ФГБОУ ВПО "Саратовский Государственный университет имени Н.Г. Чернышевского"

КВАНТОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

Учебное пособие

А.Н. Сергеев

Саратов
2014

Содержание

1. Предисловие

Квантовые интегрируемые системы Калоджеро - Мозера - Сазерленда (КМС) впервые появились в работах Ф. Калоджеро в 1971 году. Несмотря на то то, что с первого взгляда эта работа выглядела как некоторый изолированны результат, в последствии оказалось, что она послужила началом многочисленных приложений и обобщений в математической физике, геометрии, алгебре и теории представлений. Калоджеро рассмотрел рациональный потенциал для системы корней типа A_n. Сазерланд обобщий результаты Калоджеро на случай тригонометрического потенциала. Интегрируемость этих систем была доказана в работах Секигучи. Обобщение на любую систему корней полупростой алгебры Ли было дано в работах Ольшанецкого и Переломова в 1978 году. Общий метод доказательства интегрируемости был предложен в середине 1980 годов на основе операторов введенных Ч. Данклом.

Данный курс лекций посвящен теории квантовых интегрируемых систем на основе простейшего примера рациональной квантовой задачи Калоджеро - Мозера - Сазерленда типа A_n. Вначале излагаются необходимые сведения для работы с алгебрами заданными образующими и соотношениями. Затем это применяется в случае рациональной квантовой задачи КМС для доказательства основной теоремы о гомоморфизме Хариш Чандры. Приводятся два основных метода построения интегралов : метод пар Лакса и операторы Данкла.

2. Ассоциативные алгебры

Определение 2.1. *Ассоциативная алгебра над полем* $\mathbb{C}$, *это векторное пространство над полем* $\mathbb{C}$ *вместе с умножением* $A \times A \to A$ *таким, что*

$$(ab)c = a(bc)$$
$$1a = a1 = a$$
$$a(b+c) = ab + ac$$
$$(a+b)c = ab + bc$$
$$\lambda(ab) = a(\lambda b) = (\lambda a)b$$

где 1 *обозначает выделенный элемент называемый единицей. То есть мы всегда рассматриваем алгебры с единицей.*

Пример 2.2. *Алгебра матриц.*

Пример 2.3. *Алгебра линейных преобразований векторного пространства.*

Пример 2.4. *Алгебра многочленов.*

Пример 2.5. *Алгебра некоммутативных многочленов. Пусть* $X_1, \dots X_n$ *различные символы. Рассмотрим бесконечномерное векторное пространство базисом которого являются всевозможные слова*

$$X_{i_1}, \dots X_{i_k}$$

где $k = 0, 1, \dots$ *а индексы* $i_1, \dots, i_k$ *принимают произвольные значения из множества* $\{1, 2, \dots, n\}$. *Определим умножение приписыванием од-ного слова к другому. Легко проверить, что тем самым получается алгебра. Она называется свободной некоммутативной алгеброй. Обоз-начается*

$$\mathbb{C} < X_1, \dots X_n >$$

Размерность ее однородной компоненты степени k *равна* n^k.

Пример 2.6. *Задание алгебры таблицей умножения.*

Определение 2.7. *Подалгеброй ассоциативной алгебры называется ее подпространство которое содержит единицу и замкнуто относитель-но умножения.*

Мы в основном будем рассматривать бесконечномерные алгебры. Поэ-тому нужны способы их задания.

Определение 2.8. *Пусть* A *ассоциативная алгебра и* S *некоторое ее подмножество. Подалгеброй порожденной множеством* S *называется наименьшая подалгебра содержащая множество* S.

Лемма 2.9. *Алгебра порожденная множеством S совпадает с мно-жеством линейных комбинаций всевозможных конечных произведений элементов из S. Рассмотреть случай одного и двух элементов.*

Определение 2.10. *Гомоморфизмом $\varphi : A \to B$ алгебр называется такое линейное отображение векторных пространств, что оно сохра-няет операцию умножения в алгебре и отображает единицу в единицу. $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, $\varphi(1) = 1$.*

Легче всего описывать гомоморфизмы свободной алгебры.

Теорема 2.11. *Пусть $a_1, \dots, a_n$ любой набор элементов из ассоциативной алгебры A. Тогда существует и единственный гомоморфизм*

$$\varphi : \mathbb{C} < X_1, \dots X_n > \longrightarrow A$$

такой, что

$$\varphi(X_1) = a_1, \dots, \varphi(X_n) = a_n$$

Доказательство. Единдственность очевидна. Существование. Положим

$$\varphi(X_1X_2X_2X_1) = a_1a_2a_2a_1$$

и также для любого слова. Тогда например

$$\varphi(X_1X_2X_2X_1) = \varphi(X_1X_2)\varphi(X_2X_1)$$

и то же самое в общем случае. □

Определение 2.12. *Алгебра A называется коммутативной, если для любых ее двух элементов выполнено $ab = ba$*

Легко также описывать гомоморфизмы алгебры коммутативных много-членов в коммутативные алгебры.

Теорема 2.13. *Пусть $a_1, \dots, a_n$ любой набор элементов из ассоциативной коммутативной алгебры A. Тогда существует и единственный гомоморфизм*

$$\varphi : \mathbb{C}[X_1, \dots X_n] \longrightarrow A$$

такой, что

$$\varphi(X_1) = a_1, \dots, \varphi(X_n) = a_n$$

Определение 2.14. *Центром ассоциативной алгебры A называется мно-жество*

$$Z(A) = \{z \in A \mid za = az, a \in A\}$$

Определение 2.15. *Централизатором элемента называется множество элементов которые с ним коммутируют. Централизатор является подалгеброй.*

Пример 2.16. *Централизаторы элементов в матричной алгебре. Например*

$$A = diag(1, k, k^2, \dots, k^{n-1})$$

Вычислить при разных k.

Определение 2.17. *Левым идеалом в алгебре A называется подпростарнство I такое, что*

$$aI \subset A.$$

аналогично определяется правый идеал. Правым идеалом в алгебре A называется подпростарнство I такое, что

$$Ia \subset A.$$

Двусторонним идеалом в алгебре A называется подпростарнство I такое, что

$$aI \subset A, \quad Ia \subset A.$$

Лемма 2.18. *Пусть I двусторонний идеалв алгебре A В этом случае на фактор пространстве можно определить структуру алгебры. Которая обозначается A/I и называется фактор алгеброй алгебры A по идеалу I.*

Доказательство. Напомним определение фактор пространства. Введем отношение эквивалентности на A. Именно $a \sim b$ если и только если $a - b \in I$. Элементы лежащие в классе эквивалентности называются его представителями. Если a - некоторый элемент, то $\bar{a}$ обозначает его класс эквивалентности. Определим сложение и умножение на A/I по правилам

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \overline{a}\overline{b} = \overline{ab},\ \lambda\overline{a} = \overline{\lambda a}$$

Нужно проверить корректность определения и аксиомы. Проверим умно-жение. Надо проверить, что

$$ab - a_1 b_1 \in I,\ a - a_1 \in I, b - b_1 \in I$$

Имеем

$$ab - a_1 b_1 = a(b - b_1) + (a - a_1) b_1 \in I$$

Аксиомы проверять не надо, так как они верны для представителей.

□

Лемма 2.19. *Ядро гомоморфизма является идеалом. Пусть $\varphi : A \to B$ сюръективный гомоморфизм алгебр, тогда он индуцирует каноноческий изомоморфизм A/I и B, где $I = Ker\varphi$.*

Определение 2.20. *Пусть S подмножедтво в алгебре A. Наименьший двусторонний идеал содержащий это множество называется идеалом порожденным множеством S.*

Лемма 2.21. *Идеал порожденный множеством S совпадает с линейной оболочкой элементов вида asb где $a, b \in A$, $s \in S$.*

Пример 2.22. *Алгебры порожденные образующими.*

Определение 2.23. *Пусть $A = \mathbb{C} < x_1, \dots, x_n >$ свободная ассоциативная алгебра и $S = \{f_1, \dots, f_N\}$ конечный набор элементов из A. Тогда фактор алгебра по идеалы порожденному множеством S называется алгеброй порожденной множеством образующих $x_1, \dots, x_n$ и соотноше-ниями, $f_1 = 0, \dots, f_N = 0$.*

Важность этого определения проявляется в том, что можно явно строить гомоморфизмы таких алгебр в другие алгебры.

Лемма 2.24. *Пусть алгебра A задана образующими и соотношениями. Тогда множество ее гомоморфизмов в алгебру B находится в биекции с наборами элементов $(b_1, \dots, b_n \in B)$ которые удовлетворяют уравнениям*

$$f_1(b_1, \dots, b_n) = 0, \ \dots \ f_N(b_1, \dots, b_n) = 0$$

Это позволяет также описывать сами алгебры.

Пример 2.25. *Рассмотрим простейший случай, когда образующая одна. Тогда имеем одно уравнение*

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

У на поле комплексное. Его можно разложить на множители. Более конкретный пример

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Нужно взять диагональную матрицу $(1, 2)$. Если уравнение $x^2 = 0$ то можно взять матрицу как ниже.

Пример 2.26. *Образующие и соотношения.*

$$x^2 = 0, \, y^2 = 0, \ xy + yx = 1$$

Пусть A это алгебра так задаваемая. По предыдушей лемме существует гомоморфизм этой алгебры в алгебры матриц второго

$$x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ y \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

так как эти матрицы удовлетворяют нужному соотношению. Далее подалгебра порожденная этими матрицами совпадает со всей алгеброй матриц и следовательно имеет размерность 4. Алгебра A является линейной оболочкой элементов x, y, xy, yx, образы которых линейно не-зависимы. Следовательно это изоморфизм.

Пример 2.27. *Образующие и соотношения.*

$$x^2 = 1,\, y^2 = 1,\; xy + yx = 0$$

Пусть B это алгебра так задаваемая. Доказать, что она изоморфна алгебре из предыдущего пеимера.

Пример 2.28. *Образующие и соотношения.*

$$x^2 = 0,\, y^2 = 0,\; xy + yx = 0$$

Пусть A это алгебра так задаваемая. Можно найти матрицы, но можно поступить по другому. То есть задать алгебру явно умножением на базисных элементах и проверить, что это ассоциативная алгебра с единицей.

$$V =< e_0,\, e_1,\, e_2\, e_3 >,\; e_0e_i = e_ie_0 = e_i,\; e_1e_2 = e_3,\;\; e_1e_3 = 0$$

$$e_2e_1 = -e_3,\, e_2e_3 = 0,\, e_3e_1 = e_3e_2 = e_3e_3 = 0$$

Проверяется, что на базисных элементах умножение ассоциативно. Поэтому это алгебра размерности 4. И существует гомоморфизм

$$x \to e_1,\, y \to e_2$$

Другой, более каноноческий способ. Реализовать в этом базисе, матрицы (или операторы) левого умножения на образующие. Затем проверить, что полученные матрицы (операторы) удовлетворяют требуемым соот-ношениям. Отсюда вывести, что образы векторов в факторе линейно независимы.

3. Алгебры дифференциальных операторов

Определение 3.1. *Пусть A коммутативная ассоциативная алгебра. Определим по индукции дифференциальный оператор порядка $\leq r$.*

1) *дифференциальный оператор порядка 0 это оператор умножения на элемент алгебры A*

2 *дифференциальный оператор имеет порядок $\leq r + 1$ если его ком-мутатор с оператором умножения на элемент кольца A имеет порядок $\leq r$.*

или

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_0 = \{M_a \mid a \in A\} \\
\mathcal{D}_1 = \{D \mid [D, M_a] \in \mathcal{D}_0\} \\
\mathcal{D}_2 = \{D \mid [D, M_a] \in \mathcal{D}_1\} \\
\dots \\
\mathcal{D}_r = \{D \mid [D, M_a] \in \mathcal{D}_{r-1}\}
\end{gathered}$$

Лемма 3.2. 1) *Если $r \leq s$ то верно включение*

$$\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}_{r+s}$$

2) *Дифференциальные операторы образуют алгебру.*

$$\mathcal{D}_r \mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_{r+s}$$

Доказательство. 1) Достаточно доказать включение

$$\mathcal{D}_r \subset \mathcal{D}_{r+1}$$

Индукция по r. Если $r = 0$, то $[M_a, M_b] = M_0 \in \mathcal{D}_0$, следовательно $M_a \in \mathcal{D}_1$. Далее если $D \in \mathcal{D}_r$, то по определению $[D, M_a] \in \mathcal{D}_{r-1}$. По индукции $\mathcal{D}_{r-1} \subset \mathcal{D}_r$.

2) Индукция по $r + s$. Если $r = s = 0$, то $M_a M_b = M_{ab}$. Имеем

$$[D_1 D_2, M_a] = [D_1, M_a] D_2 + D_1 [D_2, M_a]$$

и по индукции принадлежит $\mathcal{D}_{r+s-1}$ □

Определение 3.3. *Пусть A любая алгебра. Линейное отображение $\partial : A \to A$ называется дифференцированием если оно удовлетворяет правилу Лейбница*

$$\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$$

Предложение 3.4. *Дифференциальный оператор первого порядка это сумма оператора умножения на функцию и дифференцирования.*

Доказательство. Докажем вначале, что дифференциальный оператор D первого порядка дифференцирование тогда и только тогда, когда $D(1) = 0$. в одну сторону очевидно. В другую, пусть $[D, M_a] = M_c$. тогда

$$D(ab) - aD(b) = cb$$

подставляя в это равенство $b = 1$ получим, что $c = D(a)$, это и означает, что D -дифференцирование. Если D- произвольный оператор первого порядка, то вичитая из него оператор умножения на $D(1)$ получим нужное утверждение. □

Определение 3.5. *Пусть R коммутативная алгебра и D некоторое множество ее дифференцирований. Обозначим через $A(R, D)$ подалгебру в алгебре линейных преобразований алгебры R порожденную множеством D и операторами умножения на элементы алгебры R.*

Пример 3.6. *Алгебра Вейля. Это подалгебра в алгебре дифференциальных операторов над кольцом многочленов, порожденная операторами умножения на переменные и стандартными дифференцированиями. Можно показать, что она совпадает с алгеброй всех дифференциальных операторов.*

Лемма 3.7. *Алгебра Вейля задается образующими*

$$p_1, \dots, p_n,\ q_1, \dots, q_n$$

и соотношениями

$$p_i p_j = p_j p_i,\ q_i q_j = q_i q_j,\ p_i q_j - q_j p_i = \delta_{ij}$$

Доказательство. Пользуясь коммутационными соотношениями можно показать, что любой элемент алгебры Вейля записывается в виде

$$f = \sum_I P_I(p_1, \dots, p_n) q^I$$

где $I = (i_1, \dots, i_n)$. Так как $x_i, \frac{\partial}{\partial x_j}$ удовлетворяют тем же соотношениям, то существует гомоморфизм

$$p_i \to x_i,\ q_j \to \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Тогда

$$f \to \sum_I P_I(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^I}{\partial x_I}$$

Покажем, что гомоморфизм инъективен. Пусть I наименьшее в смысле лексикографического порядка множество в сумме с ненулевым коэффициентом. Применим оператор к x^I. Тогда получим, что

$$f(x^I) = I! P_I = 0$$

Следовательно $P_I = 0$. Противоречие. □

Таким образом любой оператор единственным образом записывается в виде суммы.

Пример 3.8. *Алгебра задачи КМС. Рассмотрим рациональные функции со знаменателями $x_i - x_j$. Обозначим эту алгебру B_n.*

рассмотрим в алгебре дифференциальных операторов подалгебру порожденную опера-торами умножения на $\frac{1}{x_i - x_j}$ *и* $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Лемма 3.9. *Любой оператор единственным образом записывается в виде суммы*

$$\sum_I b_I \frac{\partial^I}{\partial x_I}$$

где $b_I \in B_n$.

Доказательство. Как предыдущее. □

Лемма 3.10. *Подалгебра* B_n *в алгебре рациональных функций* $\mathbb{C}(x_1, \ldots, x_n)$ *порожденная функциями* $\frac{1}{x_i - x_j}$, $1 \le i \ne j \le n$ *изоморфна алгебре* C_n *порожденной образующими и соотношениями*

$$f_{ij} + f_{ji} = 0,$$
$$f_{ij} + f_{ji} = 0, \;\; f_{ij} f_{il} + f_{ji} f_{jl} + f_{li} f_{lj} = 0, \;\; i < j < l$$

Доказательство. Докажем, что гомоморфизм иньективен. Если $n = 2$ то утверждение очевидно. Пусть $n > 2$. С помощью соотношений $f_{1i} f_{1j} = f_{1i} f_{ij} - f_{1j} f_{ij}$ запишем произвольный элемент алгебры C_n в виде

$$F = G + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} f_{1i}^j F_{ij}$$

где G, F_{ij} зависят только от f_{ij}, $i, j > 1$. Пусть

$$\varphi : C_n \to B_n, \;\; \varphi(f_{ij}) = \frac{1}{x_i - x_j}$$

Предположим, что $\varphi(F) = 0$. Тогда

$$0 = \varphi(G) + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1}{(x_1 - x_i)^j} \varphi(F_{ij})$$

Из единнственности разложения на простейшие дроби, следует, что $\varphi(G) = \varphi(F_{ij}) = 0$. По индукции $G = F_{ij} = 0$. Следовательно $F = 0$.

На самом деле легко показать, что элементы

$$f_{(i)}^{(j)} = f_{1i_1}^{j_1} f_{2i_2}^{j_2} \ldots f_{n-1 i_{n-1}}^{j_{n-1}}, \;\; 1 < i_1, \, 2 < i_2, \ldots, \, n-1 < i_{n-1}$$

где последовательность (i) удовлетворяет $1 < i_1$, $2 < i_2, \ldots, n-1 < i_{n-1}$, а последовательность $(j) = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-1})$ является произвольной последовательностью неотрицательных целых являются базисом в C_n. □

Теорема 3.11. *Алгебра КМС может быть задана образующими и соот-ношениями*

$$f_{ij} + f_{ji} = 0,$$
$$f_{ij} + f_{ji} = 0, \;\; f_{ij}f_{il} + f_{ji}f_{jl} + f_{li}f_{lj} = 0, \;\; i < j < l$$
$$\partial_l f_{ij} - f_{ij}\partial_l = (\delta_{li} - \delta_{lj})f_{ij}^2$$

Лемма 3.12. *Существует гомоморфизм алгебры B_n в поле комплексных чисел, такой, что*

$$f_{ij} \to 0$$

4. Рациональный оператор КМС типа A_n. Гомоморфизм Хариш-Чандры

Основная цель нескольких следующих лекций доказать интегрируемость одного конкретного оператора.

Определение 4.1. *Рациональным оператором Калоджеро-Мозера-Сазерленда типа A_n называется дифференциальный оператор вида*

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i<j} \frac{2k(k+1)}{(x_i - x_j)^2}$$

где k - комплексный параметр.

Пример 4.2.

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Показать, что этот опрератор коммутирует с L_2.

Этот оператор принадлежит алгебре алгебре $\mathfrak{A}_n$.

Определение 4.3. *Обозначим через $Z_n(\mathcal{L}_2)$ централизатор в алгебре $\mathfrak{A}_n$ оператора $\mathcal{L}_2$.*

Определение 4.4. *Гомоморфизмом Хариш - Чандры называется гомоморфизм*

$$\varphi : \mathfrak{A}_n \longrightarrow \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$$

такой, что $\varphi(f_{ij}) = 0$, $1 \leq i, j \leq n$.

Теорема 4.5. *Для общего значения параметра k ограничение гомоморфизма Хариш-Чандры на централизатор L_2 инъективено, а его образ содержится в алгебре инвариантов относительно симметрической группы.*

Доказательство. Докажем вначале иньективность индукцией по n. Пусть $n = 2$. запишем оператор в виде

$$D = \sum_{i,j} P_{ij}(f_{12})\partial_1^i\partial_2^j, \quad L_2 = \Delta + \alpha f_{12}^2$$

Надо показать, что если $[D, L_2] = 0$ и $\varphi(D) = 0$ то $D = 0$. От противного. Выберем старший ненулевой член в лексикографическом порядке $P_{i_0j_0}$. Имеем

$$[D, L_2] = \sum_{i,j}[P_{ij}, \Delta]\partial_1^i\partial_2^j + \sum_{i,j} P_{ij}[\partial_1^i\partial_2^j, f_{12}^2]$$

Утверждается, что старшим в лексикографическом порядке слагаемым этой суммы является $\partial_1^{i_0+1}\partial_2^{j_0}$ с коэффициентом $-2\partial_1 P_{i_0j_0}$. В самом деле, во второй сумме все мономы лексикографически меньшеи кроме того

$$[P, \Delta] = -2\partial_1(P)\partial_1 - 2\partial_2(P)\partial_2 - \Delta(P)$$

Следовательно условие коммутативности влечет $\partial_1 P_{i_0j_0} = 0$ и следовательно $P_{i_0j_0} = c$ то есть константа. Далее $\varphi(P_{i_0j_0}) = 0$. Следоватетельно $c = 0$. Противоречие.

Пусть теперь $n > 2$. Пусть $\partial_1^{l_1}\ldots,\partial_n^{l_n})$ максимальный в лексикографическом порядке моном с ненулевым коэффициентом. Аналогичные рассуждения как выше показывают, что

$$\partial_1(P_{l_1,\ldots,l_n}) = 0$$

Рассмотрим теперь гомоморфизм

$$\psi : \mathfrak{A}_n \longrightarrow \mathfrak{A}_{n-1}[\partial_1], \ \psi(f_{1i}) = 0, i = 2, \ldots, n, \ \psi(f_{ij}) = f_{ij}, \ i, j > 1$$

и $\psi(\partial_i) = \partial_i$, $i = 1, \ldots, n$. Капишем каждый коэффициент в виде

$$P_{i_1,\ldots,i_n} = Q_{i_1,\ldots,i_n} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} f_{1i}^j R_{i,j,i_1,\ldots,i_n}$$

где многочлены в правой части не зависят от f_1i, $i = 2, \ldots, n$. Образ D коммутирует с образом L_2 и по индукции равен нулю. Следовательно все $Q_{i_1,\ldots,i_n} = 0$. В частности

$$P_{l_1,\ldots,l_n} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} f_{1i}^j R_{i,j,i_1,\ldots,i_n}$$

Дифференцируя это равенство по x_1 получим

$$\partial_1(P_{l_1,\ldots,l_n}) = -\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{m_i} f_{1i}^{j+1} R_{i,j,i_1,\ldots,i_n} = 0$$

Из единственности разложения на простейшие дроби следует, что все коэффициенты равны нулю, то есть $P_{l_1,\dots,l_n} = 0$. Противоречие. Следовательно для общего значения параметра централизатор коммутативеный.

Для доказательства второго утверждения нужно болле внимательно исследовать условия коммутативности для $n = 2$. Во первых можно считать что все зависит только от $\partial = \partial_1 - \partial_2$ и рассмотрим оператор в радиальной ворме (в такой форме получаются более простые уравнения)

$$\mathcal{L}_2 = \partial^2 - 2kz\partial, \quad z = -\frac{2}{x_1 - x_2},\ \partial(z) = z^2$$

Запишем произвольный оператор в виде

$$D = \sum_{n\geq 0} \frac{P_n(z)}{n!}\partial^n$$

Имеем

$$[\partial^2, P] = 2\partial(P)\partial + \partial^2(P),\ [z, \partial^n] = -\sum_{i\geq 1} \frac{n!}{(n-i)!} z^{i+1}\partial^{n-i}$$

Коэффициент при ∂^n в коммутаторе $[\mathcal{L}_2, D]$ равен

$$\frac{1}{n!}\partial^2(P_n) - \frac{2k}{n!}z\partial(P_n) + \frac{2}{(n-1)!}\partial(P_n) + \frac{2k}{(n-1)!}\sum_{i\geq 0} z^{i+2}P_{n+i}$$

Отсюда получаем систему уравнений

$$\partial^2(P_n) + 2n\partial(P_{n-1}) - 2kz\partial(P_n) + 2kn\sum_{i\geq 0} z^{i+2}P_{n+1} = 0$$

$i = 0, 1, 2\dots$. И нужно учесть, что начиная с некоторого номера N все $P_N = 0$. Из этих уравнений легко следует, что степень многочлена P_n не превосходит $N - n$. Следовательно

$$P_n = c_{N-n}z^{N-n} + \dots$$

и несложно написать уравнения на c_i

$$2(N-i)(i+1)c_{i+1} + i(i+1)c_i - 2kc_i + 2k(N-i)(c_0 + \dots + c_i) = 0$$

$i = 0, 1, \dots, N$. Докажем, что если N является нечетным, а k не является алгебраическим, то эта система имеет только тривиальное решение. Для этого введем новые переменные $x_i = c_0 + \dots + c_i$ докажем, то же самое утверждение для них. В терминах новых переменных система имеет вид

$$2(N-i)(i+1)x_{i+1} + [i(i+1-2k) + (N-i)(2k-2i-2)]x_i - i(i+1-2k)x_{i-1} = 0$$

$i = 0, 1, \ldots, N$. Обозначим через Δ_i, $i = 0, 1, \ldots, N$ последовательные главные миноры матрицы этой системы и напишем для них рекуррентную формулу. Легко видеть, что эта формула имеет вид

$$\Delta_i = b_i \Delta_{i-1} - a_i c_{i-1} \Delta_{i-2},\ i = 0, 1 \ldots, N,\ \ \Delta_0 = b_0,\ \Delta_1 = b_1 b_0 - a_1 c_0$$

где

$$a_i = i(2k-i-1),\ \ b_i = i(i+1-2k) + (N-i)(2k-2i-2),\ \ c_i = 2(N-i)(i+1)$$

Из этих формул легко показать, что

$$\Delta_i = 2^{i+1} N(N-2) \ldots (N-2i) k^{i+1} + \ldots$$

как многочлен по k. И так как N нечетное то коэффициент при старшей степени не равен нулю. Так как k не алгебраическое, то $\Delta_i(N, k) \neq 0$ следовательно, все $x_i = 0$, и следовательно все $c_i = 0$. Следовательно $P_N = c_0 = 0$. Таким образом если

$$D = \sum_{i=0}^{N} \frac{P_i}{i!} \partial^i$$

то старшая степень N является четной и $P_N = c$ является константой. Разность

$$D - \frac{c}{N!} (\mathcal{L}_2)^{N/2}$$

имеет меньшую степень по ∂ и можно применить индукцию. □

Пример 4.6. $\varphi(L_1) = ?$ $\varphi(L_2) = ?$

5. Построение интегралов. Пары Лакса

Теорема 5.1. *Пусть A некоторая алгебра и $h \in A$. Обозначим через H матрицу размера $n \times n$ у которой на диагонали стоят элементы равные h а на остальных местах нули. Пусть так же L, M такие матрицы, что*

$$[L, H] = [L, M]$$

и сумма элементов в каждой строке и в каждом столбце матрицы M равна нулю и пустъ $L^k = (L^k_{ij})$. Тогда элементы

$$L_k = \sum_{i,j} L^k_{ij}$$

коммутируют с элементом h.

Доказательство. Равенство, можно переписать в виде $[C, B-D] = 0$. Следовательно $[C^k, B-D] = 0$ тем самым достаточно рассмотреть случай $k = 1$. Имеем

$$[C, B] = ([c_{ij}, b]), \quad [C, D] = \left(\sum_l (c_{il}d_{lj} - d_{il}c_{lj})\right)$$

$$[c_1, b] = \sum_{i,j} [c_{ij}, b] = \sum_{i,j,l} (c_{il}d_{lj} - d_{il}c_{lj}) =$$

$$\sum_{i,l} c_{il} \sum_j d_{lj} - \sum_{j,l} c_{lj} \sum_i d_{il} = 0$$

$\square$

Следствие 5.2. *Оператор L_2 интегрируем. Более точно положим*

$$L = \begin{pmatrix} \partial_1 & \frac{k}{x_1-x_2} & \frac{k}{x_1-x_3} & \dots & \dots & \frac{k}{x_1-x_n} \\ \frac{k}{x_2-x_1} & \partial_2 & \frac{k}{x_2-x_3} & & \dots & \frac{k}{x_2-x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{k}{x_n-x_1} & \frac{k}{x_n-x_2} & \frac{k}{x_n-x_3} & \dots & \frac{k}{x_n-x_{n-1}} & \partial_n \end{pmatrix}$$

Тогда $L_k = \sum_{ij} L_{ij}^k$ являются дифференциальными операторами порядка и коммутируют между собой.

Доказательство. Надо применить предыдущую лемму. Положим $h = L_2$, а в качестве M возьмем следующую матрицу

$$M = 2k \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{(x_1-x_2)^2} & \frac{1}{(x_1-x_3)^2} & \dots & \dots & \frac{1}{(x_1-x_n)^2} \\ \frac{1}{(x_2-x_1)^2} & a_{22} & \frac{1}{(x_2-x_3)^2} & \dots & \dots & \frac{1}{(x_2-x_n)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{(x_n-x_1)^2} & \frac{1}{(x_n-x_2)^2} & \frac{1}{(x_n-{}_3)2} & \dots & \frac{1}{(x_n-x_{n-1})^2} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где $a_{ii} = -\sum_{i \neq j}^n \frac{1}{(x_i-x_j)^2}$. Проверим, что эти матрицы вместе с L_2 удов-летворяют требованиям предыдущей Теоремы. Имеем

$$[L, H]_{ij} = [L_{ij}, L_2]$$

$$[L, M]_{ij} = \sum_r (L_{ir}M_{rj} - M_{ir}L_{rj})$$

Рассмотрим два случая $i \neq j$ и $i = j$. В первом случая

$$[L_{ij}, L_2] = \left[\frac{k}{x_i - x_j}, \partial_i^2 + \partial_j^2\right]$$

$$= \frac{2k}{(x_i-x_j)^2}\partial_i - \frac{2k}{(x_i-x_j)^3} - \frac{2k}{(x_i-x_j)^2}\partial_j - \frac{2k}{(x_i-x_j)^3}$$

$$[L,M]_{ij} = \sum_{r\neq i,j}(L_{ir}M_{rj} - M_{ir}L_{rj}) + L_{ii}M_{ij} - M_{ii}L_{ij} + L_{ij}M_{jj} - M_{ij}L_{jj}$$

Но

$$\sum_{r\neq i,j}(L_{ir}M_{rj} - M_{ir}L_{rj}) = 2k^2\sum_{r\neq i,j}\frac{2x_r - x_i - x_j}{(x_i-x_r)^2(x_r-x_j)^2}$$

$$-M_{ii}L_{ij}+L_{ij}M_{jj} = L_{ij}\left(M_{jj}-M_{ii}\right) = \frac{2k^2}{x_i-x_j}\sum_{r\neq i,j}\frac{(x_r-x_i)^2-(x_r-x_j)^2}{(x_r-x_i)^2(x_r-x_j)^2}$$

$$L_{ii}M_{ij} - M_{ij}L_{jj} = \partial_i\frac{2k}{(x_i-x_j)^2} + \frac{-2k}{(x_i-x_j)^2}\partial_j$$

и в этом случае верно.

Во втором случае

$$[L_{ii},L_2] = -\left[\partial_i, \sum_{r\neq i}\frac{2k(k+1)}{(x_i-x_r)^2}\right] = \sum_{r\neq i}\frac{4k(k+1)}{(x_i-x_r)^3}$$

$$[L,M]_{ii} = \sum_{r\neq i}(L_{ir}M_{ri} - M_{ir}L_{ri}) + [\partial_i, M_{ii}]$$

$$= \sum_{r\neq i}\frac{4k^2}{(x_i-x_r)^3} + \sum_{r\neq i}\frac{4k}{(x_i-x_r)^3}$$

и тоже верно. □

Пример 5.3. $\varphi(L_3) = ?$. *Написать рекуренрную формулу для* L_k.

6. Операторы Данкла

Чтобы исследовать его свойства и доказать интегрируемость перепишем его несколько в ином виде, сделав сопряжение на функцию.

Ввведем обозначение

$$\delta = \prod_{i<j}(x_i-x_j)^k$$

.

Теорема 6.1. *Справедливо равенство*

$$\delta L_2\delta^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i<j}\frac{2k}{x_i-x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

Обозначим полученный оператор через $\mathcal{L}_2$.

Доказательство.

$$\delta \frac{\partial}{\partial x_i} \delta^{-1} = \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta = \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})}{\delta^{-1}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\ln(\delta^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\ln\prod_{i<j}(x_i - x_j)^{-k} =$$

$$-k\sum_{i<j}\frac{\partial}{\partial x_i}\ln(x_i - x_j) = -k\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}$$

Далее

$$\delta\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right)\delta^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\delta\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\delta^{-1} = \sum_{i=1}^{n}\delta\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\delta^{-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\right)^2 =$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\right)^2$$

Далее отдельно скаждым слагаемым.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\frac{\partial}{\partial x_i} = -k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = -k\sum_{i<j}\frac{1}{x_i - x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\right) = -k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{x_i - x_j}\right) = 2k\sum_{i<j}\frac{1}{(x_i - x_j)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\delta^{-1})\delta\right)^2 = k^2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\right)^2 = k^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\frac{1}{(x_i - x_j)^2} +$$

$$2k^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<l, j\neq i, l\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\frac{1}{x_i - x_l}$$

Но

$$2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j<l, j\neq i, l\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\frac{1}{x_i - x_l} = 2\sum_{(ijl),\, j<l, j\neq i, l\neq i}\frac{1}{x_i - x_j}\frac{1}{x_i - x_l} =$$

$$\sum_{(ijl),\, j\neq l, j\neq i, l\neq i} \frac{1}{x_i - x_j}\frac{1}{x_i - x_l} = \sum_{\{ijl\}} S(ijk)$$

То есть достаточно посчитать для $n = 3$. Но

$$\frac{1}{x_1 - x_2}\frac{1}{x_1 - x_3} + \frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{x_2 - x_3} + \frac{1}{x_3 - x_1}\frac{1}{x_3 - x_2} = 0$$

Можно по другому. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j<l, j\neq i, l\neq i} \frac{1}{x_i - x_j}\frac{1}{x_i - x_l} = \frac{f(x_1, \ldots, x_n)}{\prod_{i<j}(x_i - x_j)}$$

симметрична , следовательно числитель кососимметричен и потому равен нулю. □

6.1. **Симметрические многочлены.**

Определение 6.2. *Многочлен называется симметрическим, если он не меняется при любых перестановках переменных.*

Пример 6.3. *Степнные суммы*

$$p_l = x_1^l + \cdots + x_n^l,\ l = 1, 2, \ldots$$

Элементарные симметрические многочлены это коэффициенты разложения многочлена

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - tx_i) = 1 - t\sigma_1 + \cdots + (-1)^n \sigma_n t^n$$

Написать явные формулы для этих многочленов.

Полные симметрические функции

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 - tx_i)} = \sum_{i=1}^{\infty} h_i t^i$$

Мономиальные симметрические функции. Пусть λ - невозрастающая последовательность неотрицательных целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_n \geq 0$. Тогда определим

$$m_\lambda = \sum_{a_1, \ldots, a_n} x_1^{a_1} \ldots, x_n^{a_n}$$

где сумма берется по всем различным перестановкам набора $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Заметим, что

$$\sigma_l = m_{1,\ldots,1}$$

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} \ldots, p_{\lambda_n},\ \ \sigma_\lambda = \sigma_{\lambda_1} \ldots \sigma_{\lambda_n},\ \ h_\lambda = h_{\lambda_1} \ldots h_{\lambda_n}$$

Теорема 6.4. *Любой симметрический многочлен единственным образом выражается в виде многочлена через элементарные симметрические многочлены.*

Доказательство. Очевидно мономиальные симмерические функции образуют базис. Докажем, что

$$\sigma_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_{\lambda,\mu} m_\mu$$

Имеем

$$\sigma_{\lambda'} = \sigma_1^{\lambda_1-\lambda_2} \ldots , \sigma_n^{\lambda_n}$$

где $a_{\lambda,\mu}$ целые неотрицательные числа, λ' означает сопряженное разбиение и знак $<$ означает упорядочение в смысле лексикографического порядка. Поэтому как и прежде

$$\sigma_{\lambda'} = \sum_{\mu<\lambda} x^\mu = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} a_{\lambda,\mu} m_\mu$$

□

Теорема 6.5. *Пусть λ пробегает все разбиения длины не больше n. Тогда следующие наборы многочленов составляют базис в пространстве симметрических многочленов*

$$m_\lambda, \ h_\lambda, \ p_\lambda, \ \sigma_{\lambda'}$$

Теорема 6.6. *Оператор $\mathcal{L}_2$ сохраняет пространство симметрических многочленов.*

Доказательство. Покажем сначала, что результат применения, это мнгочлен. Это очевидно для квадратичной части оператора. Для линейной достаточно показать что если f симметричен, то

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

делится на $x_i - x_j$. Пусть $\sigma = (ij)$ - перестановка. Тогда несложно проверить равенства

$$\sigma \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma$$

поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j} = (1-\sigma)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Докажем, более сильное утверждение,что для любого многочлена g $g - \sigma g$ делиться на делится на $x_i - x_j$ или, что равносильно $g - \sigma g = 0$ при подстановке $x_i = x_j$. Но это очевидно.

Докажем теперь, что полученный многочлен симметричен. Имеем

$$\sigma\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sigma\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Далее

$$\sigma\sum_{i<j}\frac{2k}{x_i-x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\sum_{i\neq j}\frac{k}{x_i-x_j}\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=$$

$$\sum_{i\neq j}\frac{k}{x_i-x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma(i)}}-\frac{\partial f}{\partial x_{\sigma(j)}}\right)=\sum_{i\neq j}\frac{k}{x_i-x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)$$

□

6.2. **Операторы Данкла.**

Определение 6.7. *Операторы*

$$D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}+k\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}(\sigma_{ij}-1),\ldots i=1,2,\ldots,n$$

называются операторами Данкла.

Лемма 6.8. *Операторы Данкла сохраняют пространство многочленов.*

Доказательство. Фактически уже было. □

Теорема 6.9. *Операторы Данкла обледают следующими свойствами*

1. $\sigma D_i=D_{\sigma(i)}\sigma$
2. $D_iD_j=D_jD_i$

Доказательство. Первое утверждение доказывается сначала для транспозиций, а потом в общем случае.

Докажем коммутативность. Для этого вычислим коммутатор

$$[D_i,x_i]=D_ix_i-x_iD_i=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+k\sum_{j\neq i}\frac{\sigma_{ij}-1}{x_i-x_j}\right)x_i-x_i\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+k\sum_{j\neq i}\frac{\sigma_{ij}-1}{x_i-x_j}\right)$$

$$=1+k\sum_{j\neq i}\frac{x_j\sigma_{ij}-x_i}{x_i-x_j}-k\sum_{j\neq i}\frac{x_i\sigma_{ij}-x_i}{x_i-x_j}=1-k\sum_{j\neq i}\sigma_{ij}$$

Если $l\neq i$, то

$$[D_i,x_l]=\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+k\sum_{j\neq i}\frac{1}{\sigma_{ij}-1}x_i-x_j\right)x_l-x_l\left(\frac{\partial}{\partial x_i}+k\sum_{j\neq i}\frac{\sigma_{ij}-1}{x_i-x_j}\right)=$$

$$k\frac{\sigma_{il}-1}{x_i-x_l}x_l - kx_l\frac{\sigma_{il}-1}{x_i-x_l} = ks_{il}$$

Теперь проверим равенство

$$[[D_i, D_j]x_l] = 0$$

Имеем

$$[[D_i, D_j]x_l] = [[D_i, x_l]D_j] - [[D_j, x_l]D_i]$$

Пусть $l \neq j$, $l \neq i$, тогда

$$[[D_i, D_j]x_l] = [[D_i, x_l]D_j] - [[D_j, x_l]D_i] = k[\sigma_{il}, D_j] - k[\sigma_{jl}, D_i] = 0$$

Пусть $l = j$, тогда

$$[[D_i, D_j]x_i] = [[D_i, x_i]D_j] - [[D_j, x_i]D_i] =$$

$$= \left[-k\sum_{l\neq i}\sigma_{il}, D_j\right] - k\left[\sigma_{ij}, D_i\right] = -k\sigma_{ij}D_j + kD_j\sigma_{ij} - k\sigma_{ij}D_i + kD_i\sigma_{ij} = 0$$

Обозначим $A = [D_i, D_j]$, тогда

$$A(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(x_1, \ldots, x_n)A(1), \ A(1) = 0$$

Следовательно $A = 0$.

□

Лемма 6.10. *Доказать, что при ограничении на пространство симметрических многочленов выполнено равенство*

$$\mathcal{L}_2 = D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2$$

Доказательство. При ограничении на симметрические функции имеем

$$D_i^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + k\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}(\sigma_{ij}-1)\right)^2 =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + k\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}(\sigma_{ij}-1)\right)\frac{\partial}{\partial x_i} =$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}(\sigma_{ij}-1)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + k\sum_{j\neq i}\frac{1}{x_i-x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

□

Определим по индукции следующие операторы

$$\partial_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1\ , \ldots , n$$

$$\partial_i^{(p)} = \partial_i^{(1)} \partial_i^{(p-1)} - \sum_{j \neq i} \frac{k}{x_i - x_j} \left(\partial_i^{(p-1)} - \partial_j^{(p-1)} \right)$$

Лемма 6.11. *Показать, что ограничение на симметрические функции D_i^p совпадает с $\partial_i^{(p)}$.*

Доказательство. Легко проверить равенства

$$\sigma_{ij} D_i = D_j \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} \partial_i^{(p)} = \partial_j^{(p)} \sigma_{ij}$$

Далее индукциия по p. Если $p = 1$, Очевидно. Пусть $p > 1$. Тогда

$$D_i^p(f) = D_i(\partial_i^{(p-1)}(f)) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + k \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j} (\sigma_{ij} - 1) \right) \partial_i^{(p-1)}(f) =$$

$$= \partial_i^{(1)} \partial_i^{(p-1)}(f) - \sum_{j \neq i} \frac{k}{x_i - x_j} \left(\partial_i^{(p-1)}(f) - \partial_j^{(p-1)}(f) \right) = \partial_i^{(p)}(f)$$

□

Следствие 6.12. *Ограничение*

$$D_1^p + \cdots + D_n^p$$

на симметрические многогчены совпадает с

$$\partial_1^{(p)} + \cdots + \partial_n^{(p)}$$

Теорема 6.13. *Для любого симметрического многочлена f оператор $\mathcal{L}_f = f(D_1, \ldots, D_n)$ сохраняет пространство симметрических многочленов и коммутируе с $\mathcal{L}_2$. Отображение $f \to \mathcal{L}_f$ является изоморфизмом алгебры симметрических функций на алгебру дифференциальных операторов коммутирующих с $\mathcal{L}_2$ при общем знечении параметра k.*

7. Вопросы к экзамену

1. Определение ассоциативных алгебр. Примеры. Алгебра некоммутативных многочленов.

2. Гомоморфизмы алгебр. Идеал алгебры. Ядро гомоморфизма. Фактор алгебра.

3. Описание гомоморфизмов алгебр некоммутативных и коммутативных многочленов.

4. Задание алгебр образующими и соотношениями.

5. Центр алгебры. Централизатор элемента в алгебре.

6. Определение алгебры дифференциальных операторов.

7. Задание алгебры Вейля образующими и соотношениями.

8. Алгебра рациональной задачи Калоджеро-Мозера-Сазерленда. Ее задание образующими и соотношениями.

9. Оператор КМС. Гомоморфизм Хариш-Чандры. Его инъективность.

10. Инвариантность образа гомоморфизма Хариш - Чандры относительно группы Вейля.

11. Пара Лакса.

12. Построение пары Лакса для рационального оператора КМС.

13. Симметрические многочлены. Базисы. Основная теорема о симметрических многочленах.

14. Сюрьективность гомоморфизма Хариш - Чандры.

15. Радиальная форма рационального оператора КМС. Действие в алгебре симметрических многочленов.

16. Операторы Данкла. Их действие в пространстве многочленов. Коммутативность.

17. Постоение интегралов рациональной задачи КМС с помощью операторов Данкла.

Список литературы

[1] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. М. : МЦНМО, 2003.
[2] Etingof P. Calogero-Moser systems and representation theory. (Zurich Lectures in Advanced Mathematics). EMS. : 2007.
[3] Винберг Э. Курс Алгебры. М. : МЦНМО, 2011.