.11) зависит от параметра ρ. В этом курсе мы будем изучать простейший случай, когда зависимость ядра от спектрального параметра линейная (см. (I)). Однако многие результаты теории интегральных уравнений можно обобщить на случай аналитической зависимости от спектрального параметра, когда ядро является аналитической* функцией от λ.

Упражнение 2. *Докажите, что ядро в уравнении* (1.11) *является целой аналитической функцией параметра* $\lambda = \rho^2$.

Лекция 2. Интегральный оператор. Метод последовательных приближений

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим пространство $C(\bar{G})$ с нормой*

$$\|f\|_C = \max_{x \in \bar{G}} \|f(x)\|,$$

и пространство $L_2(G)$ с соответствующими скалярным произведением* и нормой

$$(f, g) = \int_G f(x)\bar{g}(x)\, dx, \quad \|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_G |f(x)|^2\, dx}.$$

Пусть ядро $\mathscr{K}(x, y)$ непрерывно в $\bar{G} \times \bar{G}$. Введем интегральный оператор K, действующий по следующему правилу:

$$(Kf)(x) = \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy,$$

Лемма 1. *Интегральный оператор K с непрерывным ядром переводит пространство $L_2(G)$ в пространство $C(\bar{G})$ и ограничен*, причем*

$$\|Kf\|_C \leqslant M\sqrt{V}\|f\|_{L_2}, \quad f \in L_2(G),$$

$$\|Kf\|_C \leqslant MV\|f\|_C, \quad f \in C(\bar{G}),$$

$$\|Kf\|_{L_2} \leqslant MV\|f\|_{L_2}, \quad f \in L_2(G),$$

где

$$M = \max_{(x,y) \in \bar{G} \times \bar{G}} |\mathscr{K}(x, y)|, \quad V = \int_G dy.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_2(G)$. Тогда $f \in L(G)$ и, поскольку ядро $\mathscr{K}$ непрерывно в $\bar{G} \times \bar{G}$, функция $(Kf)(x)$ непрерывна на $\bar{G}$. Поэтому оператор K переводит $L_2(G)$ в $C(\bar{G})$ и в силу неравенства Коши-Буняковского* ограничен:

$$\|Kf\|_C = \max_{x \in \bar{G}} |(Kf)(x)| = \max_{x \in \bar{G}} \left| \int_G \mathscr{K}(x, y) f(y)\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \max_{x \in \bar{G}} \sqrt{\int_G |\mathscr{K}(x, y)|^2\, dy} \cdot \sqrt{\int_G |f(y)|^2\, dy} \leqslant M\sqrt{V}\|f\|_{L_2}.$$

Остальные неравенства доказываются аналогично. Их доказательства остаются в качестве упражнения. □

Оператор называется *нулевым*, если он переводит любую функцию в ноль.

Лемма 2. *Для того чтобы интегральный оператор K с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x, y)$ был нулевым в $L_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{K}(x, y) \equiv 0$, $x \in G$, $y \in G$.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна. Необходимость будем доказывать методом от противного. Предположим, что существует нулевой интегральный оператор K с ненулевым ядром, т.е. существует точка $(x_0, y_0) \in G \times G$, в которой $\mathscr{K}(x_0, y_0) \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $\mathscr{K}(x_0, y_0) > 0$. Так как функция $\mathscr{K}(x,y)$ непрерывна по y, найдется шар $B_r(y_0)$ с центром в точке y_0, принадлежащий области G, такой что $\mathscr{K}(x_0,y)>0$ для любого $y\in B_r(y_0)$. Рассмотрим функцию

$$f_0(y)=\begin{cases}1, & y\in B_r(y_0),\\ 0, & y\notin B_r(y_0)\end{cases}.$$

Эта функция кусочно-постоянна, поэтому она принадлежит $L_2(G)$. Кроме того,

$$(Kf_0)(x_0)=\int_G \mathscr{K}(x_0,y)f_0(y)\,dy=\int_{B_r(y_0)}\mathscr{K}(x_0,y)\,dy>0.$$

Значит, оператор K ненулевой. Мы получили противоречие. $\square$

Следствие. *Соответствие между непрерывными ядрами и соответствующими операторами взаимно однозначно.*

Упражнение 3. *Докажите, что если $(Kf,g)=0$ при всех f и g из $L_2(G)$, то $K=0$ и, следовательно, $\mathscr{K}(x,y)\equiv 0$.*

Будем искать решение уравнения (I) **методом последовательных приближений**. Положим

$$\varphi^{(0)}(x):=f(x),$$

$$\varphi^{(p)}(x):=\lambda\int_G \mathscr{K}(x,y)\varphi^{(p-1)}(y)\,dy+f(x)=\lambda K\varphi^{(p-1)}+f,\quad p=1,2,\ldots \tag{2.1}$$

Мы скоро увидим, что построенная последовательность $\{\varphi^{(p)}(x)\}_{p=0}^{\infty}$ сходится к решению уравнения (I).

Покажем, что

$$\varphi^{(p)}=\sum_{n=0}^{p}\lambda^n K^n f,\quad p=0,1,2,\ldots, \tag{2.2}$$

где K^n — так называемые *итерации* оператора K. Они представляют собой операторы, действующие по правилу: $K^0=I$ (единичный оператор), $K^1=K$, $K^nf=K(K^{n-1}f)=K^{n-1}(Kf)$.

Для доказательства (2.2) воспользуемся методом математической индукции*. Действительно, при $p=0$ формула (2.2) верна: $\varphi^{(0)}=f$. Предполагая эту формулу верной для p, перейдем к $p+1$:

$$\varphi^{(p+1)}=\lambda K\varphi^{(p)}+f=\lambda K\sum_{n=0}^{p}\lambda^nK^nf+f=\sum_{n=0}^{p}\lambda^{n+1}K^{n+1}f+f=\sum_{n=0}^{p+1}\lambda^nK^nf+f.$$

По лемме 1

$$\|K^pf\|_C=\|K(K^{p-1}f)\|_C\leqslant MV\|K^{p-1}f\|_C\leqslant (MV)^p\|f\|_C. \tag{2.3}$$

Определение 1. Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n(K^nf)(x),\quad x\in\bar{G}, \tag{2.4}$$

называется *рядом Неймана*.

Согласно оценке (2.3), ряд Неймана мажорируется* числовым рядом

$$\|f\|_C \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n (MV)^n = \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| MV}, \tag{2.5}$$

сходящимся в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$. Поэтому при этих λ ряд (2.4) сходится абсолютно* и равномерно* по $x \in \bar{G}$ и определяет непрерывную на $\bar{G}$ функцию $\varphi(x)$. Отсюда в силу (2.2) следует, что последовательные приближения $\varphi^{(p)}(x)$ при $p \to \infty$ равномерно стремятся к функции $\varphi(x)$:

$$\varphi^{(p)}(x) \xrightarrow[\longrightarrow]{x \in \bar{G}} \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (K^n f)(x), \quad p \to \infty.$$

Используя (2.5), получаем следующее неравенство

$$\|\varphi\|_C \leqslant \frac{\|f\|_C}{1 - |\lambda| MV}. \tag{2.6}$$

Докажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению (I). Действительно, переходя к пределу при $p \to \infty$ в соотношении (2.1) и пользуясь равномерной сходимостью последовательности $\varphi^{(p)}(x)$ к $\varphi(x)$ на $\bar{G}$, получаем

$$\varphi(x) = \lim_{p \to \infty} \varphi^{(p)}(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x,y) \lim_{p \to \infty} \varphi^{(p-1)}(y)\, dy + f(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x,y) \varphi(y) dy + f(x).$$

Докажем единственность решения уравнения (I) в классе $L_2(G)$ в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$. Предположим, что уравнение (I) имеет два различных решения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$. Тогда их разность $\varphi_0(x) := \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (II): $\varphi_0 = \lambda K \varphi_0$. По лемме 1, $\|\varphi_0\|_{L_2} \leqslant |\lambda| MV \|\varphi_0\|_{L_2}$, откуда, благодаря неравенству $|\lambda| MV < 1$, следует $\|\varphi_0\|_{L_2} = 0$. Таким образом, $\varphi_0 = 0$ и решение уравнения (I) единственно.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема (Метод последовательных приближений)**.** *Интегральное уравнение Фредгольма II рода* (I) *с непрерывным ядром* $\mathscr{K}(x,y)$ *при* $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$ *имеет единственное решение* φ *в классе* $C(\bar{G})$ *для любого свободного члена* $f \in C(\bar{G})$*. Это решение представимо в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда Неймана* (2.4) *и удовлетворяет оценке* (2.6)*. Другими словами, в круге* $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$ *существует ограниченный обратный оператор* $(I - \lambda K)^{-1}$.

Чтобы показать существование обратного оператора, перепишем уравнение (I) в эквивалентном виде

$$\varphi = \lambda K \varphi + f \quad \Rightarrow \quad (I - \lambda K)\varphi = f,$$

где I — единичный оператор. Решение уравнения (I) при заданном свободном члене f соответствует нахождению значения обратного оператора: $\varphi = (I - \lambda K)^{-1} f$. Мы привели алгоритм (метод последовательных приближений), по которому это значение можно найти.

Замечание. Доказанная теорема является следствием общего *принципа сжимающих отображений.* Отображение A в метрическом пространстве (X, ρ) называется *сжимающим*, если

$$\forall x, y \in X \quad \rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha \rho(x, y), \quad \alpha < 1.$$

Всякое сжимающее отображение в полном метрическом пространстве имеет, причем единственную, неподвижную точку, т.е. такой элемент $x \in X$, что $x = Ax$.

Упражнение 4. *Проверить, что отображение* $A\varphi = \lambda K\varphi + f$ *является сжимающим при* $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$.

Подробнее о приниципе сжимающих отображений см. [11].

Замечание (о равномерной сходимости рядов). Отметим, что в доказательстве теоремы принципиальную роль играет *равномерная* сходимость последовательности приближений. В случае если последовательность непрерывных функций сходится в каждой точке множества, но не равномерно, предел может не быть непрерывной функцией.

Например, рассмотрим последовательность $f_n(x) = x^n$ на отрезке $[0, 1]$. Графики этих функций представлены на рис. 3.

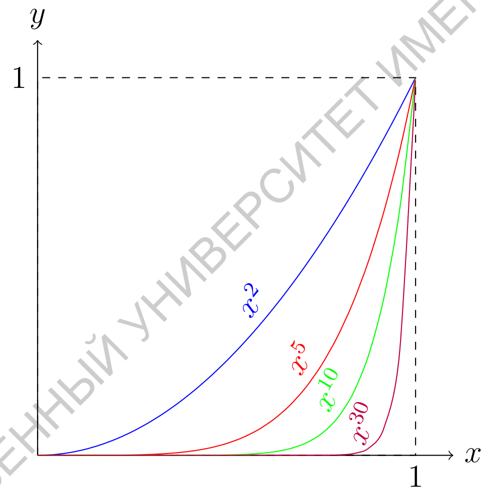

Рис. 3

Последовательность $f_n(x)$ сходится к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Предел последовательности непрерывных функций является разрывной функцией, потому что сходимость *не равномерная.* Напомним, что при равномерной сходимости по определению

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \forall x \in [0, 1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Фиксируем $0 < a < 1$. Тогда на отрезке $[0, a]$ последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к нулю, потому что для любого x из $[0, a]$, $|x^n| \leqslant |a^n| \to 0$ при $n \to \infty$. Последовательность $|f_n(x) - f(x)|$ мажорируется сходящейся последовательностью, *независящей от* x. Признак мажорации часто используется для доказательства равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов, в том числе и в доказанной нами теореме.

Подробнее о равномерной сходимости см. [6, Том 2].

Лекция 3. Повторные ядра. Резольвента. Интегральный оператор с союзным ядром

Остановимся более подробно на изучении операторов K^k, входящих в ряд Неймана (2.4). Рассмотрим произвольные интегральные операторы K_1 и K_2 с непрерывными ядрами $\mathscr{K}_1(x,y)$ и $\mathscr{K}_2(x,y)$, и оператор $K_3 = K_1K_2$:

$$(K_3f)(x) = (K_1(K_2f))(x) = \int_G \mathscr{K}_1(x,y)(K_2f)(y)\,dy = \int_G \mathscr{K}_1(x,y)\int_G \mathscr{K}_2(y,\xi)f(\xi)\,d\xi dy,$$

где f — произвольная функция из $L_2(G)$. Функция $\mathscr{K}_1(x,y)\mathscr{K}_2(y,\xi)f(\xi)$ интегрируема в $G\times G$ при любом фиксированном $x\in\bar G$, поэтому можно применить теорему Фубини* и поменять порядок интегрирования:

$$(K_3f)(x) = \int_G\left(\int_G \mathscr{K}_1(x,y)\mathscr{K}_2(y,\xi)\,dy\right)f(\xi)\,d\xi = \int_G\left(\int_G \mathscr{K}_1(x,\xi)\mathscr{K}_2(\xi,y)\,d\xi\right)f(y)\,dy.$$

Мы получили, что оператор K_3 также является интегральным оператором с ядром

$$\mathscr{K}_3(x,y) = \int_G \mathscr{K}_1(x,\xi)\mathscr{K}_2(\xi,y)\,d\xi. \tag{3.1}$$

Ядро $\mathscr{K}_3(x,y)$ непрерывно в $\bar G\times\bar G$, как интеграл от функции, непрерывно зависящей от параметров x и y. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть K_1 и K_2 — интегральные операторы с непрерывными ядрами $\mathscr{K}_1(x,y)$ и $\mathscr{K}_2(x,y)$ соответственно. Тогда $K_3 = K_1K_2$ тоже интегральный оператор с непрерывным ядром $\mathscr{K}_3(x,y)$, определяемым формулой* (3.1).

Пусть K — интегральный оператор с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x,y)$. Используя лемму 3 и метод математической индукции, нетрудно показать, что операторы K^p — интегральные и их непрерывные ядра $\mathscr{K}_p(x,y)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$\mathscr{K}_p(x,y) = \int_G \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}_{p-1}(\xi,y)\,d\xi = \int_G \mathscr{K}_{p-1}(x,\xi)\mathscr{K}(\xi,y)\,d\xi, \quad p = 2,3,\dots,$$
$$\mathscr{K}_1(x,y) = \mathscr{K}(x,y). \tag{3.2}$$

Определение 2. Ядра $\mathscr{K}_p(x,y)$, определенные по формуле (3.2), называются *повторными ядрами* ядра $\mathscr{K}(x,y)$.

Преобразуем ряд Неймана (2.4):

$$\sum_{n=0}^\infty \lambda^n(K^nf)(x) = \sum_{n=1}^\infty \int_G \lambda^n\mathscr{K}_n(x,y)f(y)\,dy + f(x) = \sum_{n=0}^\infty \lambda\int_G \lambda^n\mathscr{K}_{n+1}(x,y)f(y)\,dy +$$
$$+ f(x) = \lambda\int_G\left(\sum_{n=0}^\infty \lambda^n\mathscr{K}_{n+1}(x,y)\right)f(y)\,dy + f(x).$$

Пока смена порядка суммирования и интегрирования носит формальный характер. Для ее обоснования докажем равномерную сходимость ряда в скобках.

Из леммы 1 и (3.2) следует, что $|\mathscr{K}_p(x,y)| \leqslant MV\max\limits_{\xi\in G}|\mathscr{K}_{p-1}(\xi,y)|$. По индукции получаем оценку

$$|\mathscr{K}_p(x,y)| \leqslant M^pV^{p-1}, \quad x,y\in\bar G, \quad p = 1,2,\dots \tag{3.3}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,y)$ мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\lambda|^n M^{n+1}V^n$, сходящимся в круге $|\lambda|<\dfrac{1}{MV}$. Поэтому функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно при $x\in\bar G$, $y\in\bar G$ и $|\lambda|\leqslant\dfrac{1}{MV}-\varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$ и определяет функцию

$$\mathscr{R}(x,y,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathscr{K}_{n+1}(x,y), \tag{3.4}$$

непрерывную по x и y в $\bar G\times\bar G$ и аналитическую* по λ в круге $|\lambda|<\dfrac{1}{MV}$.

Упражнение 5. *Приведите формулировку теоремы из комплексного анализа, из которой в данном случае следует аналитичность по λ.*

Определение 3. Функция $\mathscr{R}(x,y,\lambda)$, определенная по формуле (3.4), называется *резольвентой* ядра $\mathscr{K}(x,y)$.

Нами доказана

Теорема (о резольвенте)**.** *Решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения* (I) *с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x,y)$ единственно в $C(\bar G)$ при $\lambda<\dfrac{1}{MV}$ и представимо в виде*

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_G\mathscr{R}(x,y,\lambda)f(y)\,dy,$$

где $\mathscr{R}(x,y,\lambda)$ — резольвента ядра $\mathscr{K}(x,y)$, определенная равенством (3.4)*. Справедливо операторное равенство*

$$(I-\lambda K)^{-1}=I+\lambda R,\quad |\lambda|<\frac{1}{MV},$$

где R — интегральный оператор с ядром $\mathscr{R}(x,y,\lambda)$.

Определение 4. Оператор K^* называется *сопряженным* к оператору K в пространстве $L_2(G)$, если для любых функций $f,g\in L_2(G)$ справедливо соотношение

$$(Kf,g)=(f,K^*g). \tag{3.5}$$

Если $K=K^*$, оператор называется *самосопряженным*.

Аналогичное определение обычно вводится и для других гильбертовых пространств.

Исследуем оператор, сопряженный к интегральному. Рассмотрим скалярное произведение

$$(Kf,g)=\int_G(Kf)(x)\overline{g(x)}\,dx=\int_G\left(\int_G\mathscr{K}(x,y)f(y)\,dy\right)\overline{g(x)}\,dx$$

Функция $\mathscr{K}(x,y)f(y)\overline{g(x)}$ принадлежит $L(\bar G\times\bar G)$, поэтому мы можем воспользоваться теоремой Фубини и поменять порядок интегрирования.

$$(Kf,g)=\int_G f(y)\int_G\mathscr{K}(x,y)\overline{g(x)}\,dx\,dy\overset{x\leftrightarrow y}{=}$$
$$=\int_G f(x)\overline{\int_G\overline{\mathscr{K}(y,x)}g(y)\,dy}\,dx=\int_G f(x)\overline{(K^*g)(x)}\,dx=(f,K^*g),$$

где K^* — интегральный оператор с ядром

$$\mathscr{K}^*(x,y):=\overline{\mathscr{K}(y,x)}. \tag{3.6}$$

Определение 5. Функция $\mathscr{K}^*(x,y)$, определенная формулой (3.6), называется *союзным* ядром ядра $\mathscr{K}(x,y)$.

Мы только что доказали следующий результат.

Лемма 4. *Сопряженный оператор к интегральному оператору с ядром $\mathscr{K}(x,y)$ является интегральным оператором с союзным ядром $\mathscr{K}^*(x,y) := \overline{\mathscr{K}(y,x)}$.*

Докажем еще один вспомогательный факт.

Лемма 5. $(K_1K_2)^* = K_2^*K_1^*$.

Доказательство. Пусть f и g — произвольные функции из $L_2(G)$. Рассмотрим скалярное произведение (K_1K_2f,g). Дважды применяя формулу (3.5), получаем

$$(K_1K_2f,g) = (K_2f, K_1^*g) = (f, K_2^*K_1^*g).$$

С другой стороны, $(K_1K_2f,g) = (f,(K_1K_2)^*g)$. Используя результат упражнения после леммы 2, заключаем

$$(f,((K_1K_2)^* - K_2^*K_1^*)g) = 0, \quad \forall f,g \in L_2(G) \quad \Rightarrow \quad (K_1K_2)^* = K_2^*K_1^*.$$

□

Получим формулы для повторных ядер и резольвенты.

Лемма 6. *Повторное ядро союзного ядра равно союзному ядру повторного:*

$$(\mathscr{K}^*)_p(x,y) = (\mathscr{K}_p)^*(x,y), \quad p = 1,2,\dots$$

Резольвента союзного ядра равна союзному ядру резольвенты:

$$\mathscr{R}_*(x,y,\lambda) = \overline{\mathscr{R}(y,x,\bar\lambda)}, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}.$$

Доказательство. Для доказательства первого равенства, применим лемму 5 и метод математической индукции: $(K^*)^p = (K^p)^*$. Осталось перейти от операторов к их ядрам.

Так как $|\mathscr{K}^*(x,y)| = |\mathscr{K}(y,x)| \leqslant M$, для повторных ядер справедлива оценка

$$|(\mathscr{K}^*)_p(x,y)| \leqslant M^pV^{p-1}, \quad x,y \in \bar G, \quad p = 1,2,\dots$$

(аналогичная оценке (3.3)). Поэтому ряд

$$\mathscr{R}_*(x,y,\lambda) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\mathscr{K}^*)_n(x,y)$$

сходится равномерно по $(x,y) \in \bar G \times \bar G$ и $|\lambda| \leqslant \dfrac{1}{MV} - \varepsilon$. Используя уже доказанную формулу для повторных ядер, получаем

$$\mathscr{R}_*(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\mathscr{K}_n)^*(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \overline{\mathscr{K}_n(y,x)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \bar\lambda^n \mathscr{K}_{n+1}(y,x)} =$$
$$= \overline{\mathscr{R}(y,x,\bar\lambda)} =: \mathscr{R}^*(x,y,\lambda).$$

□

Для сопряженного оператора справедливо соотношение

$$(I - \bar\lambda K^*)^{-1} = I + \bar\lambda R^*, \quad |\lambda| < \frac{1}{MV}, \tag{3.7}$$

где R — оператор, сопряженный к оператору R. Это интегральный оператор с ядром $\mathscr{R}^*(x,y,\lambda)$.

Лекция 4. Интегральные уравнения с вырожденным ядром, альтернатива Фредгольма для них

Определение 6. Ядро вида

$$\mathscr{K}(x,y)=\sum_{i=1}^{N} f_i(x)g_i(y), \quad f_i, g_i \in C(\bar{G}), \tag{4.1}$$

называется *вырожденным.*

Без ограничения общности можно считать, что системы функций $\{f_i\}_{i=1}^N$ и $\{g_i\}_{i=1}^N$ линейно независимы*. Действительно, если это не так, то, например,

$$f_N(x)=c_1f_1(x)+\dots+c_{N-1}f_{N-1}(x),$$

и ядро $\mathscr{K}(x,y)$, в силу (4.1), принимает вид

$$\mathscr{K}(x,y)=\sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)g_i(y)+\sum_{i=1}^{N-1} c_if_i(x)g_N(y)=\sum_{i=1}^{N-1} f_i(x)g_i^*(y), \quad g_i^*(y):=g_i(y)+c_ig_N(y).$$

Действуя подобным образом, через конечное число шагов добьемся того, что в представлении (4.1) системы функций $\{f_i\}$ и $\{g_i\}$ окажутся линейно независимыми.

Интегральное уравнение Фредгольма (I) с вырожденным ядром примет вид

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{N} f_i(x)\int_G g_i(y)\varphi(y)\,dy+f(x). \tag{4.2}$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{i=1}^{N} c_if_i(x)+f(x), \tag{4.3}$$

где

$$c_i=\int_G \varphi(y)g_i(y)\,dy=(\varphi,\bar{g}_i) \tag{4.4}$$

— неизвестные числа. (Напомним, что $(.,.)$ — скалярное произведение в $L_2(G)$). Умножая равенство (4.3) на $g_k(x)$, интегрируя по области G и пользуясь (4.4), получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для неизвестных чисел c_i,

$$c_k=\lambda\sum_{i=1}^{N} c_i\int_G g_k(x)f_i(x)\,dx+\int_G g_k(x)f(x)\,dx.$$

Обозначая

$$\alpha_{ki}=\int_G g_k(x)f_i(x)\,dx=(f_i,\bar{g}_k), \quad a_k=\int_G f(x)g_k(x)\,dx=(f,\bar{g}_k), \tag{4.5}$$

получаем

$$c_k=\lambda\sum_{i=1}^{N}\alpha_{ki}c_i+a_k, \quad k=\overline{1,N}.$$

Введем матрицу A и векторы c и a:

$$A=[\alpha_{ki}]_{k,i=1}^N, \quad c=[c_k]_{k=1}^N, \quad a=[a_k]_{k=1}^N,$$

и перепишем полученную систему в матричной форме:

$$c=\lambda Ac+a. \tag{4.6}$$

Лемма 7. *Интегральное уравнение* (4.2) *и СЛАУ* (4.6) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\varphi(x) \in C(\bar{G})$ — решение уравнения (4.2). Построим коэффициенты c_i по формулам (4.4). Как мы показали, эти числа удовлетворяют системе (4.6).

Обратно, если вектор $c = [c_i]_{i=1}^N$ удовлетворяет системе (4.6). Тогда функция $\varphi(x)$, построенная по формуле (4.3), непрерывна в $\bar{G}$ и удовлетворяет уравнению (4.2):

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{k=1}^N f_k(x) \int_G g_k(x)\varphi(y)\,dy - f(x) =$$

$$\overset{(4.3)}{=} \lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(x) + f(x) - \lambda \sum_{k=1}^N f_k(x) \int_G g_k(y) \left[\lambda \sum_{i=1}^N c_i f_i(y) + f(y)\right] dy - f(x) =$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^N f_k(x) \left[c_k - \lambda \sum_{i=1}^N c_i \int_G g_k(y) f_i(y)\,dy - \int_G f(y) g_k(y)\,dy\right] =$$

$$\overset{(4.5)}{=} \lambda \sum_{k=1}^N f_k(x) \left[c_k - \lambda \sum_{i=1}^N \alpha_{ki} c_i - a_k\right] \overset{(4.6)}{=} 0.$$

□

Обозначим через $D(\lambda)$ определитель системы (4.6): $D(\lambda) = \det(I - \lambda A)$ и через $M_{ki}(\lambda)$ — алгебраические дополнения* элементов матрицы $(I - \lambda A)$. Здесь и далее I — единичная матрица. Ясно, что $D(\lambda)$ и $M_{ki}(\lambda)$ — полиномы по λ, причем $D(\lambda) \not\equiv 0$, так как $D(0) = \det I = 1$.

Пусть комплексное число λ таково, что $D(\lambda) \neq 0$. По теореме Крамера* решение СЛАУ (4.6) единственно и выражается формулой

$$c_k = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{i=1}^N M_{ki}(\lambda) a_i, \quad k = \overline{1, N}.$$

Подставляя эти соотношения в (4.3) и используя (4.5), получаем решение интегрального уравнения (4.2) при $D(\lambda) \neq 0$ в виде

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{D(\lambda)} \sum_{k,i=1}^N M_{ki}(\lambda) f_k(x) \int_G g_i(y) f(y)\,dy + f(x). \tag{4.7}$$

В частности, это равенство имеет место при достаточно малых λ (поскольку $D(0) \neq 0$ и $D(\lambda)$ — непрерывная функция). Сопоставляя равенство (4.7) с ранее полученным представлением решения в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$ через резольвенту

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{R}(x, y, \lambda) f(y)\,dy + f(x),$$

приходим к следующему представлению для резольвенты вырожденного ядра:

$$\mathscr{R}(x, y, \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k,i=1}^N M_{ki}(\lambda) f_k(x) g_i(y). \tag{4.8}$$

Таким образом, резольвента $\mathscr{R}(x, y, \lambda)$ — рациональная функция аргумента λ и, следовательно, допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость переменного λ. Это продолжение определяется формулой (4.8).

Перейдем к получению **альтернативы Фредгольма** для интегральных уравнений с вырожденным ядром.

Уравнение

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathscr{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy + g(x) \tag{I*}$$

с союзным ядром $\mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}(y,x)}$ называется *союзным* к уравнению (I). Также нам понадобится союзное однородное уравнение

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \int_G \mathscr{K}^*(x,y)\psi(y)\,dy. \tag{II*}$$

Если ядро $\mathscr{K}(x,y)$ вырожденное, союзное ядро и союзное уравнение (I*) принимают вид

$$\mathscr{K}^*(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \bar{g}_i(x)\bar{f}_i(y),$$

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \bar{g}_i(x) \int_G \bar{f}_i(y)\psi(y)\,dy + g(x). \tag{4.9}$$

Приведем союзное уравнение (4.9) к СЛАУ:

$$\psi(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i \bar{g}_i(x) + g(x),$$

$$d_i = \int_G \bar{f}_i(y)\psi(y)\,dy = (\psi, f_i),$$

$$d_k = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} \beta_{ki} d_i + b_k, \quad k = \overline{1,N},$$

$$\beta_{ki} = \int_G \bar{f}_k(x)\bar{g}_i(x)\,dx = \bar{\alpha}_{ik}, \quad b_k = (g, f_k).$$

Заметим, что матрица $[\beta_{ki}]_{k,i=1}^N$ является эрмитово сопряженной* к матрице $[\alpha_{ki}]_{k,i=1}^N$. В итоге получаем, что интегральное уравнение (4.9) эквивалентно СЛАУ

$$d = \bar{\lambda} A^* d + b, \tag{4.10}$$

$$d = [d_k]_{k=1}^N, \quad b = [b_k]_{k=1}^N.$$

Из курса линейной алгебры известно, что определители и ранги* матрицы и ее транспонированной матрицы сопадают. Поэтому

$$\det(I - \bar{\lambda} A^*) = \det(\overline{I - \lambda A^T}) = \overline{\det(I - \lambda A)} = \overline{D(\lambda)},$$

$$\operatorname{rank}(I - \bar{\lambda} A^*) = \operatorname{rank}(\overline{I - \lambda A^T}) = \operatorname{rank}(I - \lambda A) =: q.$$

Итак, возможны два случая.

1. $D(\lambda) \neq 0$. Тогда СЛАУ (4.6) и (4.10), а следственно, и интегральные уравнения (4.2) и (4.9) однозначно разрешимы.

2. $D(\lambda) = 0$. Тогда $q < N$ и однородные системы $c = \lambda A c$ и $d = \bar{\lambda} A^* d$ имеют ровно по $N - q$ линейно независимых решений:

$$c^{(s)} = \left[c_1^{(s)}, c_2^{(s)}, \ldots, c_N^{(s)}\right], \quad d^{(s)} = \left[d_1^{(s)}, d_2^{(s)}, \ldots, d_N^{(s)}\right], \quad s = \overline{1, N-q}.$$

Однородные интегральные уравнения $\varphi = \lambda K\varphi$ и $\psi = \bar{\lambda}K^*\psi$ также имеют ровно по $N-q$ линейно независимых решений

$$\varphi_s(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} c_i^{(s)} f_i(x), \quad \psi_s(x) = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^{N} d_i^{(s)} \bar{g}_i(x), \quad s = \overline{1, N-q}.$$

Докажем линейную независимость полученных систем решений $\{\varphi_s\}_{s=1}^{N-q}$ и $\{\psi_s\}_{s=1}^{N-q}$. Пусть найдутся такие числа p_s, $s = \overline{1, N-q}$, что

$$\sum_{s=1}^{N-q} p_s \varphi_s(x) = 0, \quad x \in G,$$

$$\lambda \sum_{s=1}^{N-q} p_s \sum_{i=1}^{N} c_i^{(s)} f_i(x) = \lambda \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \sum_{s=1}^{N-q} p_s c_i^{(s)} = 0.$$

Отсюда, в силу линейной независимости системы функций $\{f_i\}_{i=1}^{N}$, вытекают равенства

$$\sum_{s=1}^{N-q} c_i^{(s)} p_s = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Система векторов $\{c^{(s)}\}_{s=1}^{N-q}$ линейно независима, следовательно, $p_s = 0$, $s = \overline{1, N-q}$, что и доказывает линейную независимость системы решений $\{\varphi_s\}$. Аналогично устанавливается линейная независимость системы решений $\{\psi_s\}$. Далее исследуем вопрос о разрешимости неоднородной СЛАУ, когда ее определитель равен нулю. Нам понадобится следующая теорема из курса линейной алгебры.

Теорема (Кронекера-Капелли, [7]). *Система линейных уравнений $Ax = b$ с матрицей*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ & \dots\dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы*

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} & b_n \end{bmatrix}.$$

Разрешимость системы (4.6) эквивалентна тому, что вектор свободных коэффициентов a является линейной комбинацией столбцов a_1, a_2, $\dots a_n$ матрицы $I - \lambda A$:

$$a \in \operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}. \tag{4.11}$$

Условие (4.11) эквивалентно условию

$$\forall \eta \in \operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}^{\perp}, \quad a \perp \eta.$$

Знак «$^{\perp}$» обозначает ортогональное дополнение*. Нетрудно видеть, что все такие векторы η удовлетворяют условию $\eta^*(I - \lambda A) = 0$, или, иначе говоря, являются решениями однородного уравнения

$$(I - \bar{\lambda}A^*)\eta = 0,$$

сопряженного к исходному.

Мы пришли к следующему важному результату.

Следствие (из теоремы Кронекера-Капелли). *Система линейных уравнений* (4.6) *разрешима тогда и только тогда, когда ее вектор свободных членов ортогонален ко всем решениям однородной сопряженной системы:*

$$(a, d^{(s)}) = 0, \quad s = \overline{1, N-q}. \tag{4.12}$$

Покажем, что условие (4.12) для алгебраических систем эквивалентно следующему условию для интегральных уравнений:

$$(f, \psi^{(s)}) = 0, \quad s = \overline{1, N-q}. \tag{4.13}$$

Отметим, что в равенствах (4.12) — скалярное произведение векторов, а в (4.13) — скалярное произведение функций в $L_2(G)$.

Действительно,

$$(f, \psi^{(s)}) = \left(f, \bar{\lambda}\sum_{i=1}^{N} d_i^{(s)}\bar{g}_i(x)\right) = \lambda \sum_{i=1}^{N} \bar{d}_i^{(s)}(f, \bar{g}_i) \overset{(4.5)}{=} \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{d}_i^{(s)} = \lambda(a, d^{(s)}).$$

Таким образом, мы установили справедливость теорем Фредгольма для интегральных уравнений (I) и (I*) с вырожденным ядром.

Теорема (1-я теорема Фредгольма). *Если интегральное уравнение* (I) *разрешимо в $C(\bar{G})$ при любом свободном члене $f \in C(\bar{G})$, то и союзное к нему уравнение* (I*) *разрешимо в $C(\bar{G})$ при любом свободном члене $g \in C(\bar{G})$, причем эти решения единственны.*

Если интегральное уравнение (I) разрешимо не при любом свободном члене f, то

Теорема (2-я теорема Фредгольма). *…однородные уравнения* (II) *и* (II*) *имеют одинаковое количество линейно независимых решений.*

Теорема (3-я теорема Фредгольма). *…для разрешимости интегрального уравнения* (I) *необходимо и достаточно, чтобы свободный член f был ортогонален ко всем решениям союзного однородного уравнения:*

$$(f, \psi_s) = 0, \quad s = \overline{1, N-q}.$$

Определение 7. Комплексные значения λ, при которых однородное интегральное уравнение (II) имеет нетривиальные решения, называются *характеристическими числами* ядра $\mathscr{K}(x, y)$, а соответствующие решения — *собственными функциями* этого ядра.

Упражнение 6. *Может ли $\lambda = 0$ быть характеристическим числом?*

Следствие (из альтернативы Фредгольма). *Характеристические числа вырожденного ядра совпадают с корнями многочлена $D(\lambda)$, следовательно, их конечное число.*

Замечание. Может оказаться, что функции f_i и g_i в представлении вырожденного ядра зависят от λ:

$$\mathscr{K}(x, y, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x, \lambda) g_i(x, \lambda).$$

Пусть $f_i(x, \lambda)$ и $g_i(x, \lambda)$ аналитичны по λ в некотором круге $|\lambda| < \omega$. В этом случае элементы матрицы A, вычисляемые по формуле

$$\alpha_{ki}(\lambda) = \int_G g_k(x, \lambda) f_i(x, \lambda)\, dx$$

— аналитические функции в круге $|\lambda| < \omega$. Следовательно, определитель $D(\lambda)$ также является аналитической функцией в этом круге. Теоремы Фредгольма остаются справедливыми при условии, что $|\lambda| < \omega$.

Алгоритм решения интегрального уравнения с вырожденным ядром.

1. Представить ядро в виде (4.1), выписать $f_i(x)$, $g_i(y)$.
2. Добиться линейной независимости систем $\{f_i\}$, $\{g_i\}$.
3. Построить α_{ki} и a_k по формулам (4.5).
4. Построить систему (4.6).
5. Найти определитель $D(\lambda)$ и его нули.
6. Рассмотреть случай $D(\lambda) \neq 0$. Найти единственное решение системы (4.6) по формулам Крамера.
7. Рассмотреть отдельно каждый из корней $D(\lambda)$. Решить систему (4.6). Возможно, она не будет иметь решения или будет иметь бесконечно много решений, зависящих от произвольных постоянный.
8. По решениям системы $[c_i]_{i=1}^N$, найденных в п. 6 и 7, построить $\varphi(x)$ по формуле (4.3).
9. Характеристические числа — это нули $D(\lambda)$, собственные функции — соответствующие им решения $\varphi(x)$ однородного интегрального уравнения.

Лекция 5. Альтернатива Фредгольма для интегральных уравнений с произвольным непрерывным ядром

Доказанные в прошлой лекции теоремы Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром допускают распространение на интегральные уравнения с произвольным непрерывным ядром. Идея доказательства состоит в том, что непрерывное ядро представляется в виде суммы вырожденного ядра и достаточно малого непрерывного ядра. Это дает возможность, построив резольвенту малого ядра методом последовательных приближений, свести интегральное уравнение с произвольным непрерывным ядром к уравнению с вырожденным ядром, для которого теоремы Фредгольма установлены.

Итак, пусть ядро $\mathscr{K}(x,y)$ непрерывно на $\bar{G}\times\bar{G}$. Согласно теореме Вейерштрасса [6, Том 3] любую непрерывную функции можно приблизить многочленом с любой степенью точности, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен

$$\mathscr{P}(x,y) = \sum_{0\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant N} a_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta},$$

что $|\mathscr{K}(x,y) - \mathscr{P}(x,y)| < \varepsilon$ при всех $x\in\bar{G}$, $y\in\bar{G}$. Таким образом,

$$\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{P}(x,y) + \mathscr{Q}(x,y),$$

где $\mathscr{P}(x,y)$ — вырожденное ядро (многочлен) и $\mathscr{Q}(x,y)$ — малое непрерывное ядро, $|\mathscr{Q}(x,y)| < \varepsilon$, $x\in\bar{G}$, $y\in\bar{G}$.

Интегральное уравнение (I) принимает вид

$$\varphi = \lambda P\varphi + \lambda Q\varphi + f, \tag{5.1}$$

где P и Q — интегральные операторы с ядрами $\mathscr{P}(x,y)$ и $\mathscr{Q}(x,y)$ соответственно, причем $P+Q=K$.

Введем функцию

$$\Phi = \varphi - \lambda Q\varphi. \tag{5.2}$$

Соотношение (5.2) можно рассматривать как интегральное уравнение с ядром $\mathscr{Q}(x,y)$ относительно функции φ, если Φ известно. Согласно теореме о резольвенте, это уравнение однозначно разрешимо в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon V}$ и его решение может быть найдено по формуле

$$\varphi = (I+\lambda R)\Phi, \tag{5.3}$$

где R — интегральный оператор с ядром $\mathscr{R}(x,y,\lambda)$ — резольвентой ядра $\mathscr{Q}(x,y)$. Подставляя (5.2) и (5.3) в (5.1), получаем

$$\Phi = \varphi - \lambda Q\varphi = \lambda P\varphi + f = \lambda P(I+\lambda R)\Phi + f,$$

$$\Phi = \lambda T\Phi + f, \tag{5.4}$$

где $T = P(I+\lambda R)$. Вспомним, что резольвента $\mathscr{R}(x,y,\lambda)$ непрерывна по переменным x, y, λ и аналитична по λ в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon V}$. Принимая во внимание лемму о повторных ядрах, заключаем, что T — интегральный оператор с непрерывным ядром

$$\mathscr{T}(x,y,\lambda) = \mathscr{P}(x,y) + \lambda\int_G \mathscr{P}(x,\xi)\mathscr{R}(\xi,y,\lambda)\,d\xi =$$

$$= \sum a_{\alpha\beta}x^{\alpha}y^{\beta} + \lambda\int_G \sum a_{\alpha\beta}x^{\alpha}\xi^{\beta}\mathscr{R}(\xi,y,\lambda)\,d\xi = \sum a_{\alpha\beta}x^{\alpha}\left[y^{\beta} + \lambda\int_G \xi^{\beta}\mathscr{R}(\xi,y,\lambda)\,d\xi\right].$$

Ядро $\mathscr{T}(x,y,\lambda)$ — вырожденное, аналитическое по λ в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon V}$, т.е. именно такое ядро, о каком идет речь в замечании к теоремам Фредгольма.

Мы получили, что уравнение (I) эквивалентно уравнению с вырожденным ядром (5.4) в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon V}$. Эквивалентность вытекает из того, что формулы (5.2) и (5.3) задают взаимно однозначное соответствие между решениями этих уравнений. Зная φ (решение уравнения (I)), можно по формуле (5.2) построить Φ — соответствующее решение уравнения (5.4), и наоборот, по любому решению Φ можно построить φ, пользуясь формулой (5.3).

Теперь преобразуем союзное интегральное уравнение (I*). Ясно, что $K^* = P^* + Q^*$. Поэтому уравнение (I*) принимает вид

$$(I - \bar{\lambda}Q^*)\psi = \bar{\lambda}P^*\psi + g.$$

Используя соотношение (3.7) для резольвенты сопряженного оператора:

$$(I - \bar{\lambda}Q^*)^{-1} = I + \bar{\lambda}R^*, \quad |\lambda| < \frac{1}{\varepsilon V},$$

преобразуем уравнение

$$\psi = (I - \bar{\lambda}Q^*)^{-1}(\bar{\lambda}P^*\psi + g) = (I + \bar{\lambda}R^*)(\bar{\lambda}P^*\psi + g) = \\ = \bar{\lambda}(I + \bar{\lambda}R^*)P^*\psi + (I + \bar{\lambda}R^*)g.$$

Обозначая

$$g_1 = (I + \bar{\lambda}R^*)g, \quad g = (I - \bar{\lambda}Q^*)g_1$$

и учитывая, что

$$(I + \bar{\lambda}R^*)P^* = (P(I + \lambda R))^* = T^*,$$

приходим к уравнению

$$\psi = \bar{\lambda}T^*\psi + g_1. \tag{5.5}$$

Таким образом, союзное интегральное уравнение (I*) эквивалентно уравнению с вырожденным ядром (5.5), союзному к уравнению (5.4).

Для уравнений (5.4) и (5.5) справедливы три теоремы Фредгольма, как для уравнений с вырожденным ядром. Докажем справедливость теорем теорем Фредгольма для уравнений (I) и (I*) с произвольным непрерывным ядром (формулировки теорем остаются неизменными).

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ — фиксированное число. Выберем $\varepsilon < \dfrac{1}{|\lambda|V}$. Представим ядро $\mathscr{K}(x,y)$ в виде суммы вырожденного и малого ядер, так чтобы для малого ядра выполнялось соотношение $|\mathscr{Q}(x,y) < \varepsilon|$ с выбранным ε. Тогда, как было показано ранее, в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon V}$ уравнения (I) и (I*) эквивалентны уравнениям (5.4) и (5.5).

Пусть уравнение (I) разрешимо в $C(\bar{G})$ при любом $f \in C(\bar{G})$. Тогда эквивалентное ему уравнение (5.4) также будет разрешимо при любом f. Согласно первой теореме Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром, союзное к нему уравнение (5.5) разрешимо при любом свободном члене g_1. Следовательно, разрешимо и эквивалентное к нему уравнение (I*). Более того, согласно первой теореме Фредгольма, решения уравнений (5.4) и (5.5) единственные. Это означает, что уравнения (I) и (I*) также однозначно разрешимы в силу взаимно однозначного соответствия между решениями. Первая теорема Фредгольма доказана.

Если уравнение (I) разрешимо в $C(\bar{G})$ не при любом f, то же самое можно сказать и про эквивалентное ему уравнение (5.4). Согласно второй теореме Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром, однородные уравнения $\Phi = \lambda T\Phi$ и $\psi = \bar{\lambda}T^*\psi$ имеют одинаковое количество линейно независимых решений. Но эти уравнения эквивалентны однородным уравнениям (II) и (II*) соответственно. От решений уравнения $\Phi = \lambda T\Phi$ можно перейти к решениям уравнения (II) по формуле (5.2). Следовательно, однородные уравнения (II) и (II*) имеют одинаковое количество линейно независимых решений и вторая теорема Фредгольма доказана.

Далее, по третьей теореме Фредгольма для интегральных уравнений с вырожденным ядром для разрешимости уравнения (5.4) необходимо и достаточно, чтобы его свободный член f был ортогонален ко всем решениям ψ_s союзного однородного уравнения (5.5). Заметим, что f также является свободным членом уравнения (I), а ψ_s — решениями союзного к нему однородного уравнения (II*). В силу эквивалентности уравнений получаем справедливость третьей теоремы Фредгольма для уравнений (I) и (I*). □

Упражнение 7. *Что не проходит в доказательстве теорем при $\lambda = 0$? Рассмотрите отдельно этот случай.*

Алгоритм решения интегрального уравнения с произвольным непрерывным ядром.

1. Приблизить ядро $\mathscr{K}(x, y)$ многочленом $\mathscr{P}(x, y)$.
2. Для малого ядра $\mathscr{Q}(x, y) = \mathscr{K}(x, y) - \mathscr{P}(x, y)$ методом последовательных приближений построить резольвенту $\mathscr{R}(x, y, \lambda)$.
3. Составить уравнение (5.4) с вырожденным ядром $\mathscr{T}(x, y, \lambda)$.
4. Найти Φ из уравнения (5.4).
5. Найти φ по формуле (5.3).

Лекция 6. Связь интегральных уравнений с теорией вполне непрерывных операторов. Следствия из теорем Фредгольма

Теория Фредгольма для интегральных уравнений представляет собой частный случай теории Фредгольма для вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. В данном разделе без доказательства приводится ряд фактов из функционального анализа. Более подробно с ними можно ознакомиться в книге [11]. Наша основная цель — показать связь интегральных операторов с общей теорией.

Пусть H — гильбертово * пространство. Оператор $A\colon H \to H$ называется *вполне непрерывным* (*компактным*), если он переводит всякое ограниченное* множество в предкомпактное.

Предкомпактность множеств в функциональных пространствах обычно проверяется при помощи критериев. Например, следующая теорема дает критерий предкомпактности в $C(\bar{G})$.

Теорема (Арцела). *Множество функций $\mathcal{M} \subset C(\bar{G})$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено:*

$$\exists C \quad \forall x \in \bar{G} \quad \forall f \in \mathcal{M} |f(x)| \leqslant C,$$

и равностепенно непрерывно:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall s, t \in \bar{G},\, |s-t| < \delta \quad \forall f \in \mathcal{M} \quad |f(s) - f(t)| < \varepsilon.$$

Утверждение 1. *Интегральный оператор K с непрерывным ядром вполне непрерывен.*

Доказательство. По лемме 1 оператор K действует из $L_2(G)$ в $C(\bar{G})$ и справедлива оценка $\|Kf\|_C \leqslant M\sqrt{V}\|f\|_{L_2}$.

Пусть множество функций $\mathcal{M}$ ограничено в $L_2(G)$:

$$\|f\|_{L_2} \leqslant C, \quad \forall f \in \mathcal{M}.$$

Тогда множество $\{Kf,\, f \in \mathcal{M}\}$ равномерно ограничено: $\|Kf\|_C \leqslant M\sqrt{V}C$.

Рассмотрим разность

$$|(Kf)(s) - (Kf)(t)| = \left| \int_G \mathscr{K}(s,y) f(y)\, dy - \int_G \mathscr{K}(t,y) f(y)\, dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_G |\mathscr{K}(s,y) - \mathscr{K}(t,y)| |f(y)|\, dy \leqslant \sqrt{\int_G |\mathscr{K}(s,y) - \mathscr{K}(t,y)|^2\, dy} \cdot \sqrt{\int_G |f(y)|^2\, dy}.$$

Последним действием мы применили неравенство Коши-Буняковского. Ядро $\mathscr{K}(x,y)$ непрерывно на компакте $\bar{G} \times \bar{G}$, поэтому оно равномерно непрерывно по первой переменной:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall s, t \in \bar{G},\, |s-t| < \varepsilon \quad \forall y \in \bar{G} \quad |\mathscr{K}(s,y) - \mathscr{K}(t,y)| < \varepsilon.$$

Выбирая такие δ, s и t, получаем

$$|(Kf)(s) - (Kf)(t)| \leqslant \varepsilon\sqrt{V}\|f\|_{L_2},$$

откуда следует равностепенная непрерывность множества $\{Kf,\ f \in \mathcal{M}\}$ в $C(\bar{G})$.

Таким образом, оператор K переводит любое ограниченное множество в предкомпактное и по определению является вполне непрерывным. Строго говоря, мы показали вполне непрерывность оператора из $L_2(G)$ в $C(\bar{G})$. Однако можно проверить, что из предкомпактности в $C(\bar{G})$ следует предкомпактность в $L_2(G)$. □

Оператор A называется *конечномерным*, если пространство его значений конечномерно.

Утверждение 2. *Интегральный оператор K с вырожденным ядром конечномерен.*

Доказательство. Рассмотрим интегральный оператор с вырожденным ядром:

$$(Kf)(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \int_G g_i(y) f(y)\, dy.$$

Очевидно, что множество его значений принадлежит пространству

$$\operatorname{span}\{f_i\}_{i=1}^N = \left\{ \sum_{i=1}^{N} c_i f_i(x) \right\}.$$

Линейно независимые функции f_i образуют конечный базис в этом пространстве, следовательно, оно конечномерно. □

Факт 1. *Если последовательность конечномерных операторов A_n сходится по норме* к оператору A, то A — вполне непрерывный оператор. В частности, любой конечномерный оператор вполне непрерывен.*

Факт 2. *В гильбертовом пространстве любой оператор A может быть аппроксимирован последовательностью конечномерных операторов A_n, сходящейся к нему по норме.*

Последний факт является ключевым при доказательстве теорем Фредгольма. Мы докажем его для частного случая интегральных операторов.

Утверждение 3. *Для любого интегрального оператора K с непрерывным ядром существует последовательность конечномерных операторов, сходящаяся к нему по норме.*

Доказательство. По теореме Вейерштрасса

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathscr{P}(x,y) = \sum_{0 \leqslant \alpha+\beta \leqslant N} a_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad \forall (x,y) \in \bar{G} \times \bar{G} \quad |\mathscr{K}(x,y) - \mathscr{P}(x,y)| < \varepsilon.$$

Возьмем последовательность $\varepsilon_n = 1/n$ и построим последовательность многочленов $\mathscr{P}_n(x,y)$, такую, что $|\mathscr{K}(x,y) - \mathscr{P}_n(x,y)| < \varepsilon_n$, и последовательность конечномерных операторов P_n:

$$(P_n f)(x) = \int_G \mathscr{P}_n(x,y) f(y)\, dy.$$

Согласно оценкам леммы 1,

$$\|K - P_n\|_{L_2 \to L_2} \leqslant \max |\mathscr{K}(x,y) - \mathscr{P}_n(x,y)| V \leqslant \frac{V}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

□

Подведем итог. Мы начали изучение теории Фредгольма с интегральных уравнений, имеющих вырожденные ядра. Такие уравнения эквивалентны системам линейных алгебраических уравнений, поэтому их свойства полностью описываются линейной алгеброй. Однако уравнения с вырожденным ядром представляют собой лишь узкий подкласс. В общем случае интегральные операторы обладают принципиально иными свойствами, потому что они бесконечномерные. Например, как мы убедимся в дальнейшем, непрерывные ядра общего вида имеет бесконечное множество характеристических чисел. Тем не менее, произвольный интегральный оператор может быть *аппроксимирован* конечномерными, и это дает возможность построения теории Фредгольма для интегральных операторов в общем случае. Эта же идея аппроксимации может быть использована при изучении интегральных уравнений с различными особенностями ядра, например, для полярных ядер (см. [1]), а также для дискретных операторов в пространствах последовательностей. В связи с необходимостью изучения различных классов интегральных уравнений возник вопрос о выделении существенных свойств, необходимых для применения этой идеи — аппроксимации конечномерными операторами, и формулировки результатов для наиболее широкого абстрактного класса объектов. Таким абстрактным классом и стал класс вполне непрерывных операторов, а теоремы Фредгольма для конкретного класса интегральных операторов (например, с непрерывнм ядром) можно рассматривать как следствия общей теории. Таким образом, взаимосвязь линейной алгебры, теории интегральных уравнений и абстрактных вполне непрерывных операторов можно продемонстрировать при помощи следующей схемы.

Линейная алгебра		Интегральные уравнения		Функциональный анализ
R^n	$\subset$	C, L_2	$\subset$	Банаховы и гильбертовы пространства
Конечномерные операторы		Интегральные операторы		Вполне непрерывные операторы

Следствия из теорем Фредгольма.

1. В каждом круге $|\lambda| \leqslant R$ может находиться лишь конечное число характеристических чисел непрерывного ядра $\mathscr{K}(x, y)$.

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \dfrac{1}{V(R+1)}$. Тогда при $|\lambda| < R+1$ будет $|\lambda| < \dfrac{1}{\varepsilon V}$. Поэтому в круге $|\lambda| < R+1$ однородное уравнение (I) эквивалентно уравнению $\Phi = \lambda T\Phi$ с вырожденным ядром $\mathscr{T}(x, y, \lambda)$, аналитическим по λ в этом круге. Следовательно, характеристические числа ядра $\mathscr{K}(x, y)$ совпадают с нулями определителя $D(\lambda)$, построенного по ядру $\mathscr{T}(x, y, \lambda)$. Функция $D(\lambda)$ — аналитическая функция в круге $|\lambda| < R+1$. Воспользуемся *свойством единственности аналитических функций*:

Теорема ([8]). *Пусть две функции $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$, аналитические в некоторой области G, имеют равные значения на бесконечном множестве E в этой области, причем множество E допускает по крайней мере одну предельную точку, лежащую внутри G, то эти функции равны между собой всюду в области G.*

Предположим, что функция $D(\lambda)$ имеет в *замкнутом* круге $|\lambda| \leqslant R$ бесконечное множество нулей. Тогда это множество имеет предельную точку в круге $|\lambda| \leqslant R$. Применяя теорему единственности к функциям $f(\lambda) = D(\lambda)$ и $g(\lambda) \equiv 0$, получаем $D(\lambda) \equiv 0$, что невозможно.

Таким образом, в круге $|\lambda| \leqslant R$ может находиться лишь конечное число корней уравнения $D(\lambda) = 0$ и ядро $\mathscr{K}(x, y)$ имеет лишь конечное число характеристических чисел в этом круге. $\square$

2. Множество характеристических чисел непрерывного ядра не имеет конечных предельных точек и, значит, не более чем счетно.

Действительно, если бы это множество имело конечную предельную точку, нашелся бы круг $|\lambda| \leqslant R$, содержащий предельную точку с некоторой окрестностью, что противоречит следствию 1.

Рассмотрим области $C_1 = \{\lambda\colon |\lambda| \leqslant 1\}$, $C_2 = \{\lambda\colon 1 < |\lambda| \leqslant 2\}, \ldots, C_n = \{\lambda\colon n-1 < |\lambda| \leqslant n\}$ (см. рис. 4). Каждая из них содержит конечное множество характеристических чисел (возможно, пустое). Это означает, что мы можем занумеровать сначала характеристические числа, принадлежащие C_1, затем — C_2 и т.д. Следовательно, множество характеристических чисел конечно или счетно.

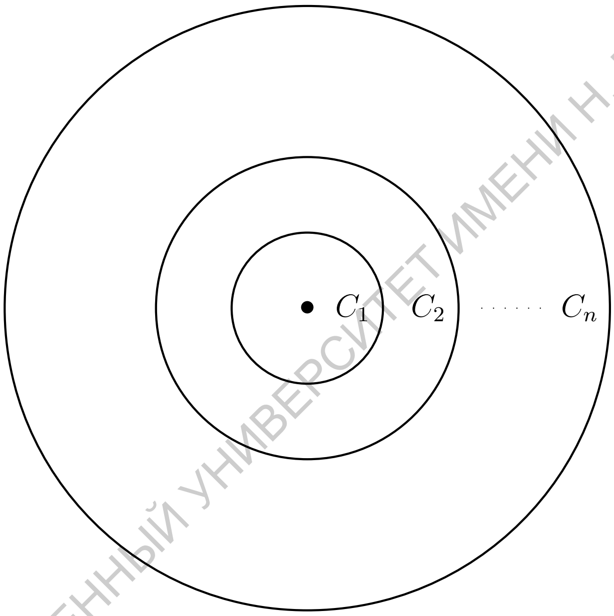

Рис. 4

3. *Кратностью* характеристического числа называется количество соответствующих ему линейно независимых собственных функций. Кратность каждого характеристического числа конечна. Это непосредственно вытекает из второй теоремы Фредгольма.

Следовательно, все характеристические числа ядра $\mathscr{K}(x, y)$ можно перенумеровать в порядке возрастания модуля:

$$|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots,$$

повторяя в этой последовательности λ_k столько раз, какова его кратность. Соответствующие собственные функции обозначим через φ_1, φ_2, ..., и каждому характеристическому числу λ_k сопоставим собственную функцию φ_k:

$$\varphi_k = \lambda_k K \varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.1}$$

4. По второй теореме Фредгольма $\bar{\lambda}_1$, $\bar{\lambda}_2$, ...— все характеристические числа союзного ядра $\mathscr{K}^*(x, y)$, причем кратности λ_k и $\bar{\lambda}_k$ совпадают. Соответствующие собственные функции обозначим через ψ_k:

$$\psi_k = \bar{\lambda}_k K^* \psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.2}$$

5. При $\lambda_k \neq \lambda_i$ собственные функции ядер $\mathscr{K}(x,y)$ и $\mathscr{K}^*(x,y)$ ортогональны: $(\varphi_k, \psi_i) = 0$.

Доказательство.

$$(\varphi_k, \psi_i) \overset{(6.2)}{=} (\varphi_k, \bar{\lambda}_i K^* \psi_i) \overset{(3.5)}{=} \lambda_i (K\varphi_k, \psi_i) \overset{(6.1)}{=} \frac{\lambda_i}{\lambda_k}(\varphi_k, \psi_i).$$

Отсюда в силу $\lambda_k \neq \lambda_i$ получаем требуемое. □

6. λ_k^p и φ_k, $k = 1, 2, \ldots$ — характеристические числа и собственные функции повторного ядра $\mathscr{K}_p(x,y)$.

Доказательство.

$$\varphi_k = \lambda_k K \varphi_k \overset{(6.1)}{=} \lambda_k K(\lambda_k K \varphi_k) = \lambda_k^2 K^2 \varphi_k = \cdots = \lambda_k^p K^p \varphi_k.$$

□

7. Справедливо и обратное утверждение: если μ и φ — характеристическое число и соответствующая собственная функция повторного ядра $\mathscr{K}_p(x,y)$, то по крайней мере один из корней λ_j, $j = \overline{1,p}$ уравнения $\lambda^p = \mu$ является характеристическим числом ядра $\mathscr{K}(x,y)$.

Доказательство. Ясно, что

$$I - \mu K^p = (I - \lambda_1 K)(I - \lambda_2 K) \ldots (I - \lambda_p K).$$

Поскольку φ — собственная функция повторного ядра, $(I - \mu K^p)\varphi = 0$, следовательно,

$$(I - \lambda_1 K)(I - \lambda_2 K) \ldots (I - \lambda_p K)\varphi = 0.$$

Обозначим $\xi_1 := (I - \lambda_2 K) \ldots (I - \lambda_p K)\varphi$. Если $\xi_1 \neq 0$, то в силу $(I - \lambda_1 K)\xi_1 = 0$ функция ξ_1 является собственной функцией ядра $\mathscr{K}(x,y)$, отвечающей характеристическому числу λ_1. В противном случае имеем:

$$(I - \lambda_2 K) \ldots (I - \lambda_p K)\varphi = 0.$$

Аналогично ξ_1, рассмотрим $\xi_2 = (I - \lambda_2 K) \ldots (I - \lambda_p K)\varphi$. Либо ξ_2 является собственной функцией, отвечающей характеристическому числу λ_2, либо $(I - \lambda_3 K) \ldots (I - \lambda_p K)\varphi = 0$. Продолжая рассуждения по индукции, мы на некотором шаге получим собственную функцию ξ_k, отвечающую характеристическому числу λ_k. В противном случае мы придем к $\varphi = 0$, чего не может быть, поскольку φ — собственная функция. □

8. Переформулируем альтернативу Фредгольма в терминах характеристических чисел и собственных функций.

Если $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, то уравнения (I) и (I*) однозначно разрешимы при любых свободных членах.

Если $\lambda = \lambda_k$, то однородные уравнения (II) и (II*) имеют одинаковое (конечное) число $r_k \geqslant 1$ линейно независимых решений — собственных функций φ_k, φ_{k+1}, …, φ_{k+r_k-1} ядра $\mathscr{K}(x,y)$ и собственных функций ψ_k, ψ_{k+1}, …, ψ_{k+r_k-1} ядра $\mathscr{K}^*(x,y)$, соответсвующих характеристическим числам λ_k и $\bar{\lambda}_k$ (r_k — кратность λ_k и $\bar{\lambda}_k$).

Если $\lambda = \lambda_k$, то для разрешимости уравнения (I) необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, \psi_{k+i}) = 0, \quad i = \overline{0, r_k - 1}.$$

Лекция 7. Интегральные уравнения с эрмитовым ядром

Определение 8. Ядро $\mathscr{K}(x,y)$ называется *эрмитовым*, если оно совпадает со своим союзным ядром, т.е. $\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}^*(x,y) = \overline{\mathscr{K}(y,x)}$.

Лемма 8. *Непрерывное ядро $\mathscr{K}(x,y)$ интегрального оператора $K\colon L_2(G) \to L_2(G)$ эрмитово тогда и только тогда, когда оператор K самосопряженный:*

$$(Kf,g) = (f,Kg), \quad f,g \in L_2(G). \tag{7.1}$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из лемм 2 и 4. □

Лемма 9. *Все повторные ядра эрмитова ядра эрмитовы.*

Доказательство. Согласно лемме 6,

$$(\mathscr{K}_p)^*(x,y) = (\mathscr{K}^*)_p(x,y) = \mathscr{K}_p(x,y).$$

□

Теорема (вариационный принцип). *Всякое эрмитово непрерывное ядро $\mathscr{K}(x,y) \not\equiv 0$ имеет по крайней мере одно характеристическое число, и наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 удовлетворяет вариационному принципу*

$$\frac{1}{|\lambda_1|} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|Kf\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}}. \tag{7.2}$$

Доказательство. 1. Обозначим через ν точную верхнюю грань* функционала $\|Kf\|_{L_2}$ на множестве функций f из $L_2(G)$ с единичной нормой:

$$\nu := \sup_{\|f\|_{L_2}=1} \|Kf\|_{L_2}.$$

По лемме 1 в данном случае получаем $\|Kf\|_{L_2} \leqslant MV$, поэтому $\nu \leqslant MV$. Кроме того, ясно, что $\nu \geqslant 0$. Докажем, что $\nu > 0$. Действительно, если $\nu = 0$, то $Kf = 0$ при всех $f \in L_2(G)$. По лемме 2 отсюда следует $\mathscr{K}(x,y) \equiv 0$, что противоречит нашему предположению. Следовательно, $0 < \nu \leqslant MV$.

По определению точной верхней грани существует последовательность функций f_k, $k = 1, 2, \ldots$, такой что $\|f_k\|_{L_2} = 1$ и

$$\|Kf_k\| \to \nu, \quad k \to \infty. \tag{7.3}$$

2. Главная идея дальнейших рассуждений в том, чтобы построить функцию $\psi \neq 0$, удовлетворяющую соотношениям

$$K^2\psi = \nu^2\psi \quad \Leftrightarrow \quad \psi = \frac{1}{\nu^2}K^2\psi, \quad \nu \neq 0.$$

Эта функция будет собственной функцией повторного ядра $\mathscr{K}_2(x,y)$, отвечающей характеристическому числу $\dfrac{1}{\nu}$. По следствию 7 из теорем Фредгольма хотя бы одно из чисел $\pm\dfrac{1}{\nu}$ будет характеристическим числом ядра $\mathscr{K}(x,y)$. Очевидно, для этого характеристического числа будет справедлива формула (7.2).

3. Для нахождения функции ψ построим последовательность, сходящуюся к этой функции. Докажем, что

$$K^2 f_k - \nu^2 f_k \to 0, \quad \text{в } L_2(G), \quad k \to \infty. \tag{7.4}$$

Действительно,

$$\|K^2 f_k - \nu^2 f_k\|_{L_2}^2 = (K^2 f_k - \nu^2 f_k, K^2 f_k - \nu^2 f_k) = (K^2 f_k, K^2 f_k) + \nu^4 (f_k, f_k) -$$
$$- \nu^2 (f_k, K^2 f_k) - \nu^2 (K^2 f_k, f_k) \overset{(7.1)}{=} \|K^2 f_k\|_{L_2}^2 + \nu^4 - 2\nu^2 (K f_k, K f_k).$$

Используя оценку из леммы 1 и определение ν, получаем $\|K^2 f_k\|_{L_2} \leqslant \nu \|K f_k\|_{L_2}$,

$$\|K^2 f_k - \nu^2 f_k\|_{L_2}^2 \leqslant \nu^2 \|K f_k\|_{L_2}^2 + \nu^4 - 2\nu^2 \|K f_k\|_{L_2}^2 = \nu^4 - \nu^2 \|K f_k\|^2 \overset{(7.3)}{\to} 0, \quad k \to \infty.$$

4. Последовательность $\{f_k\}$ представляет собой ограниченное множество — подмножество единичной сферы. Поскольку оператор K с непрерывным ядром вполне непрерывен, он переводит любое ограниченное множество в предкомпактное. Это означает, что из последовательности $\{K f_k\}$ можно выделить сходящуюся в $C(\bar{G})$ подпоследовательность $\psi_i = K f_{k_i}$, $i \geqslant 0$. Обозначим $\psi := \lim\limits_{i\to\infty} \psi_i$. Используя лемму 1, получаем

$$\|K^2\psi - \nu^2\psi\|_C \leqslant \|K^2(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2 \|\psi - \psi_i\|_C + \|K^2\psi_i - \nu^2\psi_i\|_C \leqslant$$
$$\leqslant MV \|K(\psi - \psi_i)\|_C + \nu^2 \|\psi - \psi_i\|_C + \|K(K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i})\|_C \leqslant$$
$$\leqslant (M^2 V^2 + \nu^2) \|\psi - \psi_i\|_C + M\sqrt{V} \|K^2 f_{k_i} - \nu^2 f_{k_i}\|_{L_2} \to 0, \quad i \to \infty.$$

Но левая часть неравенства не зависит от i, следовательно, $K\psi = \nu^2 \psi$.

5. Покажем, что $\psi \neq 0$. Из предельного соотношения (7.4) следует, что

$$K\psi_i - \nu^2 f_{k_i} \to 0 \quad \text{в } L_2(G), \quad i \to \infty.$$

Следовательно, $\|K\psi_i\|_{L_2} \to \nu^2$, $i \to \infty$. С другой стороны, $\|K\psi_i\|_{L_2} \to \|K\psi\|_{L_2}$, $i \to \infty$. Приходим к выводу, что $\|K\psi\|_{L_2} = \nu^2 \neq 0$, что и доказывает требуемое. Таким образом, ψ — функция из п. 2 данного доказательства. В итоге мы установили существование характеристического числа λ_1, удовлетворяющего вариационному принципу (7.2).

6. Осталось доказать, что λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число. Рассмотрим некоторое другое характеристическое число λ_0 с собственной функцией φ_0: $\varphi_0 = \lambda_0 K \varphi_0$. Тогда

$$\frac{1}{|\lambda_0|} = \frac{\|K\varphi_0\|_{L_2}}{\|\varphi_0\|_{L_2}} \leqslant \sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|Kf\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}} \overset{(7.2)}{=} \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

Следовательно, $\|\lambda_1\| \leqslant \|\lambda_0\|$, что и требовалось доказать.

□

Упражнение 8. *Где в доказательстве теоремы используется эрмитовость ядра?*

Упражнение 9. *Покажите, что*

$$\sup_{f \in L_2(G)} \frac{\|Kf\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}} = \sup_{\|g\|_{L_2} = 1} \|Kg\|_{L_2}.$$

Где этот факт применяется в доказательстве?

Объединяя результаты лекций 6 и 7, приходим к следующему **выводу**: множество характеристических чисел эрмитова непрерывного ядра $\{\lambda_k\}$ непусто, лежит на вещественной оси, не имеет конечных предельных точек. Каждое характеристическое число имеет конечную кратность. Система собственных функций $\{\varphi_k\}$ может быть выбрана ортогональной, т.е.

$$(\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ki},$$

где δ_{ki} — символ Кронекера: δ_{ki} равно 1, если $k = i$, и равно 0 в противном случае.

Лекция 8. Эрмитовы вырожденные ядра. Теорема Гильберта-Шмидта

Зададимся вопросом: можно ли по характеристическим числам $\{\lambda_k\}$ и собственным функциям $\{\varphi_k\}$ построить ядро? Начнем с самого простого случая, когда имеется только одно характеристичское число.

Задача. Пусть $\lambda_1 \neq 0$ — вещественное число, $\varphi_1 \in C(\bar{G})$ — некоторая функция. Для определенности предположим, что $\|\varphi_1\|_{L_2} = 1$. Существует ли эрмитово ядро с единственным характеристическим числом λ_1 и отвечающей ему собственной функцией φ_1?

Решение. Будем искать решение задачи в виде вырожденного ядра

$$\mathscr{K}(x,y) = f(x)g(y).$$

В силу эрмитовости

$$\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}^*(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad f(x)g(y) = \overline{f(y)g(x)}.$$

Разделим переменные

$$\frac{g(y)}{\overline{f(y)}} = \frac{\overline{g(x)}}{f(x)}.$$

Поскольку левая часть равенства не зависит от y, а правая часть не зависит от x, заключаем, что обе части равны некоторой константе c. Следовательно, $g(y) = c\overline{f(y)}$ и $\mathscr{K}(x,y) = cf(x)\overline{f(y)}$.

Чтобы определить неизвестную функцию $f(x)$, воспользуемся условием, что φ_1 — собственная функция: $\varphi_1 = \lambda_1 K\varphi_1$,

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 cf(x)\int_G \overline{f(y)}\varphi_1(y)\,dy.$$

Интеграл представляет собой некоторую константу, поэтому функция $f(x)$ пропорциональна $\varphi_1(x)$: $f(x) = c_1\varphi_1(x)$. Следовательно,

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 cc_1\varphi_1(x)\int_G \varphi_1(y)\bar{c}_1\overline{\varphi_1(y)}\,dy.$$

Воспользовавшись нормировкой $\int_G \varphi_1(y)\overline{\varphi_1(y)}\,dy = 1$, получаем

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 c|c_1|^2\varphi_1(x) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 c|c_1|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c|c_1|^2 = \frac{1}{\lambda_1},$$

$$\mathscr{K}(x,y) = cf(x)\overline{f(y)} = c|c_1|^2\varphi_1(x)\overline{\varphi_1(y)}.$$

Таким образом, $\mathscr{K}(x,y) = \dfrac{\varphi(x)\overline{\varphi(y)}}{\lambda_1}$.

Упражнение 10. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \neq 0$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m \in C(\bar{G})$, $(\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1,m}$. Убедиться непосредственной проверкой, что ядро*

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}$$

имеет собственные функции φ_i, отвечающие характеристическим числам λ_i. Может ли это ядро иметь другие характеристические числа и собственные функции?

В общем случае эрмитово непрерывное ядро имеет бесконечную последовательность характеристических чисел $|\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \ldots \leqslant |\lambda_m| \leqslant \ldots$ и ортонормированную систему соответствующих им собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m, \ldots$. Нашей дальнейшей целью будет получение аналогичного рассмотренным примерам *билинейного разложения* произвольного непрерывного ядра:

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}$$

и исследовать сходимость этого ряда.

Итак, пусть $\mathscr{K}(x,y)$ — произвольное эрмитово непрерывное ядро. Введем последовательность ядер

$$\mathscr{K}^{(p)}(x,y) = \mathscr{K}(x,y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Упражнение 11. *Докажите, что ядра $\mathscr{K}^{(p)}(x,y)$ эрмитовы и непрерывны.*

Соответствующие интегральные операторы действуют по формуле

$$K^{(p)}f = Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i, \quad f \in L_2(G). \tag{8.1}$$

Докажем, что λ_{p+1}, λ_{p+2}, $\ldots$ и φ_{p+1}, φ_{p+2}, $\ldots$ — все характеристические числа и собственные функции ядра $\mathscr{K}^{(p)}(x,y)$.

Действительно, в силу (8.1) и ортогональности собственных функций имеем

$$K^{(p)}\varphi_k = K\varphi_k - \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_k,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i = K\varphi_k = \frac{1}{\lambda_k}\varphi_k, \quad k > p.$$

Следовательно, λ_k и φ_k при $k > p$ — действительно характеристические числа и собственные функции ядра $\mathscr{K}^{(p)}(x,y)$. Покажем теперь, что других характеристических чисел и собственных функций у этого ядра нет. Пусть λ_0 и φ_0 — характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра $\mathscr{K}^{(p)}(x,y)$, т.е.

$$\varphi_0 = \lambda_0 K^{(p)}\varphi_0 \overset{(8.1)}{=} \lambda_0 K\varphi_0 - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i, \tag{8.2}$$

Отсюда при $k = 1, 2, \ldots, p$ получаем

$$(\varphi_0,\varphi_k) = \lambda_0(K\varphi_0,\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0,\varphi_i)(\varphi_i,\varphi_k)}{\lambda_i} =$$

$$\overset{(7.1)}{=} \lambda_0(\varphi_0, K\varphi_k) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{p} \frac{(\varphi_0,\varphi_i)}{\lambda_i}\delta_{ik} \overset{(6.1)}{=} \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0,\varphi_k) - \frac{\lambda_0}{\lambda_k}(\varphi_0,\varphi_k) = 0.$$

Поэтому в силу (8.2) $\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_0$, т.е. λ_0 и φ_0 — характеристическое число и соответствующая собственная функция ядра $\mathscr{K}(x,y)$. Поскольку φ_0 ортогональна всем φ_k, $k \leqslant p$, то можно считать, что $\lambda_0 = \lambda_k$ и $\varphi_0 = \varphi_k$, $k > p$.

Таким образом, λ_{p+1} — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $\mathscr{K}^{(p)}(x,y)$. Согласно вариационному принципу (7.2), имеем

$$\frac{1}{|\lambda_{p+1}|} = \sup \frac{\|K^{(p)}f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}} \quad \Rightarrow \frac{1}{|\lambda_{p+1}|} \geqslant \frac{\|K^{(p)}f\|_{L_2}}{\|f\|_{L_2}}.$$

Подставляя (8.1), получаем

$$\|K^{(p)}f\|_{L_2} = \left\| Kf - \sum_{i=1}^{p} \frac{(f,\varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i \right\|_{L_2} \leqslant \frac{\|f\|_{L_2}}{|\lambda_{p+1}|}, \quad f \in L_2(G), \quad p = 1, 2, \ldots \tag{8.3}$$

Если ядро $\mathscr{K}(x,y)$ имеет конечное число характеристических чисел λ_1, λ_2, ..., λ_N, то ядро $\mathscr{K}^{(N)}(x,y)$ не имеет характеристических чисел. Согласно вариационному принципу, $\mathscr{K}^{(N)}(x,y) \equiv 0$. Следовательно,

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \tag{8.4}$$

т.е. $\mathscr{K}(x,y)$ — вырожденное ядро. Формула (8.4) дает билинейное разложение эрмитова вырожденного ядра.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема (об эрмитовом вырожденном ядре)**.** *Для того чтобы эрмитово непрерывное ядро было вырожденным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело конечное число характеристических чисел.*

Определение 9. Будем говорить, что функция $f(x)$ *истокообразно представима* через ядро $\mathscr{K}(x,y)$, если существует функция $h \in L_2(G)$ такая, что

$$f(x) = \int_G \mathscr{K}(x,y)h(y)\,dy, \quad x \in \bar{G}.$$

Теорема (Гильберта-Шмидта)**.** *Если функция f истокообразно представима через эрмитово непрерывное ядро $\mathscr{K}(x,y)$, $f = Kh$, то ее ряд Фурье* по собственным функциям ядра $\mathscr{K}(x,y)$ сходится абсолютно и равномерно на $\bar{G}$ к функции f:*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(f,\varphi_k)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x). \tag{8.5}$$

Доказательство. Вычислим коэффициенты Фурье функции f:

$$(f,\varphi_k) = (Kh,\varphi_k) \overset{(7.1)}{=} (h, K\varphi_k) \overset{(6.1)}{=} \frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}.$$

Если ядро $\mathscr{K}(x,y)$ имеет конечное число характеристических чисел, то в силу формулы (8.4)

$$f(x) = (Kh)(x) = \sum_{k=1}^{N}\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x),$$

и теорема Гильберта-Шмидта доказана.

Если множество характеристических чисел ядра $\mathscr{K}(x,y)$ бесконечно, то по следствию 2 из теорем Фредгольма $|\lambda_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Согласно (8.3)

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{p}(f,\varphi_k)\varphi_k \right\|_{L_2} = \left\| Kh - \sum_{k=1}^{p}\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k \right\|_{L_2} \leqslant \frac{\|h\|_{L_2}}{|\lambda_{p+1}|} \to 0, \quad p \to \infty.$$

Следовательно, ряд (8.5) сходится к f в $L_2(G)$.

Фиксируем $x \in \bar{G}$. Тогда величины

$$(\bar{K}, \varphi_k) = \int_G \overline{\mathscr{K}(x,y)\varphi_k(y)}\,dy = \overline{K\varphi_k} \overset{(6.1)}{=} \frac{1}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(x)}$$

представляют собой коэффициенты Фурье* функции $\overline{K(x,y)}$ по ортонормированной системе $\{\varphi_k\}$. Для них справедливо неравенство Бесселя*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(\bar{K}, \varphi_k)|^2 \leqslant (\bar{K}, \bar{K}),$$

или

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \leqslant \int_G |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy, \quad x \in \bar{G}. \tag{8.6}$$

Для того чтобы доказать доказать абсолютную и равномерную сходимость ряда (8.5), воспользуемся критерием Коши*. Покажем, что

$$\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)| \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| \to 0, \quad p, q \to \infty, \tag{8.7}$$

равномерно по $x \in \bar{G}$. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем

$$\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)| \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right| \leqslant \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{k=p}^{q} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\overset{(8.6)}{\leqslant} \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2\right]^{1/2} \left(\int_G |K(x,y)|^2 dy\right)^{1/2} \leqslant M\sqrt{V} \left[\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2\right]^{1/2}.$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(h, \varphi_k)|^2 \leqslant \|h\|^2.$$

По критерию Коши для сходящегося ряда получаем

$$\sum_{k=p}^{q} |(h, \varphi_k)|^2 \to 0, \quad p, q \to \infty,$$

и формула (8.7) доказана. Следовательно, ряд (8.5) сходится абсолютно и равномерно на $\bar{G}$.

$\square$

Лекция 9. Следствия из теоремы Гильберта-Шмидта

Теорема (билинейное разложение повторных ядер). *Билинейное ядро $\mathscr{K}_p(x,y)$ эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ разлагается в билинейный ряд по собственным функциям этого ядра:*

$$\mathscr{K}_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^p}, \quad p = 2, 3, \ldots, \tag{9.1}$$

сходящийся равномерно при $x, y \in \bar{G}$.

Доказательство. Повторное ядро $\mathscr{K}_p(x,y)$ истокообразно представимо через ядро $\mathscr{K}(x,y)$:

$$\mathscr{K}_p(x,y) = \int_G \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}_{p-1}(\xi,y)\,d\xi, \quad p > 1.$$

По теореме Гильберта-Шмидта при каждом фиксированном $y \in \bar{G}$ оно разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$\mathscr{K}_p(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathscr{K}_p(\xi,y), \varphi_k(\xi))\varphi_k(x).$$

Так как ядро $\mathscr{K}_p(x,y)$ эрмитово, то

$$(\mathscr{K}_p(\xi,y), \varphi_k(\xi)) = \int_G \mathscr{K}_p(\xi,y)\overline{\varphi_k(\xi)}\,d\xi = \int_G \overline{\mathscr{K}_p(y,\xi)\varphi_k(\xi)}\,d\xi = \overline{(K^p\varphi_k)}(y) = \frac{\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k^p}.$$

При последнем переходе мы использовали следствие 6 из теорем Фредгольма.

Таким образом, равенство (9.1) доказано и ряд сходится равномерно по $x \in \bar{G}$ при каждом фиксированном $y \in \bar{G}$. В частности, при $p = 2$, $x = y$ имеем

$$\mathscr{K}_2(x,x) = \int_G \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}(\xi,x)\,d\xi = \int_G \mathscr{K}(x,\xi)\overline{\mathscr{K}(x,\xi)}\,d\xi = \int_G |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} = \int_G |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy \tag{9.2}$$

Заметим, что в данном случае неравенство Бесселя (8.6) обращается в равенство Парсеваля (9.2). Применим к ряду (9.2) лемму Дини:

Лемма 10 ([6, 1]). *Если монотонная последовательность непрерывных функций на компакте $\bar{G}$ сходится в каждой точке к непрерывной функции на $\bar{G}$, то она сходится равномерно на $\bar{G}$.*

Упражнение 12. *Почему $\bar{G}$ является компактом?*

Следовательно, сходимость ряда (9.2) равномерная. Отсюда, используя неравенство Коши-Буняковского

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}|}{\lambda_k^p} \leqslant \frac{1}{|\lambda_1|^{p-2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2} \right),$$

заключаем, что ряд (9.1) сходится равномерно на $\bar{G} \times \bar{G}$. □

Интегрируя равномерно сходящийся ряд (9.2) почленно и учитывая нормировку собственных функций $\|\varphi_k\|_{L_2} = 1$, получаем формулу

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_G \int_G |\mathscr{K}(x,y)|^2 dx\, dy.$$

Изучим сходимость ряда (9.1) при $p = 1$.

Теорема (билинейное разложение эрмитова непрерывного ядра)**.** *Эрмитово непрерывное ядро разлагается в билинейный ряд по собственным функциям:*

$$\mathscr{K}(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}, \tag{9.3}$$

сходящийся в $L_2(G)$ равномерно по $y \in \bar{G}$, т.е.

$$\left\| \mathscr{K}(x,y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k} \right\|_{L_2} \xrightarrow{y\in\bar{G}} 0, \quad p \to \infty. \tag{9.4}$$

Интегрирование при взятии нормы в L_2 происходит по переменной x, переменная y входит как параметр.

Доказательство. Используя ортонормальность системы собственных функций: $(\varphi_k, \varphi_j) = 1$ при $j = k$ и $(\varphi_k, \varphi_j) = 0$ при $j \neq k$, получаем

$$\left\| \mathscr{K}(x,y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k} \right\|_{L_2}^2 =$$

$$= \left(\mathscr{K}(x,y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}, \mathscr{K}(x,y) - \sum_{j=1}^{p} \frac{\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}}{\lambda_j} \right) = (\mathscr{K}(x,y), \mathscr{K}(x,y)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} \frac{(\varphi_k, \varphi_j)\overline{\varphi_k(y)}\varphi_j(y)}{\lambda_k\lambda_j} - \sum_{j=1}^{p} \frac{(\mathscr{K}(x,y), \varphi_j(x))}{\lambda_j}\varphi_j(y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{(\varphi_k(x), \mathscr{K}(x,y))}{\lambda_k}\overline{\varphi_k(y)} =$$

$$= \int_G |\mathscr{K}(x,y)|^2 dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(y)|}{\lambda_k^2} - \sum_{j=1}^{p} \int_G \mathscr{K}(x,y)\overline{\varphi_j(x)}\, dx \frac{\varphi_j(y)}{\lambda_j} -$$

$$- \sum_{k=1}^{p} \int_G \varphi_k(x)\overline{\mathscr{K}(x,y)}\, dx \frac{\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}.$$

Обозначим получившиеся слагаемые через S_1, S_2, S_3, S_4. Так как ядро $\mathscr{K}(x,y)$ — эрмитово,

$$S_1 = \int_G |\overline{\mathscr{K}(y,x)}|^2 dx = \int_G |\mathscr{K}(y,x)|^2 dx,$$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{p} \int_G \overline{\mathscr{K}(y,x)\varphi_j(x)}\, dx \frac{\varphi_j(y)}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^{p} \overline{(K\varphi_j)(y)} \frac{\varphi_j(y)}{\lambda_j} \overset{(6.1)}{=} \sum_{j=1}^{p} \frac{\overline{\varphi_j(y)}\varphi_j(y)}{\lambda_j^2} = S_2,$$

$$S_4 = \overline{S_3} = S_3 = S_2.$$

Таким образом,

$$\left\| \mathscr{K}(x,y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k} \right\|_{L_2}^2 = \int_G |\mathscr{K}(y,x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(y)|}{\lambda_k^2}.$$

Поскольку ряд (9.2) сходится равномерно, получаем сходимость ряда (9.3) в смысле (9.4). □

Рассмотрим билинейную форму (Kf, g), $f, g \in L_2(G)$. По теореме Гильберта-Шмидта

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

причем этот ряд сходится равномерно в $\bar{G}$. Умножая этот ряд на функцию $\bar{g}$ и почленно интегрируя его по G, получаем

$$(Kf, g) = \int_G (Kf)\bar{g}\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k} \int_G \varphi_k(x)\bar{g}(x)\, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)\overline{(g, \varphi_k)}}{\lambda_k}.$$

Полагая $f = g$, получаем представление для квадратичной формы (Kf, f) в виде

$$(Kf, f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f, \varphi_k)|^2}{\lambda_k}, \quad f \in L_2(G). \tag{9.5}$$

Формула (9.5) представляет собой обобщение формулы приведения к главным осям квадратичной формы с конечным числом переменных.

Действительно, предположим, матрица A размера $n \times n$ имеет собственные значения μ_1, μ_2, ..., μ_n и соответствующие им ортонормированные собственные векторы x_1, x_2, ..., x_n. Тогда любой вектор x размерности n может быть разложен по системе собственный векторов:

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k.$$

Квадратичная форма примет вид

$$(Ax, x) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x, x_k) A x_k, \sum_{j=1}^{n} (x, x_j) x_j \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} (x, x_k) \mu_k x_k, \sum_{j=1}^{n} (x, x_j) x_j \right) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mu_k (x, x_k) \overline{(x, x_j)} (x_k, x_j).$$

В силу ортонормальности векторов, слагаемые отличны от нуля только при $j = k$. В итоге получаем

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k |(x, x_k)|^2.$$

Сравните с равенством (9.5), принимая во внимание тот факт, что характеристические числа ядра — величины, обратные к собственным значениям интегрального оператора.

Теорема (формула Шмидта)**.** *Если λ не совпадает ни с одним их характеристических чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots$ эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x, y)$, и $f \in C(\bar{G})$, то решение φ неоднородного уравнения $\varphi = \lambda K\varphi + f$ представимо в виде равномерно сходящегося на $\bar{G}$ ряда*

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + f(x).$$

Доказательство. Согласно первой теореме Фредгольма, при $\lambda \neq \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots$, решение уравнения $\varphi = \lambda K\varphi + f$ существует и единственно при любом свободном члене $f \in C(\bar{G})$. По теореме Гильберта-Шмидта функция Kf разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям ядра $\mathscr{K}(x, y)$:

$$\varphi = \lambda K\varphi + f = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\varphi, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k + f.$$

Вычислим коэффициенты Фурье:

$$(\varphi, \varphi_k) \overset{(\mathrm{I})}{=} \lambda(K\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k) \overset{(7.1)}{=} \lambda(\varphi, K\varphi_k) + (f, \varphi_k) \overset{(6.1)}{=} \frac{\lambda}{\lambda_k}(\varphi, \varphi_k) + (f, \varphi_k),$$

$$(\varphi, \varphi_k) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^{-1}(f, \varphi_k) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - \lambda}(f, \varphi_k).$$

В итоге приходим к формуле Шмидта. □

Получим представление для резольвенты $\mathscr{R}(x, y, \lambda)$. По теореме Гильберта-Шмидта

$$(Kf)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x).$$

Используя это соотношение и формулу Шмидта, получаем

$$\varphi = \lambda K\varphi + f = \lambda K\left(\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)}{\lambda_k - \lambda}\varphi_k + f\right) + f = \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)K\varphi_k}{\lambda_k - \lambda} + \lambda K f + f =$$

$$\overset{(6.1)}{=} \lambda K f + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_k)\varphi_k}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)} + f,$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x, y)f(y)\,dy + \lambda^2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_G \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}f(y)\,dy + f(x). \tag{9.6}$$

Из равномерной сходимости билинейного ряда (9.1) при $p = 2$ следует равномерная сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}.$$

Поэтому в формуле (9.6) можно поменять порядок суммирования и интегрирования. В результате приходим к соотношению

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \left[\mathscr{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}\right] f(y)\,dy + f(x).$$

Согласно теореме о резольвенте при малых λ

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{R}(x, y, \lambda)f(y)\,dy + f(x).$$

Сравнивая эти два представления, заключаем, что резольвента эрмитова непрерывного ядра допускает мероморфное* продолжениена всю комплескную плоскость переменного λ с простыми* полюсами λ_k, $k = 1, 2, \ldots$:

$$\mathscr{R}(x, y, \lambda) = \mathscr{K}(x, y) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k - \lambda)}. \tag{9.7}$$

С помощью равенства (9.3) перепишем формулу (9.7) в виде

$$\mathscr{R}(x,y,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)}.$$

Так как

$$\frac{1}{\lambda_k}+\frac{\lambda}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)}=\frac{(\lambda_k-\lambda)+\lambda}{\lambda_k(\lambda_k-\lambda)}=\frac{1}{\lambda_k-\lambda},$$

получаем

$$\mathscr{R}(x,y,\lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k-\lambda},$$

причем ряд сходится в $L_2(G)$ равномерно по $y\in\bar{G}$ (аналогично условиям теоремы о билинейном разложении эрмитова непрерывного ядра).

Вычеты резольвенты относительно простых полюсов равны

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\mathscr{R}(x,y,\lambda)=\lim_{\lambda\to\lambda_j}(\lambda-\lambda_j)\mathscr{R}(x,y,\lambda).$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_j}\mathscr{R}(x,y,\lambda)=-\sum_{k:\ \lambda_k=\lambda_j}\varphi_k(x)\overline{\varphi_k(y)}.$$

Замечание. Согласно третьей теореме Фредгольма, уравнение (I) с эрмитовым непрерывным ядром разрешимо и при $\lambda=\lambda_k$, если $(f,\varphi_j)=0$ для всех таких j, что $\lambda_j=\lambda_k$. В этом случае решение уравнения (I) не единственно, и его общее решение задается формулой

$$\varphi(x)=\lambda_j\sum_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^{\infty}\frac{(f,\varphi_j)}{\lambda_j-\lambda_k}\varphi_k(x)+f(x)+\sum_{j:\ \lambda_j=\lambda_k}c_j\varphi_j(x).$$

Лекция 10. Положительно определенные ядра. Симметричные положительные ядра

Используем теорему Гильберта-Шмидта и билинейное разложение эрмитова непрерывного ядра с целью получения следствий для некоторых важных с практической точки зрения классов ядер.

Определение 10. Ядро $\mathscr{K}(x,y)$ называется *положительно определенным*, если соответствующий оператор K положителен, т.е. $(Kf,f) \geqslant 0$, $f \in L_2(G)$.

Любое положительно определенное ядро эрмитово, поскольку для эрмитовости оператора, определенного в $L_2(G)$, необходимо и достаточно выполнения условия $(Kf,f) \in \mathbb{R}$ при любом $f \in L_2(G)$.

Лемма 11. *Для того чтобы эрмитово непрерывное ядро было положительно определенным, необходимо и достаточно, чтобы его характеристические числа λ_k были положительными.*

Доказательство. Действительно, если все $\lambda_k > 0$, то в силу (9.5),

$$(Kf,f) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_k)|^2}{\lambda_k} \geqslant 0, \quad f \in L_2(G).$$

Обратно, если ядро $\mathscr{K}(x,y)$ положительно определено, то $(K\varphi_k,\varphi_k) = \frac{(\varphi_k,\varphi_k)}{\lambda_k} \geqslant 0$. Следовательно, $\lambda_k > 0$. □

Теорема (вариационный принцип для положительно определенного ядра)**.** *Если $\mathscr{K}(x,y)$ — положительно определенное непрерывное ядро, то справедлив следующий вариационный принцип:*

$$\frac{1}{\lambda_k} = \sup \frac{(Kf,f)}{\|f\|^2_{L_2}}, \quad k = 1,2,\ldots, \tag{10.1}$$

где точная верхняя грань берется по множеству функций $f \in L_2(G)$, ортогональных всем собственным функциям φ_i, $i = \overline{0,k-1}$. Точная верхняя грань достигается на любой собственной функции, отвечающей характеристическому числу λ_k.

Доказательство. Используя формулу (9.5) для произвольной функции $f \in L_2(G)$, ортогональной всем φ_i, $i = \overline{0,k-1}$, получаем

$$\frac{(Kf,f)}{\|f\|^2_{L_2}} = \frac{1}{\|f\|^2_{L_2}} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\lambda_i} = \frac{1}{\|f\|^2_{L_2}} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{|(f,\varphi_i)|^2}{\lambda_i} \leqslant \frac{1}{\lambda_k \|f\|^2_{L_2}} \sum_{i=k}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2.$$

В силу неравенства Бесселя

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f,\varphi_i)|^2 \leqslant (f,f)$$

приходим к соотношению

$$\frac{(Kf,f)}{\|f\|^2} \leqslant \frac{1}{\lambda_k}. \tag{10.2}$$

С другой стороны, при $f = \varphi_k$ имеем

$$\frac{(K\varphi_k,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2} = \frac{1}{\lambda_k}. \tag{10.3}$$

Неравенство (10.2) и равенство (10.3) вместе дают утверждение теоремы.

□

При $k = 1$ формула (10.1) принимает вид

$$\frac{1}{\lambda_1} = \sup_{f \in L_2(G)} \frac{(Kf, f)}{\|f\|^2_{L_2}}. \tag{10.4}$$

Лемма 12. *Пусть $\mathscr{K}(x, y)$ — положительно определенное непрерывное ядро. Тогда $\mathscr{K}(x, x) \geqslant 0$, $x \in \bar{G}$.*

Доказательство. В силу эрмитовости ядра $\mathscr{K}(x, x) = \overline{\mathscr{K}(x, x)} \in \mathbb{R}$. Предположим, что существует точка $x_0 \in G$, в которой $\mathscr{K}(x_0, x_0) < 0$. Тогда найдется такая окрестность $U \subset G$, что $\operatorname{Re} \mathscr{K}(x, y) < 0$, $x \in U$, $y \in U$. Выберем непрерывную вещественную неотрицательную функцию $\varphi(x) \not\equiv 0$, равную нулю за пределами окрестности U. Тогда

$$(K\varphi, \varphi) = \int_U \int_U \mathscr{K}(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\, dx\, dy = \int_U \int_U \operatorname{Re} \mathscr{K}(x, y)\varphi(x)\varphi(y)\, dx\, dy < 0.$$

Приходим к противоречию с положительной определенностью ядра $\mathscr{K}(x, y)$. Лемма доказана. □

Теорема (Мерсера)**.** *Если эрмитово непрерывное ядро $\mathscr{K}(x, y)$ имеет конечное число отрицательных характеристических чисел, то его билинейный ряд* (9.3) *сходится равномерно в $\bar{G} \times \bar{G}$.*

Доказательство. Вспомним, что ядра

$$\mathscr{K}^{(p)}(x, y) = \mathscr{K}(x, y) - \sum_{i=1}^{p} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

имеют характеристические числа λ_{p+1}, λ_{p+2}, $\ldots$. Поэтому в предположениях теоремы ядра $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$ — положительно определенные, начиная с некоторого номера p. Отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. Следовательно, достаточно доказать теорему только для положительно определенных ядер $\mathscr{K}(x, y)$. Тогда все ядра $\mathscr{K}^{(p)}(x, y)$ также положительно определенные. По лемме $\mathscr{K}^{(p)}(x, x) \geqslant 0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} = \mathscr{K}(x, x) - \mathscr{K}^{(p)}(x, x) \leqslant \mathscr{K}(x, x) \leqslant M, \quad x \in \bar{G}, \quad p = 1, 2, \ldots$$

Используя неравенство Коши-Буняковского:

$$\sum_{i=p}^{q} \frac{|\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}|}{\lambda_i} \leqslant \left(\sum_{i=p}^{q} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i} \sum_{i=p}^{q} \frac{|\varphi_i(y)|^2}{\lambda_i} \right)^{1/2}. \tag{10.5}$$

приходим к выводу о равномерной по $x \in \bar{G}$ сходимости ряда (9.3) при любом фиксированном $y \in \bar{G}$. Следовательно, в равенстве (9.3) можно положить $x = y$ и получить равенство

$$\mathscr{K}(x, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\varphi_i(x)|^2}{\lambda_i}.$$

По лемме Дини полученный ряд сходится равномерно на $\bar{G}$. В силу неравенства (10.5), отсюда следует равномерная сходимость билинейного ряда (9.3). □

Определение 11. Вещественные эрмитовы ядра называются *симметричными*. Они удовлетворяют соотношению $\mathscr{K}(x,y) = \mathscr{K}(y,x)$.

Лемма 13. *Собственные функции симметричного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ можно выбрать вещественными.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2$ — собственная функция ядра $\mathscr{K}(x,y)$, отвечающая характеристическому числу λ_0, т.е.

$$\varphi_0 = \varphi_1 + i\varphi_2 = \lambda_0 K\varphi_0 = \lambda_0 K\varphi_1 + i\lambda_0 K\varphi_2.$$

В силу вещественности ядра, заключаем, что отличные от нуля действительная и мнимая части φ_1 и φ_2 функции φ_0 также являются собственными функциями, отвечающими характеристическому числу λ_0: $\varphi_1 = \lambda_0 K\varphi_1$, $\varphi_2 = \lambda_0 K\varphi_2$. □

Определение 12. Ядро $\mathscr{K}(x,y) > 0$ при всех $x, y \in G$ называется *положительным*.

Теорема (Ентча). *Если непрерывное ядро $\mathscr{K}(x,y)$ — симметричное и положительное, то его наименьшее по модулю характеристическое число λ_1 — положительное и простое и соответствующая собственная функция $\varphi_1(x)$ положительна в G.*

Доказательство. Очевидно, что если ядро $\mathscr{K}(x,y)$ — положительное, то повторное ядро

$$\mathscr{K}_2(x,y) = \int_G \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}(\xi,y)\,d\xi$$

тоже положительное. Согласно следствию 6 из теорем Фредгольма, λ_1^2 и $\varphi_1(x)$ – его наименьшее по модулю характеристическое число и соответствующая собственная функция.

Докажем, что $\varphi_1(x)$ не может менять знак в области G, т.е.

$$|\varphi_1(x)\varphi_1(y)| = \varphi_1(x)\varphi_1(y), \quad x \in G, \quad y \in G.$$

Действительно, в противном случае в силу непрерывности функции $\varphi_1(x)$ нашлись бы такие окрестности $U_R(x_0) \subset G$ и $U_R(y_0) \subset G$, что

$$|\varphi_1(x)| \cdot |\varphi_1(y)| > \varphi_1(x)\varphi_1(y), \quad x \in U_R(x_0), \quad y \in U_R(y_0).$$

В силу условия $\mathscr{K}_2(x,y) > 0$,

$$\frac{(K^2|\varphi_1|, |\varphi_1|)}{\||\varphi_1|\|^2_{L_2}} = \frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\int_G\int_G \mathscr{K}_2(x,y)|\varphi_1(x)||\varphi_1(y)|\,dx\,dy >$$
$$> \frac{1}{\|\varphi_1\|^2}\int_G\int_G \mathscr{K}_2(x,y)\varphi_1(x)\varphi_1(y)\,dx\,dy = \frac{(K^2\varphi_1,\varphi_1)}{\|\varphi_1\|^2} = \frac{1}{\lambda_1^2},$$

что противоречит вариационному принципу (10.4).

Докажем, что функция $\varphi_1(x)$ не может обращаться в нуль в области G и, следовательно, может быть выбрана положительной в G. В противном случае найдется точка $x_0 \in G$ такая, что

$$\varphi_1(x_0) = \lambda_1^2 \int_G \mathscr{K}_2(x_0,y)\varphi_1(y)\,dy = 0.$$

Поскольку $\mathscr{K}_2(x_0,y) > 0$, отсюда следует $\varphi_1(y) \equiv 0$, $y \in G$. Мы пришли к противоречию. Значит, собственную функцию $\varphi_1(x)$ можно выбрать положительной.

Из положительности $\varphi_1(x)$ следует положительность λ_1, поскольку $\mathscr{K}(x,y) > 0$ и $\lambda_1 = \frac{K\varphi_1}{\varphi_1} > 0$.

Докажем, что λ_1 — простое характеристическое число. Действительно, если бы существовала линейно независимая с φ_1 вещественная собственная функция φ_2, отвечающая λ_1, то линейная комбинация $\varphi_1 + C\varphi_2$ тоже была бы вещественной собственной функцией. Можно подобрать такое значение константы C, чтобы функция имела нули, но по доказанному, вещественная собственная функция, отвечающая λ_1, не обращается в нуль. Это противоречие завершает доказательство теоремы.

□

Для приближенного нахождения наименьшего по модулю характеристического числа λ_1 и соответствующих ему собственных функций эрмитова непрерывного ядра $\mathscr{K}(x,y)$ применяется **метод** последовательных приближений **Келлога**. Возьмем произвольную вещественную функцию $\varphi^{(0)} \in L_2(G)$, не ортогональную всем собственным функциям, отвечающим характеристическому числу λ_0. Тогда последовательности

$$\varphi_{(p)}(x) = \frac{\varphi^{(p)}(x)}{\|\varphi^{(p)}\|_{L_2}}, \quad \lambda_{(p)} = \frac{\|\varphi^{(p-1)}\|}{\|\varphi^{(p)}\|}, \quad p = 1, 2, \ldots,$$

где $\varphi^{(p)} = K^p\varphi^{(0)}$, сходятся к характеристическому числу $|\lambda_1|$ и собственной функции $\varphi_1(x)$ соответственно.

Обоснование метода Келлога для симметричных положительных ядер приведено в [1].

Лекция 11. Уравнения Вольтерра

Определение 13. Уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_G \mathscr{K}(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x), \quad 0 < x < h, \tag{11.1}$$

называется *уравнением Вольтерра* второго рода.

Напомним, что мы уже сталкивались с такими уравнениями на первой лекции, когда рассматривали примеры задач, сводящихся к интегральным уравнениеям. Уравнение Вольтерра (11.1) представляет собой частный случай уравнения Фредгольма (I), с областью $G = (0, h)$ и ядром $\mathscr{K}(x, y)$, удовлетворяющим условию

$$\mathscr{K}(x,y) \equiv 0, \quad y > x.$$

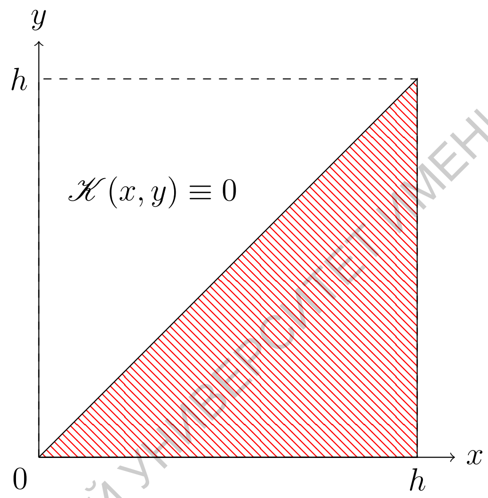

Рис. 5

Заметим, что уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^x \mathscr{K}(x,y)\varphi(y) = f(x), \quad 0 < x < h, \tag{11.2}$$

легко сводится к уравнению Вольтерра второго рода при некоторых условиях на ядро $\mathscr{K}(x, y)$ и свободный член $f(x)$. Нам понадобится формула дифференцирования интеграла с переменными пределами [6, Том 2]:

$$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,t)\,dt = f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Дифференцируя соотношение (11.2), получаем

$$\mathscr{K}(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \mathscr{K}'_x(x,y)\varphi(y)\,dy = f'(x),$$

$$\varphi(x) = -\int_0^x \frac{\mathscr{K}'_x(x,y)}{\mathscr{K}(x,x)}\varphi(y)\,dy + \frac{f'(x)}{\mathscr{K}(x,x)}.$$

Уравнения Вольтерра второго рода можно решать методом последовательных приближений, рассматриваемым нами ранее для интегральных уравнений Фредгольма с непрерывным ядром. Для *непрерывного* ядра Вольтерра рассуждения будут практически повторять выкладки, приведенные в лекции 2. Поэтому мы пойдем другим путем. Чтобы продемонстрировать, как можно работать с другими классами ядер, мы рассмотрим более общий класс — L_2-*ядра.* Мы увидим, что работа с этим классом будет технически более сложной, чем с непрерывными ядрами, хотя общая схема метода последовательных приближений останется без изменений.

Определение 14. Будем называть ядро $\mathscr{K}(x,y)$ L_2-*ядром*, если оно принадлежит классу L_2 в квадрате $[0,h]\times[0,h]$:

$$N := \sqrt{\int_0^h \int_0^h |\mathscr{K}(x,y)|^2 dxdy} < \infty. \tag{11.3}$$

При действиях с L_2-ядрами мы будем часто использовать неравенство Коши-Буняковского, применение которого будем для краткости обозначать «КБ».

Лемма 14. *Интегральный оператор*

$$(Kf)(x) = \int_0^x \mathscr{K}(x,y) f(y)\, dy$$

с L_2-ядром переводит $L_2[0,h]$ в $L_2[0,h]$, и справедлива оценка

$$\|Kf\|_{L_2} \leqslant N\|f\|_{L_2}, \quad f \in L_2[0,h].$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $L_2[0,h]$. По неравенству Коши-Буняковского

$$|(Kf)(x)|^2 = \left|\int_0^x \mathscr{K}(x,y) f(y)\, dy\right|^2 \overset{\text{КБ}}{\leqslant} \int_0^x |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy \int_0^x |f(y)|^2 dy \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^h |\mathscr{K}(x,y)|^2 dy \cdot \|f\|_{L_2}^2.$$

Поскольку функкия $|\mathscr{K}(x,y)|^2$ интегрируема в $[0,h]\times[0,h]$, то функция $|(Kf)(x)|^2$ интегрируема на $[0,h]$. Оценим интеграл

$$\|Kf\|_{L_2} = \left(\int_0^h |(Kf)(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^h \int_0^h |\mathscr{K}(x,y)|^2 dydx\right)^{1/2} \|f\|_{L_2} = N\|f\|_{L_2}.$$

Лемма доказана. □

Рассмотрим повторные ядра L_2-ядра $\mathscr{K}(x,y)$. Согласно лемме о повторных ядрах

$$\mathscr{K}_2(x,y) = \int_0^h \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}(\xi,y)\, d\xi, \quad 0 \leqslant x,y \leqslant h.$$

Поскольку первый сомножитель под интегралом может быть отличен от нуля только при $\xi \leqslant x$, а второй сомножитель — при $y \leqslant \xi$, получаем, что

$$\mathscr{K}_2(x,y) = \int_y^x \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}(\xi,y)\, d\xi, \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant h,$$

и $\mathscr{K}_2(x,y) \equiv 0$ при $y > x$, т.е. $\mathscr{K}_2(x,y)$ — ядро Вольтерра. Покажем, что $\mathscr{K}_2(x,y)$ — L_2-ядро. Действительно,

$$|\mathscr{K}_2(x,y)|^2 \leqslant \left(\int_y^x |\mathscr{K}(x,\xi)|\cdot|\mathscr{K}(\xi,y)|\, d\xi\right)^2 \overset{\text{КБ}}{\leqslant} \int_y^x |\mathscr{K}(x,\xi)|^2 d\xi \int_y^x |\mathscr{K}(\xi,y)|^2 d\xi.$$

Введем обозначения

$$A^2(x) = \int_0^h |\mathscr{K}(x,\xi)|^2 d\xi, \quad B^2(y) = \int_0^h |\mathscr{K}(\xi,y)|^2 d\xi.$$

Согласно (11.3), функции A и B принадлежат классу $L_2[0,h]$. Переходя в оценке к интегралам по отрезку $[0,h]$: $\int\limits_y^x |.|\, d\xi \leqslant \int_0^h |.|\, d\xi$, получаем

$$|\mathscr{K}_2(x,y)|^2 \leqslant A^2(x)B^2(y).$$

Следовательно, функция $|\mathscr{K}_2(x,y)|^2$ интегрируема в квадрате $[0,h]\times[0,h]$, откуда следует, что $\mathscr{K}_2(x,y)$ — L_2-ядро.

Аналогично исследуем ядра $\mathscr{K}_3(x,y)$ и $\mathscr{K}_4(x,y)$:

$$|\mathscr{K}_3(x,y)|^2 \leqslant \left|\int_y^x \mathscr{K}(x,\xi)\mathscr{K}_2(\xi,y)\right|^2 \overset{\text{КБ}}{\leqslant} \int_y^x |\mathscr{K}(x,\xi)|^2 d\xi \int_y^x |\mathscr{K}_2(\xi,y)|^2 d\xi \leqslant$$
$$\leqslant A^2(x)\int_y^x A^2(\xi)B^2(y)d\xi = A^2(x)B^2(y)\int_y^x A^2(\xi)d\xi,$$

$$|\mathscr{K}_4(x,y)|^2 \overset{\text{КБ}}{\leqslant} \int_y^x |\mathscr{K}(x,\xi)|^2 d\xi \int_y^x |\mathscr{K}_3(\xi,y)|^2 d\xi \leqslant A^2(x)B^2(y)\int_y^x A^2(\xi)\int_y^\xi A^2(\eta)\, d\eta d\xi.$$

По индукции можно доказать следующую лемму.

Лемма 15. *Справедливы оценки*

$$|\mathscr{K}_{n+2}(x,y)|^2 \leqslant A^2(x)B^2(y)F_n(x,y), \quad 0\leqslant y\leqslant x\leqslant h, \quad n=0,1,2,\dots,$$

где функции $F_n(x,y)$ определяются рекуррентным соотношением

$$F_0(x,y)=1, \quad F_n(x,y) = \int_y^x A^2(\xi)F_{n-1}(\xi,y)d\xi, \quad n=1,2,\dots. \tag{11.4}$$

Упражнение 13. *Приведите строгое доказательство леммы 15 методом математической индукции.*

Лемма 16. *Для функций $F_n(x,y)$, определенных рекуррентным соотношениям* (11.4), *справедливо представление*

$$F_n(x,y) = \frac{1}{n!}F_1^n(x,y), \quad n=0,1,2,\dots$$

Доказательство. Для $n=0$ формула верна. Предположим, она верна для $n-1$. Тогда по определению

$$F_n(x,y) = \int_y^x A^2(\xi)\frac{1}{(n-1)!}F_1^{(n-1)}(\xi,y)\, d\xi.$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(F_1^n(\xi,y)\right) = nF_1^{n-1}(\xi,y)A^2(\xi).$$

Таким образом,

$$F_n(x,y) = \frac{1}{(n-1)!n}\int_y^x \frac{\partial}{\partial\xi}\left(F_1^n(\xi,y)\right)\, d\xi = \frac{1}{n!}F_1^n(\xi,y)\Big|_y^x = \frac{1}{n!}F_1^n(x,y) - \frac{1}{n!}F_1^n(y,y).$$

В силу (11.4) $F_1(y,y)=0$, поэтому переход индукции доказан, и утверждение леммы справедливо для всех n. □

Нетрудно видеть, что

$$0 \leqslant F_1(x,y) \leqslant \int_0^h A^2(\xi)\,d\xi \overset{(11.3)}{\leqslant} N^2.$$

Используя лемму 16, получаем оценку

$$0 \leqslant F_n(x,y) \leqslant \frac{1}{n!}N^{2n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В силу леммы 15

$$|\mathscr{K}_{n+2}(x,y)| \leqslant A(x)B(y)\frac{N^n}{\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{11.5}$$

Следовательно,

$$\int_0^h \int_0^h |\mathscr{K}_{n+2}(x,y)|dxdy < \infty,$$

т.е. $K_{n+2}(x,y)$ — L_2-ядра.

Таким образом, итерации K^n $(n \geqslant 1)$ интегрального оператора Вольтерра с L_2-ядром также являются интегральными операторами Вольтерра с L_2-ядрами.

Перейдем к решению интегрального уравнения Вольтерра (11.1) с L_2-ядром $\mathscr{K}(x,y)$ и свободным членом $f \in L_2[0,h]$ **методом последовательных приближений**. Введем последовательность функций

$$\varphi^{(0)} = f, \quad \varphi^{(p)} = \lambda K\varphi^{(p-1)} + f \overset{(2.2)}{=} \sum_{n=0}^{p} \lambda^n K^n f, \quad p = 1, 2, \dots$$

Операторы K^n — интегральные операторы Вольтерра с L_2-ядрами. Согласно лемме 14, $K^n f \in L_2[0,h]$. Оценим норму этих функций в L_2.

$$|(K^{n+2}f)(x)|^2 \leqslant \left(\int_0^x |\mathscr{K}_{n+2}(x,y)|\cdot|f(y)|\,dy\right)^2 \overset{\text{КБ}}{\leqslant} \int_0^x |\mathscr{K}_{n+2}(x,y)|^2 dy \int_0^x |f(y)|^2 dy \leqslant$$

$$\overset{(11.5)}{\leqslant} A^2(x)\int_0^x B^2(y)\,dy \frac{N^{2n}}{n!}\|f\|^2_{L_2} \overset{(11.3)}{\leqslant} A^2(x)\frac{N^{2n+2}}{n!}\|f\|^2_{L_2},$$

$$\|(K^{n+2}f)\|^2_{L_2} \leqslant \int_0^h A^2(x)\frac{N^{2n+2}}{n!}\|f\|^2_{L_2}dx \leqslant \frac{N^{2n+4}}{n!}\|f\|^2_{L_2},$$

$$\|K^{n+2}f\|_{L_2} \leqslant \frac{N^{n+2}}{\sqrt{n!}}\|f\|_{L_2}. \tag{11.6}$$

Таким образом, ряд Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n f$ по норме в $L_2[0,h]$ мажорируется числовым рядом

$$\|f\|_{L_2}\left(1 + |\lambda|N + |\lambda|^2 N^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^n N^n}{\sqrt{n!}}\right). \tag{11.7}$$

Исследуем сходимость этого ряда методами математического анализа.

Лемма 17. *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}$ *имеет бесконечный радиус сходимости*.*

Доказательство. Вычислим радиус сходимости ряда по формуле Даламбера [6, Том 2]:

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^{1/2} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+1} = \infty.$$

□

Таким образом, числовой ряд (11.7) сходится при любом λ. По признаку мажорации ряд Неймана $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda^n K^n f$ сходится в $L_2[0,h]$ к некоторой функции $\varphi(x) \in L_2[0,h]$. Последовательность приближений $\varphi^{(p)}$ также сходится к φ в L_2.

Согласно лемме 14, линейный оператор K ограничен* в L_2 и, следовательно, является непрерывным оператором*: $\lim\limits_{p\to\infty} K\varphi^{(p)} = K\lim\limits_{p\to\infty}\varphi^{(p)}$. Переходя к пределу при $p\to\infty$ в равенстве $\varphi^{(p)} = \lambda K\varphi^{(p-1)} + f$, получаем $\varphi = \lambda K\varphi + f$, т.е. предел последовательности приближений является решением интегрального уравнения Вольтерра (11.1).

Докажем единственность решения уравнения (11.1). Предположим, это уравнение имеет два решения: $\varphi_1 = \lambda K\varphi_1 + f$, $\varphi_2 = \lambda K\varphi_2 + f$. Тогда разность $\varphi_0 = \varphi_1 - \varphi_2$ является решением соответствующего однородного уравнения Вольтерра: $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0$. Тогда $\varphi_0 = \lambda K\varphi_0 = \lambda^2K^2\varphi_0 = \dots = \lambda^n K^n\varphi_0$ для любого $n \geqslant 0$. Используя оценку (11.6), получаем

$$\|\varphi_0\|_{L_2} \leqslant \frac{(|\lambda|N)^{n+2}}{\sqrt{n}}\|\varphi_0\|_{L_2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Следовательно, $\|\varphi_0\|_{L_2} = 0$ и $\varphi_1 = \varphi_2$ (как функции из L_2).

В итоге доказана следующая теорема.

Теорема. *Уравнение Вольтерра (11.1) с L_2-ядром при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ и при любом свободном члене $f \in L_2[0,h]$ имеет единственное решение $\varphi \in L_2[0,h]$, представимое сходящимся в $L_2[0,h]$ рядом Неймана.*

Обратим внимание на одно принципиальное отличие этой теоремы от аналогичной теоремы для уравнения Фредгольма с непрерывным ядром. Для уравнения Фредгольма мы строили решение в некотором малом круге $|\lambda| < \dfrac{1}{MV}$, в то время как уравнение Вольтерра разрешимо при любом $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда вытекает следующий факт.

Следствие. *Ядро Вольтерра не имеет характеристических чисел.*

Так же как для уравнения Фредгольма, решение уравнения Вольтерра может быть получено через *резольвенту*:

$$\mathscr{R}(x,y,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\mathscr{K}_{n+1}(x,y).$$

Согласно оценке (11.5)

$$|\lambda^n\mathscr{K}_{n+1}(x,y)| \leqslant A(x)B(y)|\lambda|^n\frac{N^{n-1}}{\sqrt{(n-1)!}}.$$

По лемме 17 ряд для резольвенты сходится, если $A(x)$ и $B(y)$ конечны. Но A и B — функции из $L_2[0,h]$, они конечны почти всюду* на $[0,h]$. Поэтому резольвента существует при п.в. (x,y) на $[0,h]\times[0,h]$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}$.

Упражнение 14. *Пусть ядро Вольтерра* $\mathscr{K}(x,y)$ *непрерывно при* $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant h$ *и* $|\mathscr{K}(x,y)| \leqslant M$ *в этой области. Методом математической индукции докажите оценку*

$$|(K^p f)(x)| \leqslant \|f\|_C \frac{(Mx)^p}{p!}, \quad x \in [0,h], \quad p = 0, 1, \ldots$$

Используя эту оценку, покажите, что ряд Неймана сходится равномерно к непрерывному решению уравнения (11.1).

Лекция 12. Преобразование Лапласа

Следующим методом решения интегральных уравнений, который мы рассмотрим, будет метод *преобразования Лапласа*. Это интегральное преобразование, связывающее функцию f вещественной переменной x с функцией F комплексного аргумента $p = s + i\omega$ по правилу

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = F(p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx. \tag{12.1}$$

Преобразование Лапласа во многом сходно с преобразованием Фурье

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^\infty f(x)e^{-i\omega x}dx, \quad \omega \in (-\infty, \infty). \tag{12.2}$$

Принципиальное отличие этих преобразований состоит в следующем. Так как $|e^{i\omega x}| = 1$, преобразование Фурье обладает абсолютной сходимостью только для быстро убывающих функций. Поэтому область его применения весьма ограничена. В формуле (12.1) для преобразования Лапласа стоит экспонента с комплексным параметром p: $e^{-px} = e^{-st}e^{-i\omega x}$. Он позволяет добиться сходимости интеграла засчет выбора действительной части s. Преобразование Лапласа существует, в частности, для полиномиально и даже экспоненциально возрастающих функций, если s больше порядка экспоненты. Таким образом, преобразование Лапласа имеет гораздо более широкую область применения, чем преобразование Фурье. Например, для функции $f(x) = x$ преобразование Фурье не существует, а преобразование Лапласа существует при любом $s > 0$.

Между формулами (12.1) и (12.2) можно заметить и другое различие, носящее менее принципиальный характер: интегрирование идет по разным областям. Преобразование Лапласа чаще всего применяется для решения дифференциальных и интегральных уравнений на полуоси $(0, \infty)$, хотя в некоторых случаях рассматривают двустороннее преобразование Лапласа с интегрированием от $-\infty$ до ∞.

Дадим строгие определения, необходимые для изучения преобразования Лапласа.

Определение 15. *Функцией-оригиналом* называется любая комплекснозначная функция $f(x)$ действительного аргумента x, удовлетворяющая условиям:

1. $f(x)$ локально интегрируема на $\mathbb{R}$, т.е. интегрируема на любом конечном интервале.

2. $f(x) = 0$ при всех $x < 0$.

3. Существуют такие константы $M > 0$ и s, что для всех x

   $$|f(x)| \leqslant Me^{sx}, \tag{12.3}$$

   т.е. $f(x)$ с ростом x возрастает не быстрее показательной функции.

В дальнейшем мы будем рассматривать непрерывные функции-оригиналы.

Если существует число $s = s_1$, для которого выполняется неравенство (12.3), то оно выполняется и для всех $s \geqslant s_1$. Нижняя грань всех чисел s, для которых верно (12.3): $s_0 = \inf\limits_{\text{верно (12.3)}} s$, называется *показателем роста* функции $f(t)$.

Упражнение 15. *Определите показатель роста функции $f(x) = x$, $x \geqslant 0$. Здесь и далее, говоря о функциях-оригиналах, мы неявно подразумеваем, что $f(x) = 0$ при $x < 0$.*

Определение 16. *Изображением функции* $f(x)$ по Лапласу называется функция $F(p)$ комплексного аргумента $p = s + i\omega$, определяемая равенством (12.1). То, что $F(p)$ является изображением функции $f(x)$, будем обозначать так: $f(x) \div F(p)$.

Лемма 18. *Функция* $F(p)$ *определена в полуплоскости* $Re\, p = s > s_0$ *и является в этой полуплоскости аналитической функцией от* p.

Доказательство. Используя оценку (12.3) при некотором $s_1 > s_0$, получаем

$$|f(x)e^{-px}| \leqslant Me^{s_1 x}e^{-sx}|e^{i\omega x}| = Me^{(s_1-s)x}.$$

Так как

$$\int_0^\infty e^{(s_1-s)x}dx = \left.\frac{e^{(s_1-s)x}}{s_1-s}\right|_0^\infty = \frac{1}{s-s_1} < \infty, \quad s > s_1,$$

по признаку сравнения (см. [6, Том 2]) интеграл в формуле (12.1) абсолютно сходится. Следовательно, преобразование Лапласа существует в полуплоскости $\mathrm{Re} p > s_0$.

Выберем $s_2 > s_1$. Тогда при $s \geqslant s_2$

$$\int_0^\infty |f(x)e^{-px}|\, dx \leqslant \frac{1}{s-s_1} \leqslant \frac{1}{s_2-s_1}.$$

Следовательно, интеграл в формуле (12.1) сходится равномерно по p в замкнутой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geqslant s_2$. Поскольку s_1 и s_2 можно выбрать сколь угодно близкими к s, равномерная сходимость имеет место при любом $s_2 > s_0$. Поскольку подынтегральное выражение аналитически зависит от p и интеграл сходится равномерно, функция $F(p)$ аналитична в открытой полуплоскости $\mathrm{Re} p > s_0$. Строго говоря, можно заменить интеграл последовательностью

$$F_N(p) = \int_0^N f(x)e^{-px}dx, \quad N = 1, 2, \dots$$

сходящейся к функции $F(p)$ равномерно по p в любой полуплоскости $\mathrm{Re}\, p \geqslant s_2$, $s_2 > s_0$, и использовать первую теорему Вейерштрасса о равномерно сходящейся последовательности аналитических функций (см. [8]) для доказательства аналитичности предела $F(p)$. □

Выведем формулу для обратного преобразования Лапласа. Сравнивая формулы (12.1) и (12.2), приходим к выводу, что при фиксированном s

$$F(s + i\omega) = \mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{F}\{f(x)e^{-sx}\}.$$

Чтобы найти отсюда оригинал $f(x)$ по известному изображению $F(s + i\omega)$, воспользуемся обратным преобразованием Фурье

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(s+i\omega)\}e^{sx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(s+i\omega)e^{i\omega x}d\omega \cdot e^{sx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty F(s+i\omega)e^{(s+i\omega)x}d\omega.$$

Перейдем к комплексной переменной p по интегралом: $dp = id\omega$. В результате получаем формулу для *обратного преобразования Лапласа*:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_1-\infty}^{s_1+\infty} F(p)e^{px}dp, \tag{12.4}$$

где интегрирование идет по вертикальной прямой $\mathrm{Re}\, p = s_1$ с любым $s_1 > s_0$.

Вообще говоря, приведенные рассуждения не являются строгим доказательством, потому что не уделяется внимания вопросу сходимости интегралов. Наша цель в данном случае — продемонстрировать общую идею вывода формулы для обратного преобразования Лапласа. В дальнейшем мы тоже иногда будем ограничиваться схематичными рассуждениями, чтобы увидеть, насколько описываемый метод прост в использовании. Более подробно с теорией пробразования Лапласа можно ознакомиться в книге [12].

Определение 17. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции, определенные при $-\infty < x < \infty$. *Сверткой* этих функций называется новая функция от x, определяемая равенством

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x-y)dy,$$

если интеграл в правой части существует.

Свойства свертки.

1. Коммутативность: $f * \varphi = \varphi * f$. Действительно, вводя замену $y_1 = x - y$, $y = x - y_1$, имеем

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y_1)\varphi(y_1)dy_1 = \varphi * f.$$

2. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — функции-оригиналы, то их свертка всегда выполнима и справедливо соотношение

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\varphi(x-y)\,dy = \int_0^x f(y)\varphi(x-y)\,dy. \qquad (12.5)$$

Здесь мы воспользовались свойством 2 функций-оригиналов. Подынтегральная функция отлична от нуля только при $y \geqslant 0$, $x - y \geqslant 0$, т.е. $0 \leqslant y \leqslant x$.

3. Свертка функций-оригиналов также является функцией-оригиналом. Действительно, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — непрерывны, функция $\int\limits_0^t f(y)\varphi(x-y)\,dy$ тоже непрерывна и, следовательно, интегрируема на любом конечном интервале. Очевидно, $(f * \varphi)(x) = 0$ при $x < 0$. Осталось установить для свертки справедливость оценки (12.3). Так как для $f(x)$ и $\varphi(x)$ оценки (12.3) выполняются, то можно подобрать общие для двух функций константы M и s, так чтобы были верны оценки

$$|f(y)| \leqslant Me^{sy}, \quad |\varphi(x-y)| \leqslant Me^{s(x-y)}.$$

Подставим их в формулу (12.5):

$$|f * \varphi| = \left|\int_0^t f(y)\varphi(x-y)\,dy\right| \leqslant M^2 \int_0^x e^{sy}e^{s(x-y)}dy \leqslant M^2 e^{sx}x \leqslant M^2 e^{(s+\varepsilon)x}.$$

Таким образом, оценка (12.3) выполнена для свертки с некоторыми константами.

Теорема (о свертке)**.** *Если* $f(x) \div F(p)$, $\varphi(x) \div \Phi(p)$, *то* $f * \varphi \div F(p)\Phi(p)$.

Доказательство. Вычислим преобразование Лапласа для свертки (12.5) по формуле (12.1):

$$\int_0^x f(\tau)\varphi(x-y)d\tau \div \int_0^\infty e^{-px}\int_0^x f(y)\varphi(x-y)\,dydx =$$
$$\overset{z=x-y}{=} \int_0^\infty f(y)\int_0^\infty e^{-py}e^{-pz}\varphi(z)\,dzdy = \int_0^\infty f(y)e^{-py}dy\int_0^\infty \varphi(z)e^{-pz}dz = F(p)\Phi(p).$$

□

Строго говоря, для доказательства теоремы о свертке необходимо обосновать существование интегралов и применение теоремы Фубини (смена порядка интегрирования).

Упражнение 16. *При каких условиях на p выполняется теорема о свертке?*

В качестве важного примера, вычислим преобразование Лапласа для простейшей функции-оригинала — *функции Хевисайда*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x \geqslant 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{\theta(x)\} = \int_0^\infty e^{-px}dx = -\frac{e^{-px}}{p}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

Свойства преобразования Лапласа.

1. *Линейность.* $\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta\varphi(x)\} = \alpha\mathcal{L}\{f(x)\} + \beta\mathcal{L}\{\varphi(x)\}$.

2. *Запаздывание изображения.* Пусть $f(x) \div F(p)$ при $\mathrm{Re}p > s_0$. Тогда $f(x)e^{ax} \div F(p-a)$ при $\mathrm{Re}p > s_0 + \mathrm{Re}a$. Действительно,
$$\mathcal{L}\{f(x)e^{ax}\} = \int_0^\infty f(x)e^{ax}e^{-px}dx = \int_0^\infty f(x)e^{-(p-a)x}dx = F(p-a).$$
В частности, $e^{ax} \div \frac{1}{p-a}$.

3. *Дифференцирование оригинала.* Пусть $f(t) \div F(p)$ и $f'(x)$ — функция-оригинал. Тогда $f'(x) \div pF(p) - f(0)$. Действительно, интегрируя по частям, получаем
$$\mathcal{L}\{f'(x)\} = \int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx = f(x)e^{-px}\bigg|_0^\infty + p\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx.$$
При $\operatorname{Re} p > s_0$ в силу (12.3) имеем: $\lim\limits_{p\to\infty} f(x)e^{-px} = 0$, что доказывает требуемое.

4. *Дифференцирование изображения.* Пусть $f(x) \div F(p)$. Тогда $-xf(x) \div F'(p)$. Действительно,
$$F'(p) = \frac{d}{dp}\left(\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx\right) = \int_0^\infty (-xf(x))e^{-px}dx.$$
Так как $f(x)$ — функция оригинал, $|f(x)| \leqslant Me^{sx}$ при $x \in [0,\infty)$. Отсюда следует оценка $|xf(x)| \leqslant M_2e^{s_2x}$ с некоторой константой M_2 для любого $s_2 > s$. Следовательно, $-xf(x)$ — тоже функция-оригинал, и полученный интеграл сходится абсолютно и равномерно по p. Поэтому производная $F'(p)$ может быть найдена при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

Используя приведенные свойства, можно вычислить преобразование Лапласа для многих элементарных функций. Нам известно, что $\theta(x) \div \dfrac{1}{p}$. Дифференцируя изображение, получаем $-x \div \left(\dfrac{1}{p}\right)' = -\frac{1}{p^2}$, или $x \div \dfrac{1}{p^2}$[3] Применяя свойство дифференцирования изображения n раз, получаем

$$(-x)^n \div \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad x^n \div \frac{n!}{p^{n+1}}. \tag{12.6}$$

Существуют таблицы преобразований Лапласа для простейших функций.

Упражнение 17. *Вычислите* $\mathcal{L}\{\sin x\}$.

[3]При вычислении преобразования Лапласа для различных функций мы для краткости пишем в качестве функции-оригинала $f(x)$ вместо $f(x)\theta(x)$.

Лекция 13. Решение интегральных и интегро-дифференциальных уравнений при помощи преобразования Лапласа

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра второго рода *типа свертки*:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathscr{K}(x-y)\varphi(y)dy + f(x) \tag{13.1}$$

на полуоси $x \in [0, \infty)$. Предположим, что ядро $\mathscr{K}(x)$ и свободный член $f(x)$ непрерывны при $x \geqslant 0$ и являются функциями-оригиналами:

$$|\mathscr{K}(x)| \leqslant M_1 e^{s_1 x}, \quad |f(x)| \leqslant M_2 e^{s_2 x}, \quad x \geqslant 0. \tag{13.2}$$

Заметим, что интеграл может быть записан как свертка двух функций. Тогда уравнение (13.1) принимает вид

$$\varphi = \lambda \mathscr{K} * \varphi + f.$$

Лемма 19. *Уравнение* (13.1) *имеет единственное непрерывное решение* $\varphi(x)$ *при любом* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Решение* $\varphi(x)$ *удовлетворяет оценке*

$$|\varphi(x)| \leqslant M_3 e^{s_3 x}, \quad s_3 > \max\{s_1, s_2\}, \tag{13.3}$$

т.е. $\varphi(x)$ *— функция-оригинал.*

Доказательство. Уравнение (13.1) типа свертки представляет собой частный случай уравнения Вольтерра (11.1) с непрерывным ядром $\mathscr{K}(x, y)$ и, тем более, с L_2-ядром. Поэтому по доказанной ранее теореме для интегрального уравнения Вольтерра с L_2-ядром уравнение (13.1) имеет единственное решение на любом отрезке $[0, h]$. Из непрерывности ядра и свободного члена нетрудно получить непрерывность решения на любом отрезке $[0, h]$. Поэтому уравнение (13.1) имеет решение, непрерывное на всей полуоси $[0, \infty)$ и, следовательно, интегрируемое на любом конечном интервале.

Перейдем к доказательству оценки (13.3). Введем неотрицательную функцию $\mu(x) = |\varphi(x)|e^{-s_3 x}$, где s_3 — произвольное число, большее чем $\max\{s_1, s_2\}$. Умножая соотношение (13.1) на $e^{-s_3 x}$ и оценивая модуль интеграла, получаем

$$|\mu(x)| \leqslant |\lambda| \int_0^x M_1 e^{s_1(x-y)} |\varphi(y)| e^{-s_3 x} dy + M_2 e^{s_2 x} e^{-s_3 x}.$$

Преобразуем экспоненты под интегралом

$$e^{s_1(x-y)} e^{-s_3 x} = e^{s_1(x-y) - s_3 x + s_3 y - s_3 y} = e^{(s_1 - s_3)(x-y)} e^{-s_3 y}.$$

Заметим, что $|\varphi(y)|e^{-s_3 y} = \mu(y)$. В итоге имеем

$$|\mu(x)| \leqslant |\lambda| \int_0^x M_1 e^{(x-y)(s_1 - s_3)} \mu(y)\, dy + M_2 e^{(s_2 - s_3)x}.$$

Поскольку $s_3 - s_1 < 0$ и $s_3 - s_2 < 0$, экспоненты $e^{(x-y)(s_1-s_3)}$ и $e^{s_2 x} e^{-s_3 x}$ не превосходят единицу. Следовательно,

$$|\mu(x)| \leqslant |\lambda| \int_0^x M_1 \mu(y)\, dy + M_2.$$

Далее нам понадобится следующий вспомогательный технический факт, часто использующийся в теории дифференциальных и интегральных уравнений.

Лемма 20 (Беллмана)**.** *Пусть функции* $\mu(x)$ *и* $\eta(x)$ *неотрицательны и непрерывны при* $x \geqslant 0$*, причем*

$$\mu(x) \leqslant C + \int_0^x \eta(y)\mu(y)dy,$$

где $C > 0$ *— некоторая константа. Тогда*

$$\mu(x) \leqslant Ce^{\int_0^x \eta(y)\,dy}.$$

В нашем случае $\eta(x) \equiv |\lambda|M_1$, поэтому по лемме Беллмана приходим к оценке $\mu(x) \leqslant C_1 e^{C_2 x}$ с некоторыми положительными константами C_1 и C_2. Следовательно, $|\varphi(x)| \leqslant C_1 e^{(C_2+s_3)x}$, и мы получили оценку (13.3) с константами C_1 и $s_3 + C_2$. $\square$

Пусть $\varphi(x) \div \Phi(p)$, $\mathscr{K}(x) \div \mathcal{K}(p)$, $f(x) \div F(p)$. Применяя к обеим частям уравнения (13.1) преобразование Лапласа и пользуясь теоремой о свертке, будем иметь

$$\Phi(p) = \lambda\mathcal{K}(p)\Phi(p) + F(p),$$

откуда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda\mathcal{K}(p)}. \tag{13.4}$$

В силу (13.3), функция $\Phi(p)$ будет аналитической в полуплоскости $\mathrm{Re}p > s_3$ (знаменатель дроби не будет иметь нулей в этой полуплоскости). Функция-оригинал $\varphi(x)$ может быть найдена по изображению $\Phi(p)$ при помощи формулы обращения преобразования Лапласа (12.4). На практике для нахождения оригинала $\varphi(x)$ не всегда удобно использовать формулу обращения. Часто бывает легче применить другие свойства преобразования Лапласа.

Пример. Решим методом преобразования Лапласа уравнение

$$\varphi(x) = x + \int_0^x \sin(x-y)\varphi(y)dy.$$

Имеем

$$f(x) = x \div \frac{1}{p^2}, \quad \sin x \div \frac{1}{p^2+1}.$$

Уравнение принимает вид

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2+1}\Phi(p).$$

Выразим $\Phi(p)$

$$\Phi(p)\left(1 - \frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(p) = \frac{\frac{1}{p^2}}{\frac{p^2+1-1}{p^2+1}} = \frac{p^2+1}{p^4} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}.$$

Согласно формулам (12.6)

$$x \div \frac{1}{p^2}, \quad x^3 \div \frac{3!}{p^4}.$$

Поэтому обратное преобразование Лапласа от $\Phi(p)$ равно

$$\varphi(x) = x + \frac{x^3}{6}.$$

Заметим, что формулу (13.4) можно переписать в виде

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda \frac{\mathcal{K}(p)}{1 - \lambda \mathcal{K}(p)} F(p),$$

или

$$\Phi(p) = F(p) + \lambda \mathcal{R}(p, \lambda) F(p), \tag{13.5}$$

где

$$\mathcal{R}(p, \lambda) = \frac{\mathcal{K}(p)}{1 - \lambda \mathcal{K}(p)}.$$

Равенство (13.5) нетрудно перевести обратно в пространство функций-оригиналов, произведение перейдет в свертку:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \mathscr{R}(x, \lambda) * f(x), \quad \mathscr{R}(x, \lambda) \div \mathcal{R}(p, \lambda),$$

или

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \mathscr{R}(x-y, \lambda) f(y)\, dy + f(x).$$

Мы получили представление решения уравнения (13.1) через резольвенту $\mathscr{R}(x-y, \lambda)$.

Описанный метод можно использовать и для решения **интегро-дифференциальных уравнений**. Рассмотрим линейное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \varphi(x) + \sum_{m=0}^{l} \int_0^x \mathscr{K}_m(x-y) \varphi^{(m)}(y)\, dy = f(y). \tag{13.6}$$

Пусть $\mathscr{K}_m(x)$, $m = \overline{0, l}$, и $f(x)$ — известные непрерывные функции-оригиналы. Тогда можно показать, что неизвестная функция $\varphi(x)$ — тоже непрерывная функция-оригинал.

Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$f(x) \div F(p), \quad \mathscr{K}_m(x) \div \mathcal{K}_m(p), \quad \varphi(x) \div \Phi(p).$$

По свойству дифференцирования оригинала имеем

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &\div pF(p) - \varphi(0), \\
\varphi''(x) &\div p^2 F(p) - p\varphi(0) - \varphi'(0), \\
&\dots \\
\varphi^{(m)}(x) &\div p^m F(p) - p^{m-1}\varphi(0) - p^{m-2}\varphi'(0) - \dots - \varphi^{(m-1)}(0).
\end{aligned}$$

вместе с интегро-дифференциальным уравнением (13.6) зададим начальные условия

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \varphi'(0) = \varphi_0', \quad \dots, \quad \varphi^{(l)}(0) = \varphi_0^{(l)}.$$

Тогда

$$\int_0^x \mathscr{K}_m(x-y) \varphi^{(m)}(y)\, dy = \mathscr{K}_m * \varphi \div \mathcal{K}_m(p) \left(p^m \Phi(p) - p^{m-1}\varphi_0 - \dots - \varphi_0^{(m-1)} \right).$$

Применим преобразование Лапласа к уравнению (13.6):

$$\Phi(p) \left[p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{m=0}^{l} \mathcal{K}_m(p) p^m \right] = A(p),$$

где $A(p)$ — известная функция. Осталось найти изображение $\Phi(p)$ из полученного уравнения и по нему восстановить оригинал $\varphi(x)$ — решение интегро-дифференциального уравнения (13.6).

Пример. Решим интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x) + \varphi(x) + 2\int_0^x e^{2(x-y)}\varphi(y)\,dy = e^{2x} \tag{13.7}$$

с начальными условиями

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \tag{13.8}$$

Имеем

$$\varphi(x) \div \Phi(p), \quad \varphi''(x) \div p^2\Phi(p).$$

По свойству запаздывания изображения $e^{2x} \div \dfrac{1}{p-2}$. В итоге получаем

$$p^2\Phi(p) + \Phi(p) + \frac{2}{p-2}\Phi(p) = \frac{1}{p-2}.$$

Выразим $\Phi(p)$:

$$\Phi(p)\left(1 + p^2 + \frac{2}{p-2}\right) = \frac{1}{p-2} \quad \Rightarrow \quad \Phi(p) = \frac{(p-2)}{(p-2)((p-2)(1+p^2)+2)} = \frac{1}{p(p-1)^2}.$$

Разложим рациональную дробь на простейшие:

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p}.$$

По свойству запаздывания изображения $e^x \div \dfrac{1}{p-1}$. Применяя свойство дифференцирования изображения, получаем $xe^x \div \dfrac{1}{(p-1)^2}$. Таким образом, оригиналом для изображения $\Phi(p)$ будет функция

$$\varphi(x) = xe^x - e^x + 1.$$

Полученная функция является решением интегро-дифференциального уравнения (13.7), удовлетворяющим начальным условиям (13.8).

Список литературы

[1] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Изд. 5-е. М.: Наука, 1985.

[2] Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. 2-е изд., стереотип. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 (сокращенный и упрощенный вариант учебника [1]).

[3] Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.

[4] Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. Уч. пособие. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1975.

[5] Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

[6] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 томах. М.: Лань, 2009.

[7] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. 3-е изд. М.: Лань, 2009.

[8] Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. Изд. 13-е. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

[9] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 8-е. М.: Физматлит, 1959.

[10] Смирнов В.И. Курс высшей математики. В 5 томах. Изд. 21-е. М.: Наука, 1974.

[11] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7-е. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[12] Шостак Р.Я. Операционное исчисление. Краткий курс. Изд. второе, доп. Учебное пособие для втузов. М.: Высшая школа, 1972.