ФГБОУ ВПО "Саратовский Государственный университет имени Н.Г. Чернышевского"

АЛГЕБРЫ ЛИ

Учебное пособие

А.Н. Сергеев

Саратов
2014

Содержание

1. Предисловие

Теория алгебр Ли и их представления является одной из наиболее востребованных теорий в современной математике. Это связано с ее многочисленными приложениями как в самой математике так и в математической физике. Не менее важное значение имеют методы и концепции возникшие в теории алгебр Ли и в теории их представлений. Стоит также отметить, что несмотря на довольно обширную литературу изучение основных фактов их теории алгебр Ли требует значительных усилий и времени, в силу сложности самого предмета. Наиболее интересной и содержательной частью общей теории алгебр Ли, является теория полупростых конечномерных алгебр Ли.

Целью данного пособия, является изложение основных фактов теории представлений полупростых алгебр Ли на простейшем примере алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Несмотря на свою простоту, этот пример позволяет с минимумом технических средств ввести в курс основных идей полупростых алгебр Ли и их представлений. А также показать связи алгеб Ли с интегрируемыми системами.

Вначале напоминаются основные факты из теории линейных пространств, линейных операторов и ассоциативных алгебр. Дается определение алгебры Ли и алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, а также основных понятий теории представлений. Вводится универсальная обертывающая алгебра. Доказывается полупростота конечномерных представлений. С помощью модулей Верма описывается центр универсальной обертывающей алгебры. Дается приложение полученных результатов к интегрируемым системам.

2. Линейная алгебра

Определение 2.1. *Обобщенным собственным подпространством опера-тора A отвечающему собственному значению λ называется подпро-странство*

$$V^{\lambda} = \{v \in V \mid \ (A-\lambda)^k v = 0\}$$

для некоторого k. (Доказать что это действительно подпространство).

Лемма 2.2. *Собственные векторы с различными собственными значениями линено независимы.*

Лемма 2.3. *Если v обобщенный собтвенный вектор с собственным значением μ и $\mu \neq \lambda$ то $(A-\lambda)v \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $(A-\mu)^n v = 0$ и $(A-\lambda)v = 0$, отсюда $(\lambda-\mu)^n v = 0$ и $v = 0$. □

Следствие 2.4. *Пусть V^{μ} подпространство обобщенных собственных векторов, тогда $A-\lambda$ обратим на этом подпространстве.*

Доказательство. По предыдущему $(A-\lambda)v$, имеет нулевое ядро и силу конечномерности обратим. □

Лемма 2.5. *Обобщенные собственные векторы с различными собственными значениями линено независимы.*

Доказательство. Пусть

$$v_1 + \cdots + v_k = 0$$

соотношение линейной зависимости. Применим $(A-\lambda_k)^{n_k}$, получим

$$(A-\lambda_k)^{n_k} v_1 + (A-\lambda_k)^{n_k} v_2 + \cdots + (A-\lambda_k)^{n_k} v_{n-1} = 0$$

По индукции

$$(A-\lambda_k)^{n_k} v_i = 0, \ i = 1, \dots, k-1$$

и по предыдущей лемме $v_i = 0$, $i = 1, \dots, k-1$, следовательно $v_k = 0$. □

Лемма 2.6. *Пусть линейный оператор A удовлетворяет уравнению*

$$(A-a_1)(A-a_2)\dots(A-a_n) = 0$$

в векторном птостранстве V, где все $a_1, \dots, a_n$ попарно различны. Тогда существует базис в V состоящий из собственных векторов оператора A. Другими словами оператор A диагонализируем.

Доказательство. Можно считать, что в вышенаписанном произведении ни один сомножитель нельзя опустить. Тогда положим

$$P_i = \frac{\prod_{j\neq i}(A - a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i - a_j)}$$

Все $P_i \neq 0$ их сумма равна 1 и $P_i^2 = P_i$. Это дает разложение на собственные подпростанства. $\square$

Теорема 2.7. *Пусть V конечномерное пространство и A - линейный оператор в нем. Тода пространство можно представить в виде прямой суммы обобщенных собственных подпространств.*

Доказательство. Докажем, что подпространство V^λ выделяется прямым слагаемым. В самом деле положим $B = A - \lambda$. Тогда

$$V^\lambda = \{v \in V \mid B^N v = 0\}$$

Так как пространство конечномерно, то для некоторго n, $B^n = 0$ на V^λ. Возмем наименьшее такое n, тогда $V^\lambda = \ker B^n$. Докажем теперь, что

$$V = \ker B^n \oplus ImB^n$$

так как для любого оператора

$$\dim\ker L + \dim ImL = \dim V$$

то достаточно показать, что

$$\ker B^n \cap ImB^n = 0$$

Пусть $v = B^n u \neq 0$ и $B^n v = 0$. Тогда $B^{2n}u = 0$ и $u \in V^\lambda$ - противоречие. $\square$

Лемма 2.8. *Пусть U инвариантное подпространство в V. Тогда для любого λ*

$$(V/U)^\lambda = V^\lambda/U^\lambda$$

Доказательство. Очевидно, что

$$(V/U)^\lambda \supset V^\lambda/U^\lambda$$

Обратно. Нужно показать, что если $(A-\lambda)^n v \in U$, то найдется $v_1 \in V^\lambda$ такой, что $v - v_1 \in U$. Разложим

$$U = U^\lambda \oplus W$$

тогда $(A-\lambda)^n v = u + w$. Оператор $A - \lambda$ обратим на W поэтому $w = (A-\lambda)^n w_1$. Положим $v_1 = v - w_1$. Тогда

$$v - v_1 = w_1 \in U,\ (A-\lambda)^n v_1 = u \in U^\lambda$$

$\square$

3. Алгебры Ли

Определение 3.1. *Алгеброй Ли называется векторное пространство V наделенное умножением, которое обозначается $[a, b]$ и обладает свойствами*

Билинейность.

$$[\lambda a, b] = [a, \lambda b] = \lambda[a, b]$$

$$[a_1 + a_2, b] = [a_1, b] + [a_2, b], \quad [a, b_1 + b_2] = [a, b_1] + [a, b_2]$$

где λ - комплексное число. Кососимметричность

$$[b, a] = -[a, b]$$

Тождество Якоби

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$$

Пример 3.2. *Векторное произведение векторов. Пусть V - трехмерное векторное пространство. Положим*

$$[u, v] = u \times v$$

Напоминание, если e_1, e_2, e_3 ортонормированный правоориентированный базис, то

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

Из этого определения легко следует билинейностъ и кососимметричность. Докажем тождество Якоби. Его достаточно проверить для базисных векторов. Если два из терех векторов равны, то тождество Якоби следует из кососимметричности. Докажем равенство

$$(u \times v) \times w = (u, w)v - (v, w)u$$

достаточно на базисных векторах, при этом можно считать u, v разными. Имеем

$$e_1 \times e_2 = e_3, \ e_1 \times e_3 = -e_2, \ e_2 \times e_3 = e_1$$

на самом деле достаточно таблицы умножения.

Пример 3.3. *Дифференциальные операторы первого порядка*

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Пример 3.4. *Пусть A ассоциативная алгебра. Превратим ее в алгебру Ли*

$$[a, b] = ab - ba$$

В частности это применимо к алгебре линейных операторов.

Пример 3.5. *Пусть A ассоциативная алгебра. Рассмотрим множество всех ее дифференцирований*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b)$$

Тогда это множество замкнуто относительно коммутатора, то есть

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

является дифференцированием.

Следствие 3.6. *Алгебра векторных полей на многообразии является алгеброй Ли.* $A = C^\infty(M)$.

Определение 3.7. *Линейное отображение*

$$f : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$$

Называется гомооморфизмом, если оно являеися линейным отображением векторных пространств и сохраняет скобку, то есть

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$$

Определение 3.8. *Гомомрфизм называется изоморфизмом, если он является взаимно однозначным отображением.*

Пример 3.9. 1) *Показать, что существует единственная алгебра Ли размерности* 1.

2) *Существет две неизоморфных алгебры Ли размерности* 2.

3 *Существует однопараметрическое семейство трехмерных алгебр Ли.*

Пример 3.10. *Многообразие структутных констант. Выберем базис в* $\mathfrak{g}$ $e_1, \ldots, e_n$, *тогда*

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k$$

Коэффициеты называются структурными константами. Они удовлетворяют уравнениям

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0$$

$$[[e_i, e_j]e_k] = \sum_l c_{ij}^l [e_l, e_k] = \sum_{l,m} c_{ij}^l c_{lk}^m e_m$$

$$c_{ij}^l c_{lk}^m + c_{jk}^l c_{li}^m + c_{ki}^l c_{lj}^m = 0$$

То есть имеется $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ *неизвестных и* $\frac{1}{6}n^2(n-1)(n-2)$ *уравнений.*

4. Алгебра $\mathfrak{sl}(2)$

Полезно рассмотреть все основные своиства алгебр Ли на простейшем нетривиальном примере алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Определение 4.1. *Алгеброй Ли* $\mathfrak{sl}(2)$ *называется трехмерная алгебра Ли с таблицей умножения*

$$[XY] = H, \quad [HY] = -2Y, \quad [HX] = 2X.$$

Лемма 4.2. *Алгебра Ли* $\mathfrak{sl}(2)$ *изоморфна подалгебре в алгебре матриц* 2×2 *имеющих след нуль (сумма диагональных элементов равна нулю).*

Доказательство. Изоморфизм задается по правилу

$$X \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

□

Лемма 4.3. *Алгебра Ли* $\mathfrak{sl}(2)$ *изоморфна алгебре векторов трехмерного пространства с векторным умножением.*

Доказательство. Напомним таблицу умножения векторов

$$[e_1, e_2] = e_3, \ [e_1 e_3] = -e_2, \ [e_2, e_3] = e_1$$

Изоморфизм задается по правилу

$$X \to ie_2 - e_1, \quad Y \to ie_2 + e_1, \quad H \to -2ie_3$$

□

Определение 4.4. *Предстатвлением алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *называется ее гомоморфизм* φ *в алгебру Ли* $\mathfrak{gl}(V)$. *То есть такое отображение, что*

$$\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V), \ \varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$$

В случае алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ это определение эквивалентно заданию трех операторов X, H, Y в векторном пространстве V, которые удовлетворяют соотношениям

$$[XY] = H, \quad [HY] = -2Y, \quad [HX] = 2X.$$

Есть два эквивалентных языка в теории представлений. Язык представлений и язык модулей.

Определение 4.5. *Модулем над алгеброй Ли называется векторное пространство V вместе с билинейным отображением $\mathfrak{g}\times V \to V$ которое обладает свойством*

$$[x, y]v = x(yv) - y(xv)$$

для любого вектора $v \in V$.

Теорема 4.6. *Понятие представления и понятие модуля эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\varphi : \mathfrak{g} \to End(V)$ - представление. Зададим на V структуру модуля по формуле $xv = \varphi(x)v$. Проверяется, что билинейность умножения равносильна линейности φ и тому, что $\varphi(x)$-линейный оператор. Тождество приведенное в формулировке теоремы равносильно условию того, что φ гомоморфизм алгебр Ли. □

Основная задача теории представлений заключается в описании всех представлений. Эта задача в общем случае по видимому неразрешима. Поэтому выделяют различные классы опредставлений поддающиеся ра-зумному описанию.

Определение 4.7. *Подпредставлением (или подмодулем) представления V называется такое подпространство $U \subset V$, что оно инвариантно относительно действия всех операторов $x \in \mathfrak{g}$.*

Определение 4.8. *Представление V называется неприводимым или простым если оно не содержит подпредставлений отличных от самого V и нуля.*

Определение 4.9. *Гомоморфизмом представлений V_1 и V_2 называется линейное отображение $f : V_1 \longrightarrow V_2$ такое, что $f(xv) = xf(v)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$.*

Определение 4.10. *Гомоморфизм называется изоморфизмом, если он является биективным отображением.*

Задачи в порядке возрастания трудности (с точностью до изоморфизма):
1) Описание неприводимых представлений.
2) Описание неразложимых представлений
3) Описание всех конечномерных представлений.

Пример 4.11. *Рассмотрим одномерную алгебру Ли $\mathfrak{g} =< X >$. Тогда ее представление это задание любого оператора X в V, то есть пары (X, V). Привести классификацию.*

Перейдем к $\mathfrak{sl}(2)$.

Определение 4.12. *Модуль V называется порожденным множеством векторов S если он совпадает с наименьшим подмодулем содержаяим это множество.*

Лемма 4.13. *Модуль порожденный множеством S совпадает с линейной оболочкой элементов вида*

$$x_1 x_2 \dots x_r v, \quad x_1, x_2, \dots x_r, \in \mathfrak{g}, \ v \in S, r = 0, 1, 2, \dots$$

Определение 4.14. *Пусть V - представление $\mathfrak{sl}(2)$. Вектор $v \in V$ называется старшим, если он собственный относительно H и аннулируется оператором X, то есть*

$$Hv = \lambda v, \quad Xv = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

При этом число λ называется весом вектора v.

Теорема 4.15. 1) *Любое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ содержит старший вектор.*

2) *Вес старшего вектора является целым неорицательным числом.*

3) *Если v - вектор старшего веса n, то подмодуль им порожденный неприводим и имеет размерность $n+1$.*

Доказательство. 1) Оператор H имеет в пространстве представления V собственный вектор $Hv = \lambda v$. Тогда

$$HXv = (HX - XH)v + XHv = [HX]v + \lambda Xv = (\lambda + 2)Xv$$

Поэтому векторы $v, Xv, X^2 v, X^3 v \dots$ являются собственными для H с собственными значениями

$$\lambda, \lambda + 2, \lambda + 4, \dots$$

Пусть $k = \dim V$. Докажем, что $X^k v = 0$. Предположим, что это не так. Тогда все векторы

$$v, Xv, X^2 v \dots, X^k v$$

отличны от нуля. Но их собственные значения разные. По теореме из линейной алгебре они линейно независимы. Противоречие. Следовательно $X^k v = 0$. Возьмем наименьшее k, с таким свойством и положим $u = X^{k-1} v \neq 0$. Это и есть старший вектор. Обозначим его e_0.

2). Положим

$$e_0 = u, \ e_1 = Yu, \ \dots,$$

векторы в этой последовательности имеют собственные значения

$$\lambda, \lambda - 2, \lambda - 4, \dots$$

Как и прежде найдется n, $Y^n u \neq 0$, а $Y^{n+1}u = 0$. Несложно проверить равенства

$$XY^k = [X, Y^k] + Y^k X, \ \ [X, Y^k] = kY^{k-1}(H - k + 1)$$

Следовательно

$$0 = XY^{n+1}u = n(\lambda - n)Y^n u$$

Отсюда $\lambda = n$.

3). Рассмотрим подпространство W являющееся линейной оболочкой векторов.

$$e_0 = u, \, e_1 = Ye_0, \, \dots, e_n = Y^n e_0$$

Мы видим, что W, инвариантно относительно H, Y Покажем, что оно инвариантно относительно X. Но

$$Xe_i = XY^i e_0 = iY^{i-1}(H - i + 1)e_0 = i(n - i + 1)e_{i-1}$$

Таким образом мы имеем формулы

$$W =< e_0, \, e_1, \, \dots, e_n >$$

$$He_i = (n - 2i)e_i, \, Xe_i = i(n - i + 1)e_{i-1}, \, Ye_i = e_{i-1}, i = 0, 1, \dots, n$$

Покажем что этот модуль неприводим. Предположим, что $U \subset W$ инва-риантное подпространство отличное от $0, W$. Пусть $u \in U$ собственный вектор для H и $Hu = \mu u$. Разложим вектор u по базису и применим оператор H, получим

$$u = c_0 e_0 + \dots + c_n v_n, \quad \lambda(c_0 e_0 + \dots + c_n v_n) = c_0 n e_0 + \dots + c_n(-n)v_n$$

Отсюда получаем систему

$$\begin{cases} \lambda c_0 = nc_0 \\ \dots \\ \lambda c_i = (n - 2i)c_i \\ \dots \\ \lambda c_n = -nc_n \end{cases}$$

Поэтому для некоторого i, $u = \alpha e_i$. Из инвариантности относительно операторов X, Y следует, что $e_0, \dots, e_n \in U$. Противоречие.

$\square$

Следствие 4.16. *Обозначим через $L(n)$ векторное пространство с ба-зисом $\{e_0, \dots, e_n\}$ на котором операторы действуют по формулам*

$$He_i = (n - 2i)e_i, \, Xe_i = i(n - i + 1)e_{i-1}, \, Ye_i = e_{i-1}, i = 0, 1, \dots, n$$

Пространство $L(n)$ является неприводимым модулем над $\mathfrak{g}$ и содержит единственный с точностью до пропорциональности вектор старшего веса. Вес этого вектора равен n.

Доказательство. Во первых прямым вычислением проверяется, что эти формулы задают структуру модуля. Докажем теперь единственность старшего вектора. Пусть $v \in V$ старший вектор. Так как он собственный для H то согласно предыдущему $v = \alpha e_i$. И так как $Xv = 0$, то $v = \alpha e_0$.

□

Следствие 4.17. *(Классификация неприводимых представлений).*
1. *Любое неприводимое конечномерное представление эквивалентно одному из $L(n)$*
2. *Если $n \neq m$, то представления $L(n)$ и $L(m)$ неэквивалентны.*

Доказательство. Пусть V - неприводимое конечномерное представление. По теореме оно содержит подмодуль $L(n)$ для некоторого n. так как оба модуля неприводимы, то $L(n) = V$.

Пусть модули $L(n)$ и $L(m)$ эквивалентны и φ эквивалентность. Тогда они имеют одинаковую размерность. Противоречие. □

Удобная реализация. Существует удобная модель для неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{sl}(2)$.

5. Универсальная обертывающая алгебра.

Определение 5.1. *Ассоциативная алгебра над полем $\mathbb{C}$, это векторное пространство над полем $\mathbb{C}$ вместе с умножением $A \times A \to A$ таким, что*

$$(ab)c = a(bc)$$

$$1a = a1 = a$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ab + bc$$

где 1 обозначает выделенный элемент называемый единицей. То есть мы всегда рассматриваем алгебры с единицей.

Пример 5.2. *Алгебра матриц.*

Пример 5.3. *Алгебра многочленов.*

Пример 5.4. *Задание алгебры таблицей умножения.*

Пример 5.5. *Алгебра некоммутативных многочленов. Пусть $X_1, \dots X_n$ различные символы. Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство базисом которого являются всевозможные слова*

$$X_{i_1}, \dots X_{i_k}$$

где $k = 0, 1, \dots$ а индексы $i_1, \dots, i_k$ принимают произвольные значения из множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Определим умножение приписыванием од-ного слова к другому. Легко проверить, что тем самым получается алгебра. Она называется свободной некоммутативной алгеброй. Обоз-начается

$$\mathbb{C} < X_1, \dots X_n >$$

Размерность ее однородной компоненты степени k равна n^k.

Теорема 5.6. *Пусть $a_1, \dots, a_n$ любой набор элементов из ассоциативной алгебры A. Тогда существует и единственный гомоморфизм*

$$\varphi : \mathbb{C} < X_1, \dots X_n > \longrightarrow A$$

такой, что

$$\varphi(X_1) = a_1, \dots, \varphi(X_n) = a_n$$

Доказательство. Единдственность очевидна. Существование. Положим

$$\varphi(X_1 X_2 X_2 X_1) = a_1 a_2 a_2 a_1$$

и также для любого слова. Тогда например

$$\varphi(X_1 X_2 X_2 X_1) = \varphi(X_1 X_2)\varphi(X_2 X_1)$$

и то же самое в общем случае. □

Определение 5.7. *Идеалом в алгебре A называется подпростарнство I такое, что*

$$aI \subset A, \quad Ia \subset A.$$

Лемма 5.8. *В этом случае на фактор пространстве можно определить структуру алгебры. Которая обозначается A/I*

Доказательство. □

Пример 5.9. *Пусть $A = \mathbb{C}[X]$, и I – множество многочленов которые делятся на заданный многочлен $f(x)$.*

Пример 5.10. *Пусть $A = \mathbb{C} < X_1, \dots X_n >$, и I – наменьший идеал содержащий заданные многочлены*

$$F_1(X_1, \dots .X_n), \dots, F_N(X_1, \dots .X_n)$$

тогда фактор алгебра называется алгеброй порожденной некоммутативными переменными $X_1, \dots X_n$ и соотношениями

$$F_1(X_1, \dots . X_n) = 0, \dots, F_N(X_1, \dots . X_n) = 0.$$

Определение 5.11. *Универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, называется алгебра обозначаемая $U(\mathfrak{sl}(2))$ которая порождена образующими X, H, Y и соотношениями:*

$$XY - YX = H, \ HY - YH = -2Y, \ HX - XH = 2X$$

Лемма 5.12. *(Универсальное свойство). Пусть A - ассоциативная алгебра и A, B, C три элемента таких, что*

$$AC - CA = B, \quad BC - CB = -2A, \quad BA - AB = 2A,$$

тогда существует и единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр

$$\varphi : U(\mathfrak{sl}(2)) \longrightarrow A$$

такой, что

$$\varphi(X) = A, \ \varphi(H) = B, \ \varphi(Y) = C$$

Следствие 5.13. *Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ находятся в биекции с представлениями ассоциативной алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$.*

Теорема 5.14. *(PBV) Элементы $Y^i H^j X^k$ где i, j, k любые целые неотрица-тельные образуют базис алгебры $U(\mathfrak{sl}(2))$.*

Доказательство. Очевидно они линейно порождают $U(\mathfrak{sl}(2))$. Докажем линейную независимость. Предположим, что существует соотношение

$$u = f_n(H, Y)X^n + f_2(H, Y)X^2 + \cdots + f_N(H, Y)Y^N = 0, \ f_n(Y, H) \neq 0$$

так, что n наименьшая степень, а N наибольшая. Рассмотрим отображение

$$\varphi(X) = x\frac{\partial}{\partial y}, \ \varphi(H) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \ \varphi(Y) = y\frac{\partial}{\partial x}$$

Тогда оно является представлением алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ в пространстве много-членов $\mathbb{C}[x, y]$. Имеем

$$0 = u(x^m y^n) = n! f_n(Y, H)(x^{n+m}) = 0$$

или

$$\left(g_0(H) + Yg_1(H) + Y^2 g_2(H) + Y^k \cdots + g_k(H)\right)(x^{m+n}) = 0$$

Легко проверить, что $g(H)(x^{m+n}) = g(n+m)x^{n+m}$ поэтому

$$g_0(n+m)x^{m+n} + g_1(n+m)Y(x^{m+n}) + \cdots + g_k(n+m)Y^k(x^{m+n}) = 0$$

Так, как

$$Y^i(x^{n+m}) = \frac{(n+m)!}{(n+m-i)!} y^i x^{n+m-i}, \ 1 \le i \le n+m$$

то отсюда следует, что

$$g_0 = g_1 = \cdots = g_k = 0$$

□

Следствие 5.15. *Если элемент $u \in U(\mathfrak{sl}(2))$ действует как 0 в любом неприводимом модуле, то он сам равен нулю.*

Доказательство. Алгебра многочленов $\mathbb{C}[x,y]$ из предыдущей теоремы как модуль над $\mathfrak{sl}(2)$ является прямой суммой простых конечномерных модулей и как было доказано, если u действует нулем в $\mathbb{C}[x,y]$ то он сам равен нулю. □

6. Полупростота

Определение 6.1. *Модуль называется полупростым, если он является прямой суммой простых модулей.*

Лемма 6.2. *Модуль полупрост тогда и только тогда, когда он равен сумме каких либо своих простых подмодулей.*

Доказательство. В одну сторону очевидно. В другую. Пусть

$$V = V_1 + \cdots + V_m$$

Выберем в множестве $[1,m]$ наибольшее подмножество X такое, что сумма $\sum_{i \in X} V_i$ является прямой. Пкажем что эта сумма совпадает с V. Достаточно показать, что каждый V_j содерщится в этой сумме. Но пересечение суммы с V_j подмодуль и силу простоты равно 0 или V_j. Певый случай противоречит максимальности X следовательно V_j содер-жится в сумме. лемма доказана. □

Следствие 6.3. *Конечномерный $\mathfrak{sl}(2)$ модуль полупрост тогда и только тогда, когда он порожден некоторым множеством векторов старшего веса.*

Доказательство. По теореме, каждый простой модуль порожден вектором старшего веса. Следовательно и прямая сумма простых модулей обладает этим свойством. тем самым полупростой модуль опбладает этим свойством.

Обратно. Пусть модуль порожден векторами старшего веса. По теореме каждый вектор старшего веса порождает простой модуль. Следовательно исходный модуль равен сумме простых модулей и по предыдущей теореме прямой сумме простых модулей. $\square$

Теорема 6.4. *Пусть V - представление алгебры $\mathfrak{sl}(2)$ и λ - собственное значение H с максимальной действиетельной частью. Тогда H действует диагонально на V^λ.*

Доказательство. 1). Докажем во первых, что $Xv = 0$, для любого $v \in V$. В самом деле Пусть $u = Xv \neq 0$. Тогда для некоторого n

$$(H - \lambda - 2)^n u = (H - \lambda - 2)^n Xu = X(H - \lambda)^n v = 0$$

Мы воспользовались соотношением $HX = X(H+2)$. Взяв наименьшее такое n получим для $w = (H - \lambda - 2)^{n-1} u$, что $(H - \lambda - 2)w = 0$ - противоречие.

2) Докажем теперь, что

$$X^k Y^k v = k! H(H-1)\dots(H-k+1)v, \ v \in V^\lambda.$$

Индукция по k. если $k = 0$, то

$$XYv = ([XY] + YX)v = Hv$$

Если $k > 0$, то

$$X^k Y^k v = X^{k-1} XY^k v = X^{k-1}([XY^k] + Y^k X)v = X^{k-1}[XY^k]v =$$

$$X^{k-1} k Y^{k-1}(H - k + 1)v = k(k-1)! H \dots (H - k + 2)(H - k + 1)$$

и это доказано.

3) Покажем теперь, что для достаточно большого n, $Y^n = 0$ на подпро-странстве V^λ. В самом деле если $v \in V^\lambda$, то учитывая равенство $HY = (Y - 2)H$ получим

$$(H - \lambda + 2)^n Yv = Y(H - \lambda)^n v = 0$$

$$(H - \lambda + 4)^n Y^2 v = Y^2 (H - \lambda)^n v = 0$$

и так далее

$$(H - \lambda + 2k)^n Y^k v = Y^k (H - \lambda)^n v = 0$$

Так как пространство конечномерно, то для некоторого k, $Y^k v = 0$.

Закончим теперь доказательство теоремы. Выберем k такое, что $Y^k = 0$ на подпространстве V^λ. Тогда имеем уравнениye для H на этом подпро-странстве

$$H \dots (H - k + 2)(H - k + 1) = 0.$$

теорема следует из леммы. $\square$

Лемма 6.5. 1) *Оператор* $XY + YX + \frac{1}{2}H^2 = C$ *коммутирует с* X, H, Y.

2) *В неприводимом модуле со старшим весом* λ *он действует как скаляр* $\frac{1}{2}\lambda(\lambda+2)$.

Доказательство. 1) Проверяются соотношения

$$[C, X] = [XY, X] + [YX, X] + [H^2, X] = X(-H) - HX + HX + XH = 0$$

Для Y аналогично. Для H не надо, так как $H = [X, Y]$.

2) Применить оператор Казимира к старшему вектору.

$$XY + YX + \frac{1}{2}H^2 = C = \frac{1}{2}H^2 + H + 2YX$$

□

Теорема 6.6. *Любое представление* $\mathfrak{sl}(2)$ *полупросто.*

Доказательство. От противного. Пусть V неполупростое представление наименьшей размерности. Оператор казимира имеет только одно соб-ственное значение в нем. Так как V непростое, то оно содержит собствен-ное подпредставление U. По индукции U и фактор представление V/U являются суммой неприводимых изоморфных $L(n)$ для некоторого n. В самом деле если $L(n), L(m)$ неприводимые слагаемые U, то собственные значения оператора Казимира в них равны и потому $n = m$. Аналогично V/U.

Рассмотрим пространство обобщенных собственных векторов H веса n. По лемме

$$(V/U)^n = V^n/U^n$$

По предположению индукции модули V/U и U полупросты и следовательно эти модули порождаются своими старшими векторами, то есть векторами из $(V/U)^n$ и U^n. Следовательно модуль V порождается подпро-странством V^n. По теореме оператор H действует диагонально в V^n и следовательно это подпространство совпадает с множеством старших векторов. Следоветельно V порождается множеством старших векторов и потому полупросто. □

7. Модули Верма. Центр. Гомоморфизм Хариш-Чандры.

Чтобы описать образ, надо построить больший запас модулей.

Определение 7.1. *Модулем Верма со старшим весом* λ *называется бесконечномерный модуль* $M(\lambda)$ *с базисом* $e_0, e_1, \ldots$ *на котором операторы действуют по формулам*

$$He_i = (\lambda - 2i)e_i,\ Xe_i = i(\lambda - i + 1)e_{i-1},\ Ye_i = e_{i-1}, i = 0, 1, \ldots, n$$

В другой реализации действуют дифференциальные операторы

$$\varphi(X) = x\frac{\partial}{\partial y},\ \varphi(H) = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y},\ \varphi(Y) = y\frac{\partial}{\partial x}$$

на мономах

$$x^{\lambda},\ x^{\lambda-1}y,\ x^{\lambda-2}y^2\ldots$$

Лемма 7.2. *Если λ не является целым неотицательным числом, то $M(\lambda)$ неприводим. Если λ является целым неотрицательным, то $M(\lambda)$ содержит подмодуль изоморфный $M(-2-\lambda)$ и фактор модуль $M(\lambda)/M(-2-\lambda)$ неприводим конечномерен и изоморфен $L(\lambda)$.*

Доказательство. Имеем

$$Xe_{\lambda+1} = XY^{\lambda+1}e_0 = (\lambda+1)Y^{\lambda}(H-\lambda)e_0 = 0$$

То есть вектор $e_{\lambda+1}$ старший веса $\mu = -\lambda-2$. Обозначим его его f_0 и положим $f_i = Y^i f_0$. Тогда

$$Hf_i = (\mu - 2i)f_i,\ Yf_i = f_{i+1},$$

$$Xf_i = Xe_{\lambda+1+i} = (\lambda+1+i)(\lambda-\lambda-1-i+1)e_{\lambda+i} =$$

$$(-i)(-\mu-1+i) = i(\mu-i+1)f_i$$

Осталось доказать неприводимодсть. Пусть λ не является целым не-отрицательным. И пусть $N \subset M(\lambda)$. Докажем во первых, что N содержит какой либо вектор e_i. Пусть v ненулевой вектор из N. Тогда

$$v = \sum_i c_i e_i$$

и сумма содержит только конечное число слагаемых. Выберем вектор с наименьшим колинеством ненулевых слагаемых. Если количество слагаемых больше 1 то все доказано, если нет то рассмотрим вектор $Hv - c_j v$ где $c_j \neq 0$. Он также принадлежит N, но это противоречит минимальности слагаемых суммы. Следовательно число слагаемых равно 1 и сужествует $e_i \in N$. Далее применяя операторы X, Y получим $e_i \in N$ для любого i и $N = M$.

$\square$

Определение 7.3. *Центром ассоциативной алгебры A называется мно-жество элементов $Z(A)$ коммутирующих со всеми элементами из A.*

$$Z(A) = \{a \in A \mid ax = xa, x \in A\}$$

Мы хотим описать центр $U(\mathfrak{sl}(2))$. Для этого введем гомомрфизм Хариш-Чандры.

Лемма 7.4. *Множество элементов из $U(\mathfrak{sl}(2))$ коммутирующих с H является подалгеброй линейно порожденной элементами*

$$Y^i H^k X^i$$

Доказательство. Очевидно, что это подалгебра. Пусть

$$f = \sum_{i,j,k} c_{ijk} Y^i H^k X^j$$

разложение по базису. Из соотношений

$$[H, fg] = [H, f]g + f[H, g],\ [H, Y^i] = -2iY^i,\ [H, X^j] = 2jY^j$$

получаем

$$0 = [H, f] = \sum_{i,j,k} 2(j - i) c_{ijk} Y^i H^k X^j$$

Отсюда $j = i$. □

Обозначим предыдущую подалгебру как $U(\mathfrak{sl}(2))_0$ и рассмотрим линейное отображение

$$\varphi : U(\mathfrak{sl}(2))_0 \longrightarrow \mathbb{C}[H]$$

определяемое по правилу

$$\varphi(Y^i H^k X^i) = \begin{cases} 0,\ i > 0 \\ H^k,\ i = 0 \end{cases}$$

Ограничение этого отображения на центр универсальной обертывающей алгебры называется гомоморфизмом Хариш-Чандры. Это действительно гомоморфизм как показывается ниже.

Лемма 7.5. *Пусть z элемент центра обертывающей алгебры, тогда он действует как скаляр в модуле $M(\lambda)$ и определяет гомоморфизм $z(\lambda)$ центра в полекомплексных чисел. Функция $z(\lambda)$ является полиномом от λ равным $\varphi(z)(\lambda)$. Отображение φ является гомомрфизмом центра в алгебру $\mathbb{C}[H]$.*

Доказательство. Имеем

$$Hze_0 = zHe_0 = \lambda ze_0$$

Следовательно $ze_0 = ce_0$. Далее

$$ze_{=}zY^ie_0 = Y^i ze_0 = ce_i$$

Положим $z(\lambda) = c$. Тем самым мы можем рассматривать элемент z как функцию от комплексного числа. Докажем, что это полином. Запишем z в виде

$$z = \sum_i Y^i \varphi_i(H) X^i$$

тогда

$$ze_0 = f_0(H)e_0 = f_0(\lambda)e_0$$

Докажем утверждение о гомоморфизме. Имеем

$$\varphi(z_1z_2)(\lambda)e_0 = (z_1z_2)e_0 = (z_1\varphi(z_2)(\lambda)e_0 = \varphi(z_1)(\lambda)\varphi(z_2)(\lambda)e_0$$

□

Теорема 7.6. *Гомоморфизм Хариш-Чандры задает изоморфизм центра обертывающей алгебры и алгебры полиномов от H обладающих свой-ством*

$$f(-H-2) = f(H)$$

Доказательство. Докажем инъективность. Если $\varphi(z) = 0$, то это означает, что z действует нулем в каждом модуле Верма и следовательно в каждом конечномерном модуле. Следовательно он равен нулю.

Докажем, что многочлен из образа обладает нужным свой-ством. Мы знаем, что в модуле $M(\lambda)$ элемент из центра z действует как $\varphi(z)(\lambda)$. Но модуль $M(\lambda)$ содержит $M(-2-\lambda)$ как подмодуль. Следовательно

$$\varphi(z)(\lambda) = \varphi(z)(-\lambda-2)$$

Докажем теперь, что любой полином с таким свойством является образом некоторого элемента из центра. Пусть $f(-H-2) = f(H)$. Положим $g(H) = f(-1+H)$. Тогда

$$g(-H) = f(-1-H) = f(-2-(-1+H)) = f(-1+H) = g(H)$$

Поэтому g является многочленом от H^2 а следовательно f является многочленом от $(H+1)^2$. Поэтому достаточно показать, что $(H+1)^2$ является образом элемента из центра. Но

$$\varphi(2C) = 2\varphi(XY+YX+\frac{1}{2}H^2) = 2\varphi(\frac{1}{2}(H+1)^2-\frac{1}{2}+2YX) = (H+1)^2$$

□

8. Тензорное произведение представлений.

Определение 8.1. *Тензорным произведением векторных пространств U и V называется векторное пространство W вместе с билинейным отображением,*

$$U \times V \longrightarrow W$$

таким, что если u_i, v_j базисы в пространствах U и V, то образы (u_i, v_j) являются базисом в пространстве W. Обозначается $U \otimes V$. Имеем естественное линейное отображение Образ пары (u, v) при этом отображении обозначается через $u \otimes v$.

Из определения следует, что в $U \otimes V$ выполнены соотношения

$$(u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v,\ u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2,$$

$$(\lambda u) \otimes v = \lambda(u \otimes v),\ u \otimes (\lambda v) = \lambda(u \otimes v)$$

Лемма 8.2. *Предположим, что U, V - представления алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, тогда $U \otimes V$ также является представлением, если положить*

$$x(u \otimes v) = xu \otimes v + u \otimes xv$$

для любого $x \in \mathfrak{sl}(2)$.

Доказательство. Во первых надо проверить, что эти отображения корректно определены как линейные отображения. Пусть $x \in \mathfrak{sl}(2)$. Определим на базисе в W

$$x(u_i \otimes v_j) = xu_i \otimes v_j + u_i \otimes xv_j$$

Покажем теперь, что

$$x(u \otimes v) = xu \otimes v + u \otimes xv$$

для любых $u, v \in W$. Но это сразу следует из билинейности тензорного произведения. Теперь докажем, что это представление. Имеем

$$xy(u \otimes v) - yx(u \otimes v) = x(yu \otimes v + u \otimes yv) - y(xu \otimes v + u \otimes xv) =$$

$$(xy - yx)u \otimes v + u \otimes (xy - yx)v = [x, y]u \otimes v + u \otimes [x, y]v = [x, y](u \otimes v)$$

□

Лемма 8.3. *Имеют место изоморфизмы векторных пространств и $\mathfrak{sl}(2)$ модулей*

$$V \otimes U = U \otimes V, \quad (V \otimes U) \otimes W = V \otimes (U \otimes W),$$

$$V \otimes (U \oplus W) = U \otimes V \oplus U \otimes W$$

Доказательство. Докажем, что $V \otimes U = U \otimes V$. Для этого выберем базисы в обоих пространствах, получим базис в обоих тензорных произведениях и определим изоморфизм на базисах по правилу

$$v_i \otimes u_j \longrightarrow u_j \otimes v_i$$

затем проверяется, что это изоморфизм $\mathfrak{sl}(2)$ модулей. Остальные аналогично. □

Замечание 8.4. *Единственность разложения на простые модули.*

Теорема 8.5. *Пусть V конечномерное представление алгебры $\mathfrak{sl}(2)$. Тогда*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} L(n_i)$$

и набор чисел $(n_1, \ldots, n_k,)$ определен однозначно, с точностью до перестановки.

Доказательство. Так как каждый неприводимый модуль имеет единственный вектор старшего веса, то набор чисел $(n_1, \ldots, n_k,)$ совпадает, с набором собственных значений оператора H в подпространстве

$$V^X = \{v \in V \mid Xv = 0\}$$

которое инвариантно относительно H. $\square$

Каков набор чисел для тензорного произведения?

Теорема 8.6. *Имеет место равенство*

$$L(n) \otimes L(m) = \bigoplus_{i=1}^{\min(m,n)} L(m+n-2i)$$

Доказательство. Пусть $n \leq m$. Сначала выделим подпространства на которых H действует как скаляр

$$V_0 =< e_0 \otimes f_0 >,\ V_1 =< e_0 \otimes f_1,\, e_1 \otimes f_0 >,\ V_1 =< e_0 \otimes f_2,\, e_1 \otimes f_1,\, e_2 \otimes f_0 >,$$

то есть V_k - это линейная оболочка векторов $e_i \otimes f_j$ таких, что $i + j = k$. Можно считать k неотрицательным. Покажем, что если $k > n$, то $V_k^X = 0$. Пусть

$$v = \sum_{i=0}^{n} a_i e_i \otimes f_{k-i} \in V_k^X$$

тогда

$$0 = Xv = \sum_{i=0}^{n} a_i \left[i(n-i+1) e_{i-1} \otimes f_{k-i} + (k-i)(m-k+i+1) e_i \otimes f_{k-i-1} \right]$$

Последний член в разложении v, это $e_n \otimes f_{k-n}$. Из предыдущего равенства следует, что $a_n = 0$. Из оставшихся уравнений следует, что остальные $a_i = 0$. Пусть теперь $k \leq n$. Тогда предыдущая система имеет единственное с точностью до ненулевой константы решение. Теорема доказана. $\square$

9. Алгебра представлений

Пусть M множество всех конечномерных представлений с точностью до изоморфизма.

Определение 9.1. *Алгеброй конечномерных представлений алгебры Ли $sl(2)$ называется алгебра порожденная элементами множества M с соотношениями*

$$[V \oplus U] = [V] + [U], \quad [V \otimes U] = [V][U]$$

Определение 9.2. *Пусть V представление, разложим его на собственные подпространства относительно H*

$$V = \oplus_\lambda V^\lambda.$$

Тогда функция

$$ch(V)(t) = \sum_\lambda \dim V^\lambda e^{\lambda t}$$

называется характером представления V.

Теорема 9.3. *Отображение ch индуцирует изоморфизм алгебры представлений и подалгебры в алгебре полиномов Лорана $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ инвариантных относительно преобразования $x \to x^{-1}$.*

Доказательство. □

Так как любой конечномерный модуль является суммой простых, то значения характера принадлежат линейной оболочке экспонент с целыми показателями. Или если обозначить $e^t = x$ образ характера лежит в алгебре Лорановских полиномов $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Далее, так как

$$ch(U \oplus V) = ch(U) + ch(V), \quad ch(U \otimes V) = ch(U)ch(V)$$

то отображение ch является гомоморфизмом.
Далее, очевидно алгебра представлений является линейной оболочкой характеров неприводимых представлений. Из линейной независимости экспонент с различными показателями, следует что гомомрфизм иньективен. Из явной формулы дле характера простого модуля следует, что образ лежит в алгебре полиномов инвариантных относительно преобразования $\sigma(x) = x^{-1}$. Обратно, если полином инвариантен относительно такого преобразования, то он является полиномом от $x+x^{-1}$. Но это характер естественного представления. Это доказывает сюрьективность.

Следствие 9.4. *Определим действие центрального элемента на кольце представлений, как дигонального оператора который на неприводимом представлении действует как умножение на соответствующую константу. Тогда при предыдущем изоморфизме центр переходит в алгебру порожденную дифференциальным оператором*

$$\mathcal{L}_2 = \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{x + x^{-1}}{x - x^{-1}}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}\frac{\partial}{\partial t}$$

Доказательство. Достаточно показать, что характер неприводимого модуля со старшим весом n является собственной функцией этого оператора с собственным значением $n(n+2)$. Имеем

$$\mathcal{L}_2 ch(L(n)) = \mathcal{L}_2(\sum_{i=0}^{n} e^{(n-2i)t}) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{L}_2 e^{(n-2i)t}$$

но

$$(e^t - e^{-t})\mathcal{L}_2 e^{(n-2i)t} = (n-2i)^2(e^t - e^{-t})e^{(n-2i)t} + 2(e^t + e^{-t})(n-2i)e^{(n-2i)t}$$
$$= (n-2i)(n-2i+2)e^{(n-2i+1)t} - (n-2i)(n-2i-2)e^{(n-2i-1)t}$$

суммируя по i получим нужный результат. □

10. Вопросы к экзамену

1. Определение алгебры Ли. Примеры.Структурные константы.

2. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Различные реализации.

3. Представление и модуль над алгеброй Ли их эквивалентность.

4. Гомоморфизм представлений. Неприводимые и неразложимые представления.

5. Описание всех конечномерных неприводимых предстдавлений $\mathfrak{sl}(2)$.

6. Асоoциативные алгебры и их представления. Свободная алгебра. Задание алгебр образующими и соотношениями.

7. Прямое и тензорное произведние алгебр.

8. Теорема Пуанкарэ-Биркгофа-Витта.

9. Полупростые представления. Критерий полупростоты конечномерного представления.

10. Разложение конечномерного пространства на обобщенные собственные подпространства.

11. Диагонализируемость подалгебры Картана в обобщенном собственном подпространстве.

12. Оператор Казимира второго порядка. Его действие в неприводимых модулях.

13. Неприводимость конечномерного неразложимого представления $\mathfrak{sl}(2)$.

14. Модули Верма их неприводимость.

15. Гомоморфизм Хариш-Чандры.

16. Тензорное произведение представлений.

17. Разложение тензорного произведения конечномерных представлений.

18. Алгебра конечномерных представлений.

19. Действие оператора Казимира на алгебре конечномерных представлений.

Список литературы

[1] Серр Ж.П. Группы и алгебры Ли. М. Мир, : 1969.
[2] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М. : МЦНМО, 2003.
[3] Винберг Э. Курс Алгебры. М. : МЦНМО, 2011.
[4] Etingof P. Introduction to Representation Theory. (Student Mathematical Library 59). AMS. : 2011.