

Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского

Д.И. Трубецков

А.Г. Рожнев

Лекции по теории
колебаний и волн

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

*Учебное пособие для студентов физических
специальностей вузов*

Саратов, 2014

Содержание

Предисловие авторов	5
1 Что такое волна? (Вместо введения)	10
1.1 Несколько простых определений	10
1.2 Об истории коронации одной русской царицы	12
1.3 Еще определения	13
1.4 Что можно сказать о свойствах волны?	13
1.5 Солнечные парусники	14
2 Цепочка связанных осцилляторов — модель среды с дисперсией	16
2.1 Волны в цепочке связанных осцилляторов	16
2.2 Линейное волновое уравнение	18
2.3 Скорость распространения волны, Дисперсия	21
2.4 Почему существует дисперсия?	27
2.5 Пространственная и временная дисперсии	30
2.6 О квазичастицах	33
3 Волны в распределенных системах с границами	36
3.1 Влияние граничных условий. Отражение и прохождение волны в среде со скачкообразным изменением параметров	36
3.2 Струна с закрепленными концами	41
3.3 Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем	46
4 Линейные волны в жидкости	54
4.1 Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Звуковые волны. Акустический эффект Доплера	54
4.2 Основные уравнения теории волн в стратифицированной жидкости	59
4.3 Гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости	63
4.4 Круговые волны на воде	72
4.5 Волны за движущимся источником	76

4.6	Внутренние волны в стратифицированной жидкости. Линейные волны Россби.	82
5	Линейные волны в плазме	88
5.1	Общие сведения о плазме.	88
5.2	Гидродинамическое описание плазмы. (основные уравнения плазменной гидродинамики)	90
5.3	Дисперсионное уравнение для ленгмюровских колебаний и анализ важных частных случаев.	91
5.4	Элементы кинетической теории плазмы	95
5.5	Дисперсия волн в двухжидкостной гидродинамике. Ионно — звуковые волны	107
6	Кинематика волнового движения	110
6.1	О различных способах введения понятия групповой скорости. Скорость распространения энергии	110
6.2	Парадоксы Л.И. Мандельштама	118
6.3	Фазовая, групповая и скорость распространения энергии волн в сплошных средах	119
7	Введение в теорию устойчивости и неустойчивости волновых систем	125
7.1	Общие замечания	125
7.2	Примеры волновых неустойчивостей	134
7.2.1	Неустойчивость Джинса	134
7.2.2	Неустойчивость Тьюринга – пример диффузионной неустойчивости	137
7.2.3	Усиление в лампе с бегущей волной. Самовозбуждение в лампе с обратной волной	139
7.3	Абсолютная и конвективная неустойчивости (метод характеристик)	144
7.4	Волновые неустойчивости двух взаимодействующих электронных потоков	149
7.5	Неустойчивость Гельмгольца.	155
7.6	Усиление и непропускание. Критерий разделения	157
7.7	Еще примеры неустойчивостей	158
8	Энергия и импульс волн	162
8.1	Уравнение переноса плотности энергии волнового пакета в диспергирующей среде	162

8.2	Вариационный принцип Уизема	165
8.3	Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией	170
8.3.1	Метод М.Л.Левина	170
8.3.2	Общий способ вывода формулы для плотности энергии	173
8.3.3	Метод, основанный на дисперсионном уравнении	175
8.4	Что же такое волновая энергия для линейных волн?	177
8.5	Импульс волнового пакета	178
9	Волны с отрицательной энергией. Связанные волны	180
9.1	Общие замечания	180
9.2	Волны с положительной и отрицательной энергией	182
9.3	Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Доплера	190
10	Волны в неоднородных средах	198
10.1	Приближение геометрической оптики	198
10.2	Образование каустик и рефракция	207
10.3	Градиентный диэлектрический волновод	213
10.4	Электромагнитные волны слоисто-неоднородной среде	223
10.5	Взаимодействие линейных волн в неоднородной среде	229
	Литература	238

Предисловие авторов

Когда говорят о волнах, то первое, что приходит в голову, это волна на поверхности воды. Вспоминаются прекрасные строки Б. Пастернака:

Передо мною волны моря.
Их много. Им немислим счёт.
Их тьма. Они шумят в миноре.
Прибой, как вафли их печёт.

И хотя поэт пишет о морских волнах, написанное им можно отнести ко всему миру волн, в котором мы живем. Этот мир удивительно богат. Наши глаза воспринимают световые волны, слышим мы звуковые волны, радиоприемник и телевизор улавливают электромагнитные волны, волны на поверхности моря, о которых написал поэт, порождает ветер, есть волны эпидемий, волны слухов . . . Перечень можно продолжать и продолжать. Для первого знакомства с этим миром подойдет книга Г. Претора- Пинни “Занимательное волноведение. Волнения и колебания вокруг нас” (М.: Лайвбук, 2012. — 416 с.). В Аннотации к книге написано:

“Приготовьтесь: вас ждёт кругосветное путешествие по всевозможным волнам: от сёрферских океанических до мозговых, радио-, микро-, инфракрасных, акустических, световых и многих прочих.

Претор-Пинни предлагает заново взглянуть на наш постоянно взволнованный мир.”

Наши лекции — тоже кругосветное путешествие по пиру линейных волн. Но наш мир и похож, и не похож на при Претора- Пинни. Похож разнообразием изучаемых волн и не похож подходом к их описанию: наряду с качественным описанием волновых феноменов, используется хорошо разработанный математический аппарат исследования линейных систем. Такой подход позволяет с единой точки зрения анализировать различные волновые явления, используя ограниченное число эталонных моделей, не упуская из рассмотрения и некоторые тонкие эффекты.

Кратко о содержании курса.

В первой лекции, которая является вводной, обсуждается на различных элементарных примерах понятие волны, приводятся строгие и нестрогие определения для этого явления, данные в различных учебниках.

С лекции 2 начинается собственно изучение волновых процессов на примере простой модели — бесконечной цепочки связанных маятников. Последовательно проведен переход в цепочке связанных осцилляторов к одномерной сплошной среде. В приближении “выключения” силы тяжести или, что эквивалентно, в пределе очень больших длин подвеса маятников получено линейное волновое уравнение второго порядка. Исследуются свойства решений этого уравнения. Подробно обсуждаются основные характеристики гармонических волн и причины существования в среде пространственной и временной дисперсии, вводится понятие квазичастиц.

Волны в системах с границами и резонанс волновых систем рассмотрены в лекции 3. В следующих двух лекциях обсуждаются линейные волны в реальных средах — в жидкости (лекция 4) и в плазме (лекция 5). В частности, описаны гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, рассмотрены особенности волн в стратифицированной жидкости (внутренние волны Россби), волны от мгновенного источника на поверхности воды и система волн за движущимся источником.

Для плазмы приводится гидродинамическое описание и элементы кинетической теории. Рассмотрены плазменные ленгмюровские колебания, плазма в продольном поле и затухание Ландау.

Важные вопросы о способах введения понятий групповой скорости, фазовой скорости и скорости распространения энергии составляют содержание лекции 6. Примеры волновых неустойчивостей в различных системах приведены в следующей за ней лекции 7. Здесь же на примере задачи о двух взаимодействующих электронных потоках вводятся и обсуждаются понятия абсолютной и конвективной неустойчивостей.

В 8-й лекции, посвященной понятиям энергии и импульса волн, на примере уравнения Клейна-Гордона выведено уравнение переноса усредненной плотности энергии волнового пакета в диспергирующей среде. Приводится изящный способ вычисления плотности электромагнитного поля в среде с дисперсией, принадлежащий М.Л. Левину. Достаточно подробно изложен вариационный принцип Уизема получения уравнения, характеризующего перенос усреднённой плотности энергии волновым пакетом в средах с дисперсией без “привязки” к конкретному уравнению.

Волнам с положительной и отрицательной энергией в электронике, физике плазмы и гидродинамике посвящена лекция 9. Здесь же устанавливается их связь с нормальным и аномальным эффектами Доплера. Рассмотрен метод связанных волн и его приложение к задачам сверхвысокочастотной электроники.

Завершает книгу лекция, содержание которой посвящено волнам в плавно неоднородных средах и нерезонансным параметрическим процессам. Рассмотрено приближение геометрической оптики и выход за рамки этого приближения. Изложено решение задачи о поведении электромагнитной волны вблизи точки поворота при отражении от неоднородного диэлектрического слоя. Кратко обсуждается взаимодействие линейных волн.

Предлагаемое учебное пособие является составной частью общего «Курса лекций по теории колебаний и волн», который был разработан группой преподавателей и научных сотрудников Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского, и в течении многих лет читается студентам факультета нелинейных процессов СГУ. Помимо этого, большая часть этого курса читалась Д.И. Трубецковым студентам кафедры «Математика» НИЯУ «МИФИ» в период с 2010 года по 2014 год.

Лекции, посвященные линейным волнам и представленные в данной книге, являются непосредственным продолжением первой части курса — учебного пособия «Линейные колебания» [1], принадлежащего тем же авторам. Две эти книги связаны общим подходом к изложению материала, математическим аппаратом, примерами физических и других систем, для которых рассматриваются различные колебательные и волновые явления. По этой причине настоятельно рекомендуем читателю, начинающему изучение теории волн, предварительно освежить в памяти содержание курса по линейным колебаниям, используя книгу [1].

Как и в «Линейных колебаниях», в данных лекциях рассмотрение ведется с использованием довольно серьезного математического аппарата. Как аргумент в необходимости этого, можно привести известную цитату Л.И. Мандельштама (см. «Лекции по теории колебаний». М.: Наука, 1972. С. 73):

«Здесь наглядные рассуждения ничего не дают, а необходимо математическое исследование. Без него вы не получите серьезного ответа. Начинающему очень часто кажется: к чему вся эта математика? Ему кажется, что и «так все ясно». Но в действительности какой-нибудь существенный пункт при этом может остаться неясным. Иметь меру требуемой математической строгости — самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру.»

Удалось ли это авторам, судить читателю.

Подготовка этого учебно-методического пособия поддержана грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ №НШ-828.2014.2 и проектом №1463, проводимым в соответствии с заданием №2014/203 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки РФ.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ВОЛНА ж. водяной гребень, гряда, долгий бугор, поднявшийся при всколыхании воды ветром или иною силою. Самые мелкие волны, *рябь*; крупная, отдельная, *волна*, *вал*; самая большая *колышень*, *взводень*; средняя, *плескун*; пенная, *завитки*, *кудрявка*, *барашек*, *зайчик*; крупная, *белоголовец*; прибрежная, в погоду, *прибой*, *бурун*; мелкая, крутая, на отмели, над камнями, *бурун*, *толкун*, *толчая*, *сутолока*; волна или волнение, противное течению или изменившемуся ветру, *спорная волна*, *чистоплеск*; набегающая на берег, *накатная волна*, *заплески*. Меж двух гряд волн образуется *хлябь*; вершина волны, *гребень*; снавету *откос*; сподветру *круча волны*. *Девятым валом* или *волной* зов. по поверью, чередную, ббльшую противу прочих, роковую волну. *Воздь бурь полночного народа*, *девятый вал в морских волнах*, Суворов.|| В переносном значении *волною* зовут движущуюся в одну сторону громаду, толпу. *Народ волна волной валит*.

В.И.Даль. Толковый словарь живого великорусского языка. М.: "Русский язык", 1998, том первый, с. 233-234.

Лекция 1

Что такое волна? (Вместо введения)

Что же такое волна? Несколько определений. Об истории коронации одной русской императрицы. Еще определения. Что можно сказать о свойствах волны? Солнечные парусники.

1.1 Несколько простых определений

Начнем с определения волны, которое принадлежит американскому физiku и инженеру Джону Пирсу [2].

“Понятие волны — одно из величайших общих понятий физики. Человек сталкивается с волнами с незапамятных времен ... Современная физика полна волн: волны землетрясений, которые изучаются сейсмологами; волнения и зыбь в океанах, озерах и прудах; волны звука, распространяющиеся в воздухе; волны механических колебаний в натянутых струнах или кристаллов кварца, используемых для стабилизации частоты радиопередатчика; электромагнитные волны, которые образуют свет и которые радиопередатчики излучают, а радиоприемники принимают, и, наконец, волны чего? — вероятности, быть может, которые используются в квантовой механике для предсказаний поведения электронов, атомов и более сложных форм вещества.

Что же такое волны? Они не земля, вода или воздух; не сталь или жила струны, или кварц; они только распространяются в этих веществах ...

Пожалуй, лучше спрашивать не что такое волны, а что можно сказать о волнах. Тогда не будет недоразумений. Мы понимаем под волнами некое состояние или некий процесс, которые могут быть описаны математически в общем виде, применимо к различным физическим системам”.

Следуя совету, высказанному в последнем абзаце этой длинной цитаты, давайте заглянем в несколько книг, посвященных волновым процессам. Начнем со школьного учебника по физике Г.Я. Мякишева и Б.Б. Буховцева [3, с. 66–67], а потом уже посмотрим в сложные книги.

“Что называется волной? Волной называется колебание, распространяющееся в пространстве с течением времени При распространении волны происходит перемещение определенного состояния колеблющейся среды, но не перенос вещества. Возникшие в одном месте колебания волны, например от брошенного камня, передаются соседними участками и постепенно распространяются во все стороны, вовлекая в колебательное движение все новые и новые частицы среды. Течение же воды не возникает: перемещается лишь форма ее поверхности”

Эти свойства понимал еще Леонардо да Винчи, который в пятнадцатом веке очень образно писал о волнах: “Импульс гораздо быстрее воды, потому что многочисленны случаи, когда волна бежит от места своего возникновения, а вода не двигается с места, — наподобие волн образуемых в мае на нивах течением ветров; волны кажутся бегущими по полю, между тем нивы со своего места не сходят” [4, с. 350].

В одном из лучших учебников по колебаниям и волнам — книге Г.С. Горелика “Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику” [5, с. 144] — находим: “Слово “волна” возникло задолго до того, как родилась наука. Оно обозначает в своем первоначальном смысле, как всем известно, то чередование движущихся следом друг за другом горбов и впадин, которые видны почти всегда на поверхности моря или большого озера; волны легко вызвать на гладкой поверхности пруда, если бросить на нее камень или коснуться ее палкой. Проникновение слова “волна” в акустику, а затем в оптику можно считать началом создания единого языка, которым выступает теория колебаний и волн для физики в целом.

И там же: “В физике волнами или волной называют изменяющееся со временем пространственное чередование максимумов и минимумов любой физической величины, например, плотности вещества, напряженности электрического поля, температуры.

Волной часто называют также всякое явление, при котором в пространстве происходит распространение кратковременного электрического или механического “толчка” ”.

Ф.Крауфорд [6] дает следующее определение: “. . . мы будем рассматривать вынужденные колебания открытых систем т.е. систем не имеющих внешних границ. Например, если кто-то играет на трубе, находясь на воздушном шаре высоко над землей, то воздух можно считать открытой системой, если пренебречь эхом, т.е. отражением от земли к трубе. . . .

Волны, образованные внешним воздействием, приложенным к открытой среде, называются бегущими волнами: они “бегут” от создающего их источника. Важное свойство бегущих волн заключается в том, что они переносят энергию и

импульс”.

Еще одно определение: “Волна — это распространение колебаний в пространстве, происходящее с конечной скоростью . . . Критерием перехода от колебательного движения к волновому может служить “условие квазистационарности”: если характерные размеры системы $L < cT$ (c — скорость распространения возмущения, T — время его заметного изменения), о процессе можно говорить как о колебательном в системе с сосредоточенными параметрами. В случае $L > cT$ процесс нужно считать волновым, а систему распределенной” [7, с. 8].

Во всех определениях фигурируют слова “колебания”, “колебательный” и т.п. Но есть примеры того, когда волна есть, а колебаний нет.

1.2 Об истории коронации одной русской царицы

Вот одна из страниц русской истории — 25 апреля 1742 года. В этот день состоялась коронация императрицы Елизаветы, дочери Петра I, на русский престол. Будущая императрица пожелала, чтобы момент возложения патриархом короны на ее голову был отмечен в новой столице России Петербурге выстрелом пушки Петропавловской крепости. Но по тогдашним законам коронация русских царей проходила в Москве в Успенском соборе. Радио и телевидения не было. . . . Но способ реализации желания Елизаветы нашли. На всем примерно шестисотпятидесятикилометровом пути от собора в Москве до крепости в Петербурге на расстоянии прямой видимости (примерно сто метров) друг от друга выстроили солдат. Понадобилось приблизительно шесть тысяч пятьсот человек; в руке у каждого был флажок. В момент, когда корона коснулась головы Елизаветы, первый солдат взмахнул флажком, следующий повторил его действия, затем последовательно все остальные. Минут через десять — двадцать известие о коронации дошло до артиллериста в Петропавловской крепости, поскольку время реакции человека составляет десятые доли секунды. Спрашивается, что же переместилось из Москвы в Петербург?

Любой из солдат стоял на своем месте; правда, каждый взмахнул флажком. На языке науки действие солдата (поднял и опустил руку с флажком) означает изменение его состояния или фазы. Именно это изменение состояния (фаза) и перемещалось вдоль цепи солдат.

Тогда можно считать, что перемещения в пространстве изменения состояния называется волной.

1.3 Еще определения

В очень серьезной в математическом смысле книге Дж. Уизема “Линейные и нелинейные волны” [7, с. 8] есть раздел, начинающийся словами: “По-видимому, не существует единого строгого определения волн. Можно дать различные частные определения, но чтобы охватить весь диапазон волновых процессов, предпочтительнее руководствоваться интуитивным понятием о волне как о любом различимом сигнале, передающимся от одной части среды к другой с некоторой определенной скоростью. Такой сигнал может быть возмущением любого вида, например, максимумом какой-либо величины или резким ее изменением при условии, что это возмущение четко выделено и что в любой заданный момент времени можно определить его местонахождение. Этот сигнал может искажаться, изменять свою величину и скорость, но при этом должен оставаться различимым. Такое определение может показаться несколько расплывчатым, но оно оказывается вполне приемлемым, а любая попытка дать более строгое определение представляется слишком ограничительной, поскольку различным типам волн присущи различные характерные черты”.

Наконец, как всегда заглянем в “Физический энциклопедический словарь” (М.,1960). В первом томе на странице 312 приводится следующее определение: “Волны — возмущения, распространяющиеся с конечной скоростью в пространстве и несущие с собой энергию.

Основная роль волн во всех физических явлениях состоит в том, что в виде волн осуществляется перенос энергии без переноса вещества (хотя последний и может иметь место как побочное явление)”.

1.4 Что можно сказать о свойствах волны?

Наверное, хватит определений. Их главная и общая для всех черта — подмена ответа на вопрос: “Что такое волны?” ответом на другой вопрос: “А что можно сказать о свойствах волн?”. Детальный ответ мы постараемся дать в этих лекциях, а сейчас ограничимся качественным описанием.

Волны, как и всякий движущийся объект, переносят энергию в процессе своего распространения. Величина этой энергии разная и сильно зависит от природы волн. Действительно, энергия морских волн, перемещающих при шторме огромные каменные глыбы весьма велика, а у электромагнитных световых волн, идущих от Солнца и достигающих Земли — сравнительно небольшая (мощность на один квадратный метр поверхности ~ 1 кВт). Подобно движущимся частицам,

волны обладают импульсом, который проявляется менее заметно, чем энергия волны.

1.5 Солнечные парусники

В очень интересной книге [8, с. 432] есть восьмой очерк под названием “Солнцем полны паруса”, который начинается цитатой из научно — фантастического рассказа Артура Кларка “Солнечный ветер” [9]. Воспользуемся этой цитатой.

“Протяните ладони к Солнцу. Что вы чувствуете? Тепло, конечно. Но кроме него есть еще давление. Правда, такое слабое, что вы его не замечаете. На площадь ваших ладоней приходится всего около одной миллионной унции. Но в космосе даже такая малая величина играет важную роль, потому что она действует все время, час за часом, день за днем. И запас энергии в отличие от ракетного горючего неограничен. Мы можем создать паруса, которые будут улавливать солнечное излучение”.

Далее в рассказе описана гонка вокруг Земли яхт с солнечными парусами. А возникла идея солнечных парусов значительно раньше (см., например, [2], когда в 1951 году в журнале “Astounding Science Fiction” (название журнала переводится как “Изумительная научная фантастика”) Р. Саундерс опубликовал статью “Космические парусники”. В статье было показано, что в принципе можно приводить в движение космический корабль в Солнечной системе, используя давление света на солнечные паруса.

В недавней статье [10] указано, что концепция использования светового давления солнечных лучей проскальзывала у Ф.А. Цандера еще в 20-е годы. Однако, по-настоящему, прорабатываться эта идея стала лишь в семидесятые годы в рамках программ полета к комете Галлея в США и в СССР (проект “Регата”). Ученые пытались вернуть термину “космоплавание” его изначальный смысл в рамках так называемого Колумбовского проекта, создаваемого по инициативе конгресса США и связанного с празднествами по случаю 500-летия открытия Америки. Колумбовская юбилейная комиссия, сформированная президентом США, объявила необычный конкурс на лучший космический парусник для полета к Марсу. Условия предполагаемого полета были сформулированы в декабре 1988 года и сводились к следующим: корабли участников должны были быть выведены на начальную орбиту в 1992–93 годах, оттуда, подняв паруса, двигаться по раскручивающейся спирали к Луне; после завершения маневра в поле тяготения Луны парусники должны взять курс на Марс и постараться как можно быстрее добраться до планеты. Все как в рассказе А.Кларка! Работа над проектами бы-

ла столь захватывающей, что в предисловии к советскому проекту парусника, авторы не удержались по-существу от поэтических строк [10]:

“Работая над Колумбовским проектом, мы испытываем удивительное ощущение смеси приключения с деловой предприимчивостью, пронизывающей жизнь и деятельность великого мореплавателя.

Вспоминая судьбу легендарных парусников от “Санта-Марии” до “Дискавери”, “Фрама” и “Ра”, мы уверены в скором космическом продолжении этого списка”.

Нашими специалистами был спроектирован аппарат “Витязь” с парусом площадью $120 \cdot 10^3 \text{ м}^2$ при весе 485 кг, что обеспечивает коэффициент эффективности (отношение предельной силы, развиваемой парусом на орбите, к силе притяжения к Солнцу), равный 0,37¹. В Вашингтоне в апреле 1990 года во время презентации наш проект по этому показателю оказался самым лучшим (вторыми были англичане с коэффициентом 0.3). Что ж, будем ждать космических гонок!

¹Этот коэффициент не зависит от местонахождения корабля и служит важнейшей характеристикой, определяющей его возможности как транспортного средства

Лекция 2

Цепочка связанных осцилляторов — модель среды с дисперсией

Переход к сплошной среде в цепочке связанных осцилляторов. Напоминание о волновой терминологии. Общее линейное уравнение. Дисперсионное соотношение. Диспергирующие волны; групповая скорость. С чем связано существование дисперсии в среде? Пространственная и временная дисперсии. О квазичастицах.

2.1 Волны в цепочке связанных осцилляторов

Цепочка связанных осцилляторов представляет собой простейшую упорядоченную структуру. Простыми примерами модели упорядоченной структуры, в которой тождественные осцилляторы связаны между собой не любым, а определенным образом, могут служить линейная цепочка из одинаковых частиц, расположенных вдоль прямой на равных расстояниях друг от друга (одномерная решетка из одинаковых частиц); механическая система, состоящая из набора связанных пружинами маятников; цепочка из LC —элементов; бесконечный ряд одинаковых акустических резонаторов; цепочка, образованная из магнитов, и др. В частности, система, правильно расположенных в пространстве шариков, связанных друг с другом пружинами, представляет собой грубую модель твердого тела (см., например, в [11] главу “Колебания решетки”). Показательно в этом смысле начало упомянутой главы. “Простейшее твердое тело — это, по-видимому, твердый аргон. Он состоит из правильно расположенных нейтральных атомов с крепко связанными электронными оболочками. Эти атомы удерживаются вблизи друг друга силами Ван-дер Ваальса, которые действуют в основном между ближайшими соседями в решетке. Физические процессы в таком кристалле связаны с тепловым движением атомов вблизи своих идеализированных положений равновесия. Для простейшего описания такого движения используется модель

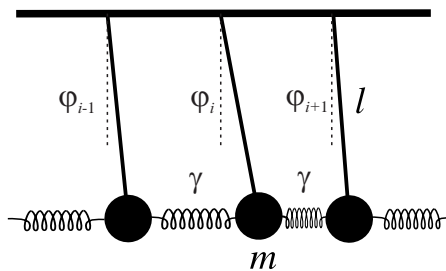


Рис. 2.1. Бесконечная цепочка одинаковых маятников, связанных пружинками

Эйнштейна, согласно которой каждый атом колеблется подобно простому гармоническому осциллятору в потенциальной яме, образованной силами его взаимодействия с соседями”. Если в такой одномерной решетке один шарик сместить из положения равновесия, то будут смещаться и соседние — по всей упорядоченной структуре побежит волна. Волны, бегущие в твердом теле или другой упорядоченной структуре, характеризуются длиной волны λ и частотой ω , которые удовлетворяют закону дисперсии

$$\omega = \omega(\mathbf{k}), \quad (2.1)$$

$k = 2\pi/\lambda$. Из соотношения (2.1) следует, что волна с определенным вектором \mathbf{k} имеет и определенную частоту

Уравнения, описывающие волны в такой системе легко получить с помощью предельного перехода из уравнений колебаний дискретной цепочки осцилляторов, которая была рассмотрена в лекции 8 учебника [1]. Рассмотрим цепочку одинаковых маятников, связанных между собой пружинами (см. рис. 2.1). В отличие от системы, исследованной в [1], будем считать цепочку бесконечной, при этом, чтобы не возникло путаницы с обозначениями физических величин, традиционно принятыми в теории волн, будем обозначать углы отклонения маятников через $\varphi_i(t)$, а жесткость связывающих их пружин через γ .

Движение каждого из маятников цепочки в линейном приближении описывается следующим уравнением

$$\ddot{\varphi}_i(t) + \omega_0^2 \varphi_i(t) = \frac{\gamma}{m} (\varphi_{i+1}(t) + \varphi_{i-1}(t) - 2\varphi_i(t)) \quad (2.2)$$

где $\omega_0^2 = g/l$.

Предположим, что пространственный период волнового движения в дискретной цепочке много больше расстояния между маятниками, т.е. много больше размера ячеек. Тогда дискретный набор функций времени $\varphi_i(t)$ можно заменить

одной функцией $\varphi(x, t)$ двух непрерывных переменных — координаты и времени в соответствии с правилом $\varphi_i(t) \rightarrow \varphi(x = ia, t)$. Предположение, что пространственный период волны много больше расстояния между маятниками позволяет считать, что функция $\varphi(x, t)$ достаточно медленно меняется в пространстве. Тогда возможны также следующие замены:

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1}(t) &\rightarrow \varphi\{(x+a), t\} = \varphi(x, t) + \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x^2}a^2 + \dots, \\ \varphi_{i-1}(t) &\rightarrow \varphi\{(x-a), t\} = \varphi(x, t) - \frac{\partial\varphi(x, t)}{\partial x}a + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x^2}a^2 + \dots.\end{aligned}$$

Подставляя все эти формулы в уравнения (2.2) и пренебрегая слагаемыми с производными более высокого порядка, чем вторые, получим уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x^2} + \omega_0^2\varphi(x, t) = 0, \quad (2.3)$$

где $v^2 = \gamma a^2/m$. Это линеаризованное уравнение Клейна — Гордона, хорошо известное в различных областях физики, в частности, в электродинамике, теории твердого тела, теории поля и т.д.

Если в уравнении (2.3) устремить ω_0 к нулю (это соответствует постепенному “выключению” силы тяжести или увеличению длины подвеса маятников), то получим обычное линейное волновое уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2\frac{\partial^2\varphi(x, t)}{\partial x^2} = 0. \quad (2.4)$$

2.2 Линейное волновое уравнение

Прежде чем обсуждать свойства уравнения (2.4), уточним терминологию. Под волновым уравнением в широком смысле в теории линейных волн подразумевают любое уравнение, решения которого описывает волновое движение с малой амплитудой в какой-либо среде. Кроме этого, линейным волновым уравнением второго порядка часто называют непосредственно уравнение (2.4), решение которого соответствуют особенно простому случаю, так называемым плоским волнам [12]. Важность этого уравнения определяется тем, что оно описывает волны в очень многих физических, и не только физических системах. В частности, распространение электромагнитных волн в однородной безграничной среде при очень общих предположениях может быть описано как совокупность плоских волн, каждая из которых подчиняется уравнению вида (2.4). Ему же подчиняются также звуковые волны в воздухе или упругом теле в очень широком диапазоне частот, волны

напряжения и тока в двухпроводных и коаксиальных линиях, волны в большом количестве других систем.

Волны, описываемые уравнением (2.4), имеют наиболее простые свойства среди всех волн в линейных одномерных изотропных системах (термин изотропная применительно к одномерной системе означает, что она обладает симметрией по отношению к операции смены знака координаты: $x \rightarrow -x$). В частности, легко показать, что для любой функции $F_1(x)$ с непрерывной второй производной, функция вида $F_1(x - vt)$ является решением уравнения (2.4). Действительно, введем обозначение $\xi = x - vt$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(x - vt)}{\partial x} &= \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial \xi}, & \frac{\partial F_1(x - vt)}{\partial t} &= -v \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 F_1(x - vt)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F_1(\xi)}{\partial \xi^2}, & \frac{\partial^2 F_1(x - vt)}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 F_1(\xi)}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Подставляя это соотношения в уравнение (2.4), получаем тождество.

Аналогично показывается, что произвольная достаточно гладкая функция $F_2(x + vt)$ единого аргумента $\eta = x + vt$ тоже является решением линейного волнового уравнения второго порядка (2.4). Легко видеть, что сумма двух таких решений

$$\varphi(x, t) = F_1(x - vt) + F_2(x + vt) \quad (2.5)$$

также является решением, что следует из линейности уравнения (2.4).

Свойство решений, выражаемое формулой (2.5), известно как принцип суперпозиции и математически описывает явление интерференции волн малой амплитуды (пример: стоячая волна на струне музыкального инструмента, которая представляет собой суперпозицию волн, распространяющихся к закрепленному концу струны, и волн, отраженных от этого конца). О волновом уравнении, допускающем принцип суперпозиции (уравнение (2.4)) говорят как о линейном, а его решение (решение (2.5)) называют линейной волной. Подчеркнем, что скорость линейной волны не зависит от ее амплитуды.

Физический смысл решения волнового уравнения вида $F_1(x - vt)$ легко понять. Значение волнового поля в двух точках, имеющих координаты x_1 и x_2 будет одно и тоже в два разных момента времени t_1 и $t_2 > t_1$, если выполняется условие

$$x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2.$$

Отсюда следует, что все волновое возмущение, форма которого задана функцией $F_1(\xi)$, движется равномерно со скоростью $v = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ без изменения своей формы. Так как без ограничения общности можно считать, что $v > 0$,

то $x_2 > x_1$ и все возмущение сдвигается в сторону увеличения координаты x (вправо).

Аналогично решение вида $F_2(x + vt)$ соответствует волне, которая распространяется в сторону уменьшения координаты x (влево) также без изменения формы. Подчеркнём, что сохранение формы волны присуще волновым возмущениям $F_1(x - vt)$ и $F_2(x + vt)$ только по отдельности, их суперпозиция (2.5) таким свойством не обладает. Кроме этого, здесь рассматриваются волны в бесконечной системе не имеющей границ. Если же речь идет о системе конечного размера, но на её правой границе будет происходить преобразование волны, бегущей вправо в волну бегущую влево, а на левой границе — обратный процесс. В этом, по сути, состоит явление отражения волн от границ системы или от локальных неоднородностей внутри неё.

Конкретный вид функций F_1 и F_2 определяется начальными условиями, которыми необходимо дополнить уравнение (2.4), чтобы математически задача была полностью определена.

Пусть начальные условия для уравнения (2.4) имеют вид

$$\varphi(x, 0) = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x). \quad (2.6)$$

Тогда для введенных выше функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеем

$$F_1(x) + F_2(x) = \Phi(x), \quad F_2'(x) - F_1'(x) = \Psi(x)/v.$$

Из второго уравнения получаем, что

$$F_2(x) - F_1(x) = \frac{1}{v} \int_{x_0}^x \Psi(\xi) d\xi.$$

Выбор значения x_0 для нижнего предела интегрирование несущественен, поскольку оно выпадает из окончательного ответа. Комбинируя два уравнения для функций $F_{1,2}(x)$, получаем, что

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \left[\Phi(x) - \frac{1}{v} \int_{x_0}^x \Psi(\xi) d\xi, \right] \quad (2.7)$$

$$F_2(x) = \frac{1}{2} \left[\Phi(x) + \frac{1}{v} \int_{x_0}^x \Psi(\xi) d\xi. \right] \quad (2.8)$$

Подставляя эти формулы в общее решение (2.3), получаем решение линейного волнового уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - vt) + \varphi(x + vt)] + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} \Psi(\xi) d\xi. \quad (2.9)$$

Примеры применения полученной формулы (2.9) к анализу распространения волновых импульсов в среде, описываемой линейным волновым уравнением можно найти в нескольких задачах задачника [13].

2.3 Скорость распространения волны. Дисперсия

Для распространения волны от одной точки к другой нужно определённое время. Это означает, что волны имеют конечную скорость. Подробно понятие скорости обсудим в лекции 6, посвящённой кинематике волн, а здесь лишь коснёмся этого вопроса на уровне напоминаний известного из курса общей физики.

Обратимся вновь к волновому уравнению (2.4), в котором φ характеризует некоторую величину, связанную с волной, а $v^2 = \text{const} > 0$. Аргументы $\xi = x - vt$ и $\eta = x + vt$ в формуле (2.3) суть фазы волн F_1 и F_2 , соответственно. Очевидно, что $d\xi/dt = 0$, когда $\xi = \text{const}$, но тогда $dx/dt = v$. Это означает, что наблюдатель, движущийся в среде со скоростью v , будет все время видеть одну и ту же фазу волны F_1 , т.е. будет отмечать одно и то же состояние волнового движения, соответствующее начальному значению $F_1(\xi)$. Если наблюдатель движется со скоростью $dx/dt = -v$ вместе с волной F_2 , то он будет фиксировать одну и ту же фазу η , т.е. одно и то же значение $F_2(\eta)$, с которого началось движение.

Сказанное выше определяет физический смысл терминов фаза и скорость волны, называемой также фазовой скоростью.

Когда $F_1(\xi)$, например, периодическая функция, а $F_2(\eta) = 0$, что соответствует периодической распространяющейся вправо волне, точка, в которой φ имеет максимум, называется гребнем, а точка, где φ минимальна, впадиной волны.

Волновое уравнение (2.4) относится к классу гиперболических уравнений в частных производных. Поэтому оно обладает двумя вещественными характеристиками в плоскости (x, t) :

$$\frac{dx}{dt} = v \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = -v \quad (2.10)$$

Таким образом, $F_1 = \text{const}$ вдоль первой характеристики, а $F_2 = \text{const}$ вдоль второй.

Описываемый волновым уравнением факт распространения волн в двух противоположных направлениях следует из инвариантности уравнения (2.4) относительно преобразования $x \rightarrow (-x)$, $t \rightarrow (-t)$. Время в уравнении (2.4) обратимо, и поэтому можно изучать будущее волны с таким же успехом, как и прошлое.

Пусть теперь $F_1(x - vt) = a \sin(kx - \omega t)$, $v = \omega/k$, $F_2(x + vt) = 0$, ω и k — постоянны. Тогда $\varphi = a \sin(kx - \omega t)$ представляет собой периодическую бегу-

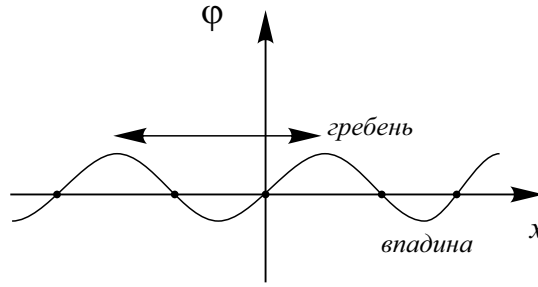


Рис. 2.2. Зависимость $\varphi(x, t)$ от x в фиксированный момент времени t . Термины гребень и впадина отражают геометрическую форму графика функции φ . Все точки с разностью абсцисс, кратной λ , находятся в одинаковой фазе.

пую волну с амплитудой a и фазовой скоростью v , определяемой соотношением $\omega = vk$ или $v = \omega/k$. Такая волна есть решение волнового уравнения (2.4) при начальных условиях $\varphi(0, x) = a \sin kx$, $\partial\varphi(x, 0)/\partial t = -\omega a \cos kx$. В фиксированный момент времени t величина $\varphi(x, t)$ изменяется по x синусоидально (см. рис. 2.2). Легко видеть, что для любого момента времени t точки $x = (4n + 1)\pi/(2k) + vt$ ($n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) соответствуют гребням волны (т.е. максимальным значениям φ), а точки $x = (4n + 3)\pi/(2k) + vt$ — впадинам волны (т.е. минимальным значениям φ). Расстояние между двумя последовательными гребнями или впадинами называется длиной волны и обозначается через λ :

$$\lambda = [(4n + 5)(\pi/2k) + vt] - [(4n + 1)(\pi/2k) + vt] = 2\pi/k.$$

Из последней формулы видно, что, так называемое, волновое число k определяет число волн, укладывающихся на отрезок единичной длины, где в данном случае за единицу длины принято 2π . В фиксированной точке с абсциссой, например, равной x_1 , функция φ колеблется во времени с периодом $T = 2\pi/\omega$, где ω — угловая частота волн. Последняя определяет число волн, прошедших через данную точку в единицу времени, за которую принято 2π . Если теперь взять $F_1(x - vt) = a \sin(kx - \omega t)$, $F_2(x + vt) = a \sin(kx + \omega t)$, то

$$\varphi(x, t) = 2a \cos \omega t \sin kx, \quad (2.11)$$

т. е. можно изучить поведение φ с изменением t и x независимо друг от друга.

Такой выбор F_1 и F_2 соответствует, очевидно, следующим начальным условиям для функции φ :

$$\varphi(x, 0) = 2a \sin kx, \quad \frac{\partial\varphi(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

Точки $x = n\pi/k$ называют узлами волны; в них $\varphi = 0$ все время. В точках $x = (2n + 1)(\pi/2k)$ функция φ максимальна; их называют пучностями волны. Решение (2.11) — результат суперпозиции двух синусоидальных бегущих волн одинаковой амплитуды, длины волны и частоты, распространяющихся навстречу друг другу. Во всех точках x (за исключением узлов) функция φ колеблется с периодом T . Амплитуда функции φ равна $2a$, т.е. сумме амплитуд составляющих волновых компонент F_1 и F_2 . Переноса энергии и количества движения между участками волны, разделенными узлами, нет, поэтому волна, описываемая формулой (2.11) называется стоячей. Для такой волны узлы и пучности характерны.

Выше для напоминания волновых терминов использовалось уравнение частного вида — стандартное линейное волновое уравнение (2.4). Обратимся теперь к общему линейному уравнению в частных производных от двух независимых переменных x и t , которые представим в виде:

$$\mathcal{L}[\varphi] = 0, \quad (2.12)$$

где \mathcal{L} — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами¹. Если заданы начальные условия

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \dots, \quad (2.13)$$

то с помощью преобразования Лапласа по времени уравнение (2.12) можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению от переменной x при допущении, что функции $\varphi_i(x)$ достаточно гладкие. Будем искать решение уравнения (2.12) в следующем виде:

$$\varphi(x, t) = \operatorname{Re} \left(a e^{i(kx - \omega t)} \right), \quad (2.14)$$

предположив, что это уравнение однородное и независимые переменные x и t в него явно не входят. Отметим, что такая запись уравнения означает, что мы воспользовались методом комплексных амплитуд, который применительно к линейным колебаниям был широко использован в лекциях [1] (смотри, в частности, лекцию 5 этой книги). В дальнейшем будем для краткости опускать символ Re , имея ввиду, что наличие комплексных величин в решении подразумевает, что речь идет о комплексной амплитуде соответствующих волн, если иное специально не оговорено. Такой прием широко распространен в физике.

Решение вида (2.14) представляется разумным, поскольку в силу линейности уравнения (2.12) его общее решение можно построить в виде суперпозиции различных Фурье — компонент. Тогда $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$, $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow ik$, и все производные по t

¹Будем следовать в изложении монографии [14].

и x исключаются. В результате вместо уравнения (2.12) приходим к некоторому алгебраическому соотношению

$$\mathcal{D}(\omega, k, A_i) = 0, \quad (2.15)$$

где A_i — параметры, фигурирующие в уравнении (2.12). Соотношение (2.15) называется дисперсионным уравнением, которое формально можно переписать в виде:

$$\omega = \omega(k, A_i). \quad (2.16)$$

В такой записи оно определяет частоту волны ω в зависимости от волнового числа и параметров A_i . Число корней уравнения (2.16) зависит от степени n этого алгебраического уравнения относительно ω . Заметим, что в дисперсионном уравнении не известны ни k , ни ω , а известна лишь их связь². Если k задано, то не известна только ω , и уравнение (2.16) называют характеристическим (оно определяет собственные колебания системы). Опуская зависимость ω от A_i , рассмотрим произвольный корень уравнения (2.16)

$$\omega = \omega(\mathbf{k}). \quad (2.17)$$

Тогда соответствующая Фурье — компонента выражается в виде

$$\varphi(x, t) \sim e^{i[kx - \omega(\mathbf{k})t]},$$

так что временная эволюция $\varphi(x, t)$ полностью определяется свойствами величины $\omega(\mathbf{k})$.

Проанализируем три следующих случая.

1. Если $\omega(\mathbf{k})$ вещественная величина, то $\varphi(x, t)$ есть гармоническая бегущая волна.
2. Если $\omega(\mathbf{k}) = i\omega_2(k)$ чисто мнимая величина, то

$$\varphi(x, t) \sim e^{ikx} e^{\omega_2(k)t},$$

что соответствует нераспространяющейся стоячей волне.

В случае, когда $\text{Im}[\omega(\mathbf{k})] > 0$, функция φ с ростом t экспоненциально возрастает, когда $\text{Im}[\omega(\mathbf{k})] < 0$ эта функция экспоненциально затухает с ростом t . Первый случай соответствует неограниченному росту начального возмущения в системе (говорят, что волна в системе нарастающая или усиливающаяся). Такую систему называют нестабильной относительно данной собственной волны. Во втором случае система стабильна; волна называется спадающей или затухающей.

²Частота может быть задана, и тогда (2.16) превращается в дисперсионное уравнение относительно k . В этом случае речь идет о нормальных (собственных) волнах системы.

3. Если $\omega(\mathbf{k}) = \omega_1(k) + i\omega_2(k)$, где ω_1 и ω_2 вещественны, то

$$\varphi(x, t) \sim e^{i[kx - \omega_1 t]} e^{\omega_2(k)t},$$

При $\omega_2 = \text{Im}(\omega) < 0$ приходим к гармонической волне с экспоненциально убывающей со временем амплитудой (система стабильна). Если $\omega_2 = \text{Im}(\omega) > 0$, то получаем гармоническую волну с нарастающей во времени амплитудой (система нестабильна относительно рассматриваемой собственной волны).

Легко понять, что дисперсионное уравнение важно при рассмотрении отклика системы на возмущение, которое в начальный момент предполагается бесконечно малым.

Дисперсионное уравнение позволяет по-другому классифицировать волны (смотри, например [14]).

Пусть уравнение (2.17) определяет вещественные ω для каждого неотрицательного k ($0 \leq k < \infty$). Тогда, если $d^2\omega/dk^2 \neq 0$, то говорят, что волна диспергирующая; если $d^2\omega/dk^2 = 0$, то говорят, что такая волна не диспергирующая. Данная классификация позволяет ввести новую характеристику волнового движения, называемую групповой скоростью, как

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk}. \quad (2.18)$$

При наличии в системе механизма диссипации амплитуда волны будет затухать со временем, как было показано выше ($\omega = \omega_1 + i\omega_2$, $\omega_2 = \text{Im}(\omega) < 0$). Такие волны иногда называют диссипирующими. Если ω — действительная величина, то волны называют недиссипирующими.

Каков физический смысл понятия групповой скорости? Для предварительного ответа на этот вопрос рассмотрим суперпозицию двух гармонических бегущих волн, немного отличающихся по частоте и волновым числам, но имеющих одинаковые амплитуды:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &= a \cos(kx - \omega t), \\ \varphi_2(x, t) &= a \cos\{(k + \delta k)x - (\omega + \delta\omega)t\}, \end{aligned}$$

где δk и $\delta\omega$ малы. Сложив φ_1 и φ_2 , получим известное выражение для биений двух волн, которое имеет вид:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = [2a \cos\{\frac{1}{2}(x\delta k - t\delta\omega)\}] \cos\{(k + \delta k/2)x - (\omega + \delta\omega/2)t\}.$$

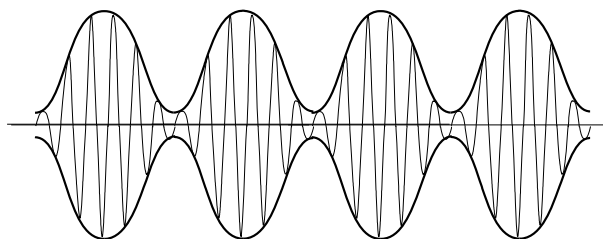


Рис. 2.3. Графическая интерпретация возникновения групп (биений) при сложении двух гармонических бегущих волн.

Выражение в квадратных скобках есть суммарная амплитуда волны биений, которая медленно меняется с периодом $4\pi/\delta\omega$ и характеризуется длиной волны $4\pi/\delta k$, определяемой как пространственный интервал между смежными пучностями. Величина φ теперь колеблется во времени с частотой $(\omega + \delta\omega/2)$, немного отличающейся от ω и имеет длину волны, незначительно отличающуюся от $\lambda = 2\pi/k$.

Напомним, что $\delta\omega$ и δk малы, поэтому период и длина волны биений велики. Результатом такого интерференционного процесса при сложении двух волн появляется ряд периодически повторяющихся групп, представленных на рис. 2.3 (такое повторение имеет место как по времени, так и по пространственным осям). Каждая группа состоит из нескольких волн. Поверхность, на которой амплитуда группы остается постоянной, определяется уравнением

$$x\delta k - t\delta\omega = \text{const},$$

откуда следует, что сами группы распространяются со скоростью

$$dx/dt = \delta\omega/\delta k = d\omega/dk$$

при $\delta k \rightarrow 0$. Таким образом

$$v_{gp} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{\text{Приращение частоты волны в группе}}{\text{Приращение волнового числа в группе}}.$$

Напомним, что по определению фазовая скорость $v_{\phi} = \omega/k$. Поскольку и v_{ϕ} , и v_{gp} зависят от k , то понятно, что в случае, когда $d^2\omega/dk^2 \neq 0$, групповая скорость отличается от фазовой. При этом волны различной длины распространяются с различными групповыми скоростями. Как влияет дисперсия в системе на распространение возмущения, возникающего вблизи $x = 0$ в момент $t = 0$ и представляющего собой суперпозицию ряда гармонических волн различной длины?

Поскольку компоненты возмущения с различными волновыми числами распространяются с различными скоростями, начальное возмущение через некоторое время растянется на некоторый пространственный интервал, который будет расти со временем. В этом случае имеем дело с диспергирующей волной. Если $d^2\omega/dk^2 = 0$, то волна не диспергирующая и $v_{\phi} = v_{gr}$.

2.4 Почему существует дисперсия?

Обсудим подробнее в чем состоит смысл допущений, сделанных при выводе уравнения (2.3). Во-первых, функция $\varphi_n(t)$ была определена в дискретных точках оси x , мы же заменили ее непрерывной. Во-вторых, мы разложили функцию $\varphi(x, t)$ в ряд и отбросили высшие члены разложения (в этом неточность уравнения (2.3)). Кроме того, проделывая эти операции, мы не определили точно, по сравнению с чем a мало. Когда же справедливы сделанные допущения? Получим дисперсионное уравнение для (2.3). Подставляя $\varphi(x, t) \sim \exp(i\omega t - ikx)$ в уравнение (2.3), имеем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + v^2 k^2, \quad (2.19)$$

или

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma}{m} (ka)^2. \quad (2.20)$$

Легко видеть, что уравнение (2.20) получается из (2.24) при $ka \ll 1$, поскольку при этом $\sin^2(ka/2) \approx (ka)^2/4$. Итак, когда мы говорим о малости a по сравнению с характерным пространственным периодом волнового движения, мы говорим о малости ka , и, следовательно, о малости a по сравнению с длиной волны, поскольку $k = 2\pi/\lambda$ ($ka \ll 1$ или $a \ll \lambda$). Для достаточно длинных волн наши допущения справедливы, и цепочку маятников можно рассматривать как среду, описываемую уравнением Клейна — Гордона. Однако все допущения нарушаются, когда $\lambda \approx a$, т.е. длина волны в структуре соизмерима с ее периодом. Таким образом, преобразования дисперсионных уравнений для цепочек из одинаковых частиц при условии $ka \ll 1$ означают переход от волн в упорядоченных структурах к волнам в одномерной сплошной среде.

Напомним, что уравнение (2.4) получается из (2.3), если устремить ω_0 к нулю. Тогда дисперсионное уравнение, соответствующее (2.4), имеет вид

$$\omega = \pm vk, \quad (2.21)$$

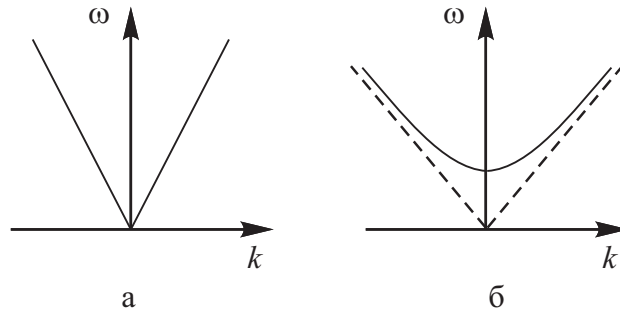


Рис. 2.4. Дисперсионные кривые для сред с линейной дисперсией (а), и с дисперсией, описываемой уравнением (2.20) (б)

где v — фазовая скорость волны. Для анализируемой модели фазовая скорость волны $v = \sqrt{\gamma/m}$, откуда

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{m}} ka. \quad (2.22)$$

Это уравнение совпадает с формулой (8.89), полученной в [1] для акустической ветки колебаний в цепочке из равноудаленных частиц при $ka \ll 1$, если положить в этой формуле $m = M$, а сдвиг фазы колебаний между маятниками приравнять ka . Физически это ясно, так как при стремлении $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ нулю для маятника необходимо, чтобы длина подвеса стремилась к бесконечности, это значит, что длина маятника становится такой большой, что уже не влияет на его колебание, а это и есть цепочка шариков, соединенных пружинками (но $ka \ll 1$!).

Если в дисперсионном уравнении между ω и k зависимость линейная, т.е. справедливо (2.21), то говорят, что в данном случае среда без дисперсии. В этом случае фазовая скорость, определяемая как ω/k , будет постоянной и не зависящей от частоты (рис. 2.4,а). В частности, при $ka \ll 1$ цепочка атомов — шариков в одномерной решетке ведет себя как струна, описываемая волновым уравнением. В этом случае речь идет о распространении упругих волн в сплошной среде со скоростью v , равной скорости звука. Из уравнения (2.20) при ω , немного больших ω_0 , следует, что дисперсионная кривая имеет вид параболы:

$$\omega \approx \omega_0 + AK^2, \quad \text{если} \quad A = \gamma a^2 / (2m\omega_0) \ll 1, \quad (2.23)$$

т.е. вблизи ω_0 дисперсия проявляется. В то же время интересно, что при достаточно больших ω дисперсии не будет (линейная зависимость k). Попробуем систематизировать полученные нами результаты, чтобы понять, с чем связано существование дисперсии в среде.

Вернемся к уравнению Клейна — Гордона, которое описывает распространение одномерных волн в среде с дисперсией, в частности в цепочке маятников с

собственными частотами ω_0 , расположенных на расстояниях $a \ll \lambda$ (дисперсионная кривая — сплошная кривая на рис. 2.4, б). Мы уже говорили, что при $\omega_0 \rightarrow 0$ дисперсия исчезает: длина нитей маятников так велика, что у них нет собственного периода колебаний, цепочка превращается в данном случае в упругую струну. Дисперсия исчезла, когда исчез собственный временной масштаб, характеризующий среду. Когда каждый маятник имеет собственный период $T = 2\pi/\omega_0$, “среда” из маятников не будет воспринимать частоту меньше собственной. На этой критической частоте все маятники будут колебаться синфазно: волн нет, существуют только колебания.

В 8-й лекции учебника [1] выведена формула (8.71), определяющая частоты колебаний в цепочке связанных идентичных осцилляторов, при условии, что сдвиг фазы колебаний между двумя соседними осцилляторами равен ψ . Эта формула с заменой обозначения жесткости пружины с k на γ , имеет вид

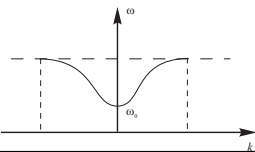
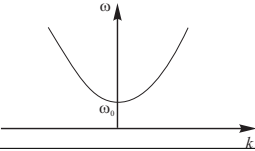
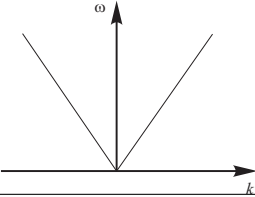
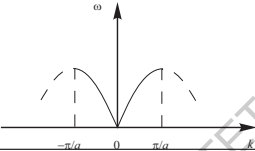
$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4\gamma}{m} \sin^2 \frac{\psi}{2} \quad (2.24)$$

Сдвиг фазы колебаний ψ связан с λ — длиной волны, распространяющейся по цепочке, формулой $\psi = 2\pi\lambda/a$, причем соотношение между a и λ может быть любым. Из формулы (2.24) нетрудно видеть, что дисперсия в системе сохраняется даже при $\omega_0 \rightarrow 0$. Действительно, в этом случае мы приходим к цепочке из шариков, связанных пружинками. В этой среде дисперсия существенна, пока a не мало по сравнению с λ . Таким образом, в “решетке” из шариков дисперсия определяется собственным пространственным масштабом — периодом “решетки”. Что касается цепочки из связанных маятников, когда $\omega_0 \neq 0$ и расстояние a сравнимо с λ , то дисперсия определяется и временным и пространственным масштабами. Аналогично характеризуется дисперсия и, например, для цепочки из магнитных стрелок, где наряду с периодом a фигурирует частота ω_H , связанная с существованием внешнего магнитного поля. Таким образом можно сказать, что существование дисперсии в среде связано с наличием в ней собственных, независимых от параметров волны пространственных или временных масштабов. Описанные выше результаты для цепочки связанных маятников сведены в таблицу 2.1.

Если в среде нет никаких характерных пространственных или временных масштабов (как, например, при распространении звука в воде или электромагнитных волн в вакууме), т.е. нет характерных частот или периодов, то распространяющаяся несинусоидальная волна искажаться не будет. Дисперсия в этом случае отсутствует.

Если, например, в воду “напустить” пузырьков, т.е. ввести некий пространственный масштаб a — расстояние между пузырьками или размер пузырьков, то

Таб. 2.1

Дисперсионное уравнение	ω - k диаграмма	Существует ли дисперсия?
$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4\gamma}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$ Система связанных маятников		Дисперсия есть, поскольку существуют и временной и пространственный собственные масштабы ($2\pi/\omega_0$ и a)
$ka \ll 1, \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\gamma}{m}(ka)^2$ Сплошная среда, описываемая уравнением Клейна-Гордона		Дисперсия есть, так как существует собственный временной масштаб $2\pi/\omega_0$
$ka \ll 1, \omega_0 \rightarrow 0,$ $\omega = \pm \sqrt{\frac{\gamma}{m}}ka$ Сплошная среда, описываемая волновым уравнением		Дисперсии нет, поскольку исчезли собственные временной и пространственной масштабы
$\omega_0 \rightarrow 0, \omega^2 = \frac{4\gamma}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$ Система связанных одинаковых шариков		Дисперсия есть, так как существует собственный пространственный масштаб a

для волны $\lambda \gg a$, искажений при распространении не будет, если же $\lambda \sim a$, то волна искажается, в системе есть дисперсия. В кристалле, скажем, волна низкой частоты (длина волны много больше расстояния между ионами) распространяется без искажений, а для высоких частот уже имеет значение расстояние между ионами — дискретность “среды”.

2.5 Пространственная и временная дисперсии

Дисперсия, связанная с наличием в среде временных масштабов, обычно называется временной, а с наличием пространственных масштабов — пространственной. Заметим, что такая классификация удобна лишь в электродинамике, где можно говорить отдельно об уравнениях среды и поля. На формальном языке уравнений дисперсия — это нелокальная зависимость между различными физическими переменными во времени и пространстве. Так, в электродинамике сплошных сред пространственная дисперсия связана с тем, что электрическая индукция \mathbf{D} в данной точке пространства определяется значением напряженности \mathbf{E} электрического поля не только в этой точке, но и в некоторой ее окрест-

ности, т.е. \mathbf{D} и \mathbf{E} связаны нелокально в пространстве:

$$\mathbf{D}_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}),$$

где $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ — тензор комплексной диэлектрической проницаемости [15].

Формально можно ввести следующие определения: в электродинамике сплошных сред среда имеет пространственную дисперсию, если ее диэлектрическая проницаемость зависит от волнового вектора; если же проницаемость зависит от частоты, то мы имеем дело с частотной, или временной дисперсией.

Последняя связана также с нелокальностью связи \mathbf{D} и \mathbf{E} во времени, причем временная дисперсия обычно велика, поскольку собственные частоты среды попадают в рассматриваемый интервал частот [15]. Пространственную дисперсию следует принимать во внимание, например, в физике изотропной плазмы, когда длина волны соизмерима с радиусом Дебая, в теории проводящих сред при учете соударений, когда длина свободного пробега порядка длины волны.

В кристаллооптике пространственная дисперсия приводит к качественно новым эффектам таким, как естественная оптическая активность (гиротропия), оптическая анизотропия кубических кристаллов [15,16]. Укажем еще, что в плазме, например, групповая скорость продольных волн становится отличной от нуля также из-за пространственной дисперсии (мы вернемся к этому вопросу в дальнейшем).

Следует также подчеркнуть, что, хотя пространственная дисперсия — результат существования собственного пространственного масштаба в среде, т.е. результат дискретности “среды”, ее учет можно провести и в рамках модели сплошной среды, если феноменологически найти соотношения между физическими переменными, учитывающие нелокальность их связи в пространстве. Таким образом, чтобы учесть пространственную дисперсию, нужно правильно построить модель среды.

Рассмотрим в качестве примера распространение электромагнитной волны в длинной линии, изображенной на рис. 2.5 (см. задачу 4.23 в [17]).

Если связь между ячейками отсутствует, то справедливы телеграфные уравнения

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial t} = -C\frac{\partial U}{\partial t}, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -L\frac{\partial I}{\partial t},$$

которые легко преобразуются в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 0,$$

так что в анализируемой модели цепочки дисперсии нет. Однако при наличии индуктивной связи между ячейками зависимость между магнитным потоком Φ и

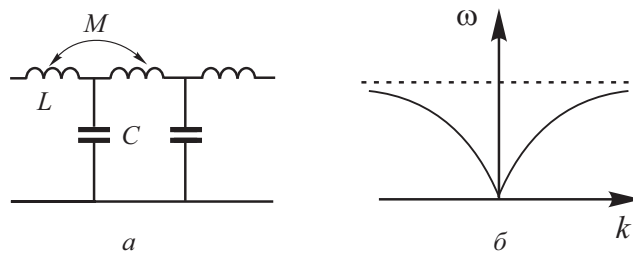


Рис. 2.5. Длинная линия с индуктивной связью M между ячейками и соответствующая дисперсионная характеристика

током I выражается материальным уравнением $\Phi = LI - M\partial^2 I/\partial x^2$, из которого следует нелокальная связь между этими величинами (наличие пространственной производной от тока). Тогда

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{1}{LC} \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = M \frac{\partial^4 I}{\partial t^2 \partial x^2},$$

Соответствующее дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 k^2 / (1 + \alpha k^2), \quad (2.25)$$

где $\omega_0^2 = 1/LC$, $\alpha = M/L$. (Обратите внимание, что k в формуле (2.25) — безразмерная величина, так как в цепочке мы всё считаем не на единицу длины, а на ячейку; величины L и C измеряются соответственно в генри и фарадах на ячейку; чтобы перейти к размерной величине, надо умножить k на размер ячейки a в соответствующих единицах длины). Если $\alpha \ll 1$, то, сохраняя члены первого порядка малости по α , из (2.25) получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2 k^2 (1 - \alpha k^2). \quad (2.26)$$

Сопоставим полученный результат с соответствующим для одномерной цепочки из одинаковых шариков, т.е. с дисперсионным уравнением $\omega^2 = 4\gamma/m \sin^2(ka/2)$. Положим ka малым и разложим $\sin^2(ka/2)$ в ряд, ограничиваясь членами порядка $(ka)^4$; тогда

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m} (ka)^2 \left[1 - \frac{(ka)^2}{12} \right]. \quad (2.27)$$

Так как в уравнении (2.26) k — величина безразмерная, то обозначая ka через k и полагая $\omega_0 = \gamma/m$, $\alpha = 1/12$, приходим от уравнения (2.27) к уравнению (2.26).

Таким образом, оба подхода — и дискретный, и феноменологический учет нелокальности связи между физическими величинами — приводят к правильному описанию пространственной дисперсии. Пространственная дисперсия проявляется и вблизи частоты ω_0 (см. рис. 2.4, б и формулу (2.23)). В уравнении (2.25)

знак α быть любым. Тогда если $\omega^2 = \omega_0^2 k^2 / (1 - \alpha k^2)$, то при $\alpha \sim k^{-2}$ фазовая скорость волны $v_f = \omega/k \rightarrow \infty$ и групповая скорость (скорость переноса энергии в среде без потерь) $v_{gp} = d\omega/dk \rightarrow \infty$. Следовательно информация от одной точки к другой передается мгновенно. Подумайте, с какими идеализациями модели связан возникший парадокс.

2.6 О квазичастицах

Основываясь на дуализме волн и частиц, можно ввести кванты энергии полей в макроскопических телах — квазичастицы. Поясним эту аналогию на примере цепочки из одинаковых шариков, связанных пружинами, для которой $\omega = 2\sqrt{\gamma/m} \sin(ka/2)$. Исходя из квантовых представлений, гамильтониан для такой цепочки имеет вид:

$$\mathcal{H} = \sum \hbar\omega_k (a_k^\dagger a_k + 1/2), \quad (2.28)$$

где $a_k^\dagger a_k = N_k$ — оператор числа бозонов в состоянии k , а сумма берется по всем допустимым значениям вектора \mathbf{k} . Эти значения k обычно определяются из периодических условий $q_{i+M} = q_i$ для координаты (условие замкнутости цепочки; M — число частиц в цепочке). Тогда допустимые значения вектора суть $k = 2\pi n/(Ma)$, где n — любое целое число между $-M/2 + 1$ и $M/2$. В выражении (2.28)

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}} \sin(\pi n/M), \quad (2.29)$$

т. е. полученная из квантовых соображений формула в точности совпадает с соответствующей формулой классической теории.

Собственные значения энергии равны

$$\mathcal{E} = \sum_k \hbar\omega_k (n_k + 1/2), \quad (2.30)$$

где k пробегает все значения из M положительных чисел.

Итак, поведение одномерной цепочки из одинаковых частиц можно представить набором нормальных колебаний, каждое из которых соответствует своему гармоническому осциллятору. Таким образом, каждому нормальному колебанию соответствует определенное волновое число k и определенная собственная частота ω_k , а энергетическое состояние осциллятора задается квантовым числом его нормального колебания. Уже одно то, что энергия нормального колебания с частотой ω_k принимает значения, выражающиеся целыми числами, умноженными

на $\hbar\omega_k$ (если отсчитывать не от нуля, а от основного уровня энергии $\hbar\omega_k/2$), наводит на мысль о квантовой структуре процесса. Получающиеся кванты и называют квазичастицами. Одновременно могут возбуждаться и несколько нормальных колебаний, что соответствует присутствию в системе нескольких квазичастиц.

В рассматриваемом нами случае простейшей модели твердого тела (в одномерной цепочке из одинаковых частиц) происходят упругие колебания атомов в кристаллической цепочке.

В кристалле существуют различные типы упругих волн, которые в первую очередь различаются законом дисперсии. Простейшие из них — акустические волны. Им соответствует при малых ka ($a \ll L$) дисперсионное уравнение (2.22), которое удобно переписать в виде $\omega_k = vk$, где $v = \sqrt{\gamma a^2/m}$ имеет смысл скорости звука. С квантовой точки зрения, как мы видели, энергия и импульс, связанные с каждой нормальной волной, принимают только дискретные значения, пропорциональные $\varepsilon = \hbar\omega_k$ и $p = \hbar k$. Каждую такую волну можно рассматривать как квазичастицу с импульсом p (при столкновении в квазичастиц кристаллах квазиимпульс не сохраняется) и энергией ε . Эти квазичастицы называют фононами — квантами звука. Из сказанного следует закон дисперсии для длинноволновых фононов: $\varepsilon = vp$. В квантовой теории поля, решая классические уравнения движения системы, находят нормальные колебания, а потом называют каждое из них квантовым осциллятором с собственными значениями энергии $\mathcal{E} = \hbar\omega(n+1/2)$ [18,19]. Квантовые нормальные колебания (квазичастицы) имеют разные названия.

Мы уже говорили о фононах, но, пожалуй, самая известная квазичастица — фотон: квант в теории электромагнитного поля с энергией $\varepsilon = \hbar c$, где c — скорость света в вакууме. Волны в системе электронных спинов, связанных между собой обменными силами, называются спиновыми, а соответствующие им квазичастицы называют магнонами. Коллективные плазменные колебания электронного газа в металлах, связанные с кулоновскими силами, часто называют плазмонами. В полупроводниках существуют нейтральные квазичастицы — экситоны. Об упомянутых квазичастицах и многих других (поляронах, флукуонах и т.п.) можно прочитать в книге [20].

В заключение этого раздела кратко напомним основные отличия бозонов и фермионов (в формуле (2.28) N_k — оператор числа бозонов в состоянии k).

Бозон — частица, обладающая внутренним угловым моментом, или спином, который характеризуется целочисленными значениями спинового квантового числа, включая нуль. Примерами бозонов могут служить α — частица, атом гелия, фотон. Бозоны не подчиняются принципу запрета Паули, и в одном кванто-

вом состоянии может находиться любое число бозонов. Они подчиняются общему принципу Паули (принцип неразличимости одинаковых частиц), который требует, чтобы волновая функция была симметричной по отношению к перестановке любой пары одинаковых бозонов. Поскольку одно состояние могут занимать много бозонов, при низких температурах возникают такие специфические явления, как сверхтекучесть и сверхпроводимость (когда пары электронов ведут себя как бозоны). Работа лазеров возможна именно потому, что фотон является бозоном, так как интенсивный монохроматический пучок света состоит из большого числа фотонов в одном и том же состоянии.

Фермион — частица, обладающая собственным спиновым угловым моментом, характеризуемым полуцелым спиновым квантовым числом. Примерами фермионов являются электрон, протон, нейтрон, нейтрино. Фермионы подчиняются принципу запрета Паули: в одном квантовом состоянии может находиться не более одного фермиона.

Лекция 3

Волны в распределенных системах с границами

Влияние граничных условий. Отражение и прохождение волны в среде со скачкообразным изменением параметров. Струна с закрепленными концами. Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем.

3.1 Влияние граничных условий. Отражение и прохождение волны в среде со скачкообразным изменением параметров

До сих пор мы рассматривали безграничные среды. Обратимся теперь к распределенным системам с границами. Начнем с рассмотрения поведения продольной волны на границе двух сред. Пусть плоскость $x = 0$ (рис. 3.1) — граница раздела двух сред, обладающих различными свойствами. Если речь идет, например, о различии упругих свойств, то это жидкость и металл, жидкость и газ (в этом случае плоскость раздела на рисунке должна быть горизонтальной) и т.п. Пусть слева к границе приходит бегущая волна

$$\varphi = Ae^{i(\omega t - kx)}, \quad (3.1)$$

где $k = \omega/v_1$, v_1 — фазовая скорость волны слева от границы. Далее будем отмечать индексом 1 величины, относящиеся к среде, расположенной слева от границы, а индексом 2 — справа от границы. Что же происходит на границе? Ответ можно получить, исходя из физических условий на границе, которые будут отличаться для волн разной природы. Однако, поскольку волновые процессы описываются уравнением (2.4) — уравнением в частных производных второго порядка — граничные условия должны быть наложены на величины φ и $\partial\varphi/\partial x$. Если граница не одна (например, струна, закрепленная на концах), то условия на функцию $\varphi(x, t)$ следует задать на обоих концах. Для струны длины l , закрепленной на концах $\varphi(0, t) = \varphi(l, t) = 0$. Очевидно, что в общем случае на границе возникают отраженная и проходящая волны.

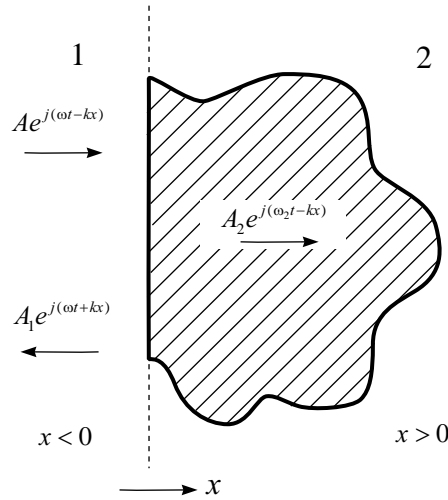


Рис. 3.1. Схематическое изображение границы двух сред и направлений распространения падающей, отраженной и преломленной волны ($k_1 = \omega_1/v_1$; $k_2 = \omega_2/v_2$).

Для определенности рассмотрим явления отражения и прохождения волны на границе раздела двух упругих сред с разными характеристиками. С этой целью рассмотрим бегущую вдоль натянутой струны волну вида (3.1), которая наталкивается на скачкообразное изменение плотности струны (рис. 3.1 соответствует этой ситуации).

Рассмотрим вертикальное смещение y малого отрезка однородной струны (рис. 3.2,а). Понятно, что это смещение изменяется со временем t и зависит от положения той точки струны, за которой мы следим, т. е. $y = y(x, t)$. Будем анализировать колебания только в плоскости рис. 3.2,а, и предположим, что вдоль струны существует постоянное напряжение (на самом деле она обладает небольшой растяжимостью), а действие силы тяжести не учитывается. Длина смещенного элемента равна

$$ds = \sqrt{1 + (\partial y / \partial x)^2} dx \quad (3.2)$$

Будем рассматривать отрезок струны малой протяженности и колебания малой амплитуды, т. е. величина $\partial y / \partial x$ столь мала, что ее квадратом под корнем в формуле (3.2) можно пренебречь по сравнению с единицей. Таким образом $ds \approx dx$, а масса элемента струны равна $\rho ds \approx \rho dx$, где ρ — линейная плотность струны. Уравнение движения элемента струны следует из второго закона Ньютона. Какая же сила действует на элемент струны? Из рис. 3.2,а видно, что сила, действующая на элемент $ds \approx dx$ в положительном направлении оси y равна

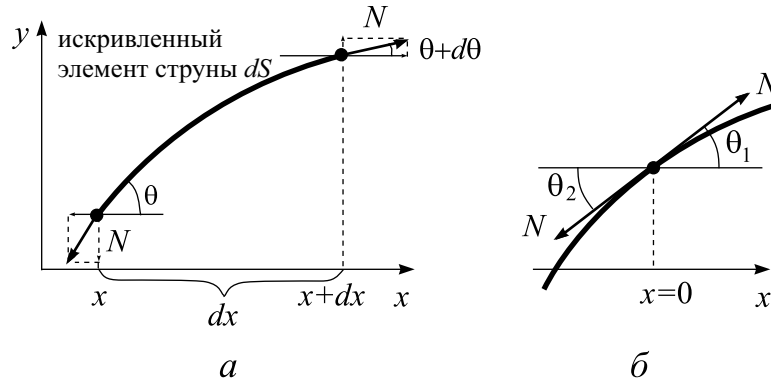


Рис. 3.2. а) Увеличенное изображение смещенного элемента ds струны. Сила натяжения N действует в точке x под углом θ , а в точке $x + dx$ — под углом $\theta + d\theta$ к оси x . б) К объяснению второго граничного условия.

$N \sin(\theta + d\theta) - N \sin \theta$. Именно эта сила равна произведению массы на ρdx на ускорение $\partial^2 y / \partial t^2$. Угол θ по предположению мал, поэтому $\sin \theta = \text{tg } \theta = \partial y / \partial x$ и искомая сила

$$N_y = N \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right],$$

где индексы относятся к точке вычисления производной.

Понятно, что в наших приближениях

$$N_y = N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Теперь второй закон Ньютона для малого элемента струны имеет вид

$$\rho dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx,$$

или

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{N}{\rho} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку N/ρ имеет размерность квадрата скорости, мы вновь пришли к волновому уравнению (9.3), в котором $\varphi = y$, а $\sqrt{N/\rho} = v$. Для струны со скачкообразным изменением плотности математическая модель должна включать волновое уравнение для областей $x < 0$ и $x > 0$ и условия согласования их решений при $x = 0$ и то, что слева $x < 0$ на границу раздела приходит бегущая волна вида (3.1) с волновым числом $k = \omega/v_1$ ¹.

¹При изложении решения этой задачи будем следовать книге [21]

В соответствии со сказанным, введем $\varphi(x, t) = \varphi_1(x, t)$, при $x < 0$ и $\varphi(x, t) = \varphi_2(x, t)$ при $x > 0$. Для функций $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$ справедливы уравнения:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1(x, t)}{\partial t^2} - v_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x < 0), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_2(x, t)}{\partial t^2} - v_2^2 \frac{\partial^2 \varphi_2(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (x > 0), \quad (3.5)$$

которые следует дополнить условиями на границе. Очевидно, что несмотря на различие плотности при $x < 0$ и $x > 0$ в точке $x = 0$ струна не разрывается, т.е.

$$\varphi_1(x, t)|_{x=0} = \varphi_2(x, t)|_{x=0}. \quad (3.6)$$

В терминологии книги [5] это условие отражает сплошность и непроницаемость среды. Для получения второго условия для первых производных обратимся к рис. 3.2, *b*. На точку $x = 0$ стыковки частей струны с разной плотностью слева перпендикулярно оси x действует сила $(-N \sin \theta_1)$, а справа — сила $(+N \sin \theta_2)$. Обозначения углов и амплитуд волн ясны из рисунка. Точка струны, соответствующая $x = 0$, имеет нулевую массу, поэтому силы $(-N \sin \theta_1)$ и $(+N \sin \theta_2)$ уравновешивают друг друга, т.е. $\theta_1 = \theta_2$ (в терминологии книги [5] имеет место равенство действия и противодействия). Таким образом, касательные к частям струны слева и справа в точке $x = 0$ совпадают, что означает выполнения равенства

$$\left. \frac{\partial \varphi_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \varphi_2(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (3.7)$$

Мы уже указывали, что из общих физических соображений на границе должна возникнуть отраженная и проходящая волны, поэтому решение можно искать в виде:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, t) &= A e^{i(\omega t - kx)} + A_1 e^{i(\omega_1 t + k_1 x)}, \\ \varphi_2(x, t) &= A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставим соотношения (3.8) в условия на границе (3.6) и (3.7). Тогда

$$\begin{aligned} A e^{i\omega t} + A_1 e^{i\omega_1 t} &= A_2 e^{i\omega_2 t}, \\ -i \frac{\omega}{v_1} e^{i\omega t} + i \frac{\omega_1}{v_1} A_1 e^{i\omega_1 t} &= -i \frac{\omega_2}{v_2} A_2 e^{i\omega_2 t}, \end{aligned}$$

где оба соотношения выполняются при любом t . Из полученных соотношений следует, что $\omega = \omega_1 = \omega_2$ (впрочем, это равенство частот очевидно, поскольку условия (3.6) и (3.7) должны выполняться при любом t). Учитывая, что $\omega = \omega_1 =$

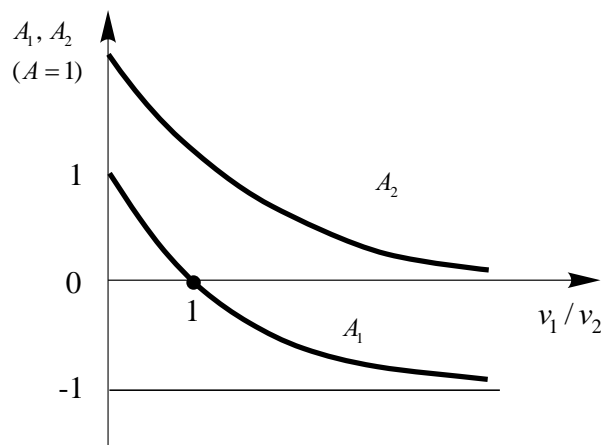


Рис. 3.3. Зависимость амплитуд отраженной (A_1) и прошедшей (A_2) волн от отношения скоростей v_1/v_2 волн в разных средах [21]

ω_2 , получим

$$\begin{aligned} A + A_1 &= A_2, \\ -\frac{\omega}{v_1} A + \frac{\omega}{v_1} A_1 &= -\frac{\omega}{v_2} A_2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1 - v_1/v_2}{1 + v_1/v_2} A, \\ A_2 &= \frac{2}{1 + v_1/v_2} A, \end{aligned} \tag{3.9}$$

и решения $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$ найдены. На рис. 3.3 представлены зависимости амплитуд A_1 и A_2 отраженной и прошедшей волн от отношения v_1/v_2 . Из рисунка видно, что для однородной струны, когда $v_1 = v_2$, отраженной волны нет, а прошедшая — продолжение падающей. Поскольку $v = \sqrt{N/\rho}$, при очень большой плотности $\rho_2 \rightarrow \infty$ струны во второй ее части ($x > 0$) $v_2 \rightarrow 0$ и $v_1/v_2 \rightarrow \infty$. Напротив, при очень малой плотности ($\rho_2 \rightarrow 0$) $v_2 \rightarrow \infty$ и $v_1/v_2 \rightarrow 0$. В последнем случае волна отражается с той же амплитудой и фазой, что и падающая, в первом — с той же амплитудой, но противоположной фазой. Амплитуда прошедшей волны, соответственно, либо удваивается, либо равна нулю. Заметим, что этих два предельных случая можно рассматривать как отражения от свободно и закрепленного конца $x = 0$ струны в области $x < 0$: в первом случае падающая волна отражается, лишь изменив направление распространения, во втором еще меняет фазу на противоположную.

3.2 Струна с закрепленными концами²

Если струна закреплена на концах, то в ней можно возбудить стоячие волны. В лекции 2 мы рассматривали стоячие волны, которые возникали как суперпозиция двух гармонических бегущих навстречу друг другу волн одинаковой амплитуды $Ae^{i(\omega t - kx)}$ и $Ae^{i(\omega t + kx)}$. Результат сложения таков:

$$\varphi(x, t) = Ae^{i(\omega t - kx)} + Ae^{i(\omega t + kx)} = 2Ae^{i\omega t} \cos kx. \quad (3.10)$$

Как видно из формулы (3.10), у получившийся волны колебания в каждой точке x совершаются с одной и той же частотой ω , но с разной амплитудой, зависящей от x по закону $2A \cos kx$. Формула (3.10) наталкивает на мысль, что в общем случае для стоячей волны разумно написать выражение вида:

$$\varphi(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad (3.11)$$

где $X(x)$ — функция только x , $T(t)$ — только t .

Общая математическая модель поведения струны длины l с закрепленными концами следующая.

Задано волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (0 \leq x \leq l) \quad (3.12)$$

и начальные и граничные условия на функцию $\varphi(x, t)$. Начальные условия имеют вид:

$$\varphi(x, t)|_{t=0} = \Phi(x), \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(x), \quad (3.13)$$

граничные —

$$\varphi(x, t)|_{x=0} = 0, \quad \varphi(x, t)|_{x=l} = 0. \quad (3.14)$$

Задача далее решается методом Фурье разделения переменных. Напомним суть метода. Сначала ищутся решения вида (3.11) уравнения (3.12) при граничном условии (3.14). После этого решение задачи (3.12) – (3.14) ищется в виде суперпозиций полученных решений вида (3.11). Оказывается, что суперпозиция всегда может быть подобрана так, чтобы удовлетворялись начальные условия (3.13). Граничные условия и само волновое уравнение удовлетворяются автоматически, поскольку каждое слагаемое суперпозиции им удовлетворяет.

²Эта задача обсуждается во всех учебниках по уравнениям математической физики. Мы при изложении ориентируемся на книгу [21].

Подставив соотношение (3.11) в уравнение (3.12), находим, что

$$\frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = v^2 \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}.$$

Так как левая часть равенства не зависит от x , а правая — от t , то они равны постоянной, которую обозначим α . Тогда получим пару уравнений

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \alpha T = 0, \quad \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{v^2} X = 0. \quad (3.15)$$

Функция $\varphi(x, t)$, определяемая соотношением (3.11) должна удовлетворять краевым условиям (3.14), что возможно только при $\alpha > 0$ в уравнениях (3.15). При $\alpha > 0$ общее решение уравнений (3.15) имеет вид:

$$\begin{aligned} T &= A \sin(\sqrt{\alpha}t) + B \cos(\sqrt{\alpha}t), \\ X &= C \sin(\sqrt{\alpha}x/v) + D \cos(\sqrt{\alpha}x/v). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) = X(x) \cdot T(t) &= [A \sin(\sqrt{\alpha}t) + B \cos(\sqrt{\alpha}t)] \cdot \\ &\cdot [C \sin(\sqrt{\alpha}x/v) + D \cos(\sqrt{\alpha}x/v)]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поскольку решение (3.16) должно удовлетворять краевым условиям (3.14), находим:

$$D = 0, \quad C \sin(\sqrt{\alpha}l/v) = 0 \quad (3.17)$$

Очевидно, что $C \neq 0$, так как в противном случае приходим к тривиальному нулевому решению, поэтому из соотношений (3.17) получаем, что

$$\sqrt{\alpha} = \frac{\pi n v}{l}, \quad \text{где } n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.18)$$

Тогда, окончательно,

$$\varphi_n(x, t) = \left(A_n \sin \frac{\pi n v}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n v}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.19)$$

Будем далее искать решение исходной задачи (3.12)-(3.14) в виде бесконечной суммы всех стоячих волн (3.19), что дает:

$$\varphi(x, t) = \sum_n \left(A_n \sin \frac{\pi n v}{l} t + B_n \cos \frac{\pi n v}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.20)$$

где A_n и B_n пока произвольны. Подставляя соотношение (3.20) в начальные условия (3.14), находим:

$$\sum_n B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \Phi(x), \quad \sum_n \frac{\pi n v}{l} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \Psi(x) \quad (3.21)$$

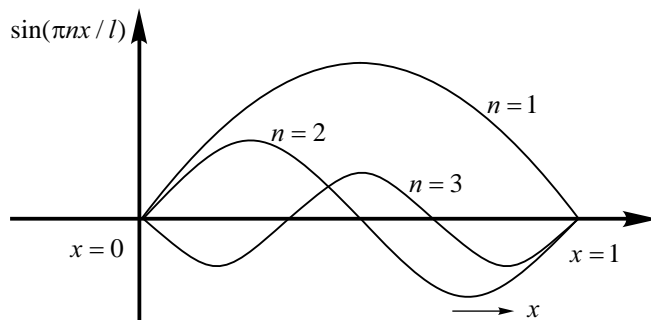


Рис. 3.4. Первые три собственные формы струны, закрепленной на концах.

Соотношения (3.21) можно рассматривать как разложения в ряд Фурье функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$.

Очевидно, что при $n \neq m$

$$\int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x dx = 0,$$

а при $n = m$ этот интеграл равен $l/2$. Учитывая это, умножим каждое из равенств (3.21) на $\sin(\pi mx/l)$ и проинтегрируем полученное по x от 0 до l . Тогда

$$B_m = \frac{2}{l} \int_0^l \Phi(x, t) \sin \frac{\pi m}{l} x dx,$$

$$A_m = \frac{2}{\pi m v} \int_0^l \Psi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x dx.$$
(3.22)

Мы получили набор стоячих волн с дискретным спектром длин волн $\lambda_n = 2l/n$ и соответствующим спектром частот $\omega_n = \pi n v/l$. Все точки каждой такой стоячей волны синхронно колеблются с частотой $\omega_n = \pi n v/l$, а ее амплитуда гармонически изменяется с координатой x как $\sin(\pi n x/l)$. Частоты ω_n — собственные частоты струны, закрепленной на концах, а функции $\sin(\pi n x/l)$ — собственные формы струны. Наименьшая частота ω_1 соответствует основному тону, частота ω_2 — первой гармонике, ω_3 — второй и т.д. (см. рис 3.4). Таким образом, колебания струны определяются спектром собственных частот и соответствующими им амплитудами (3.22).

Рассмотрим, следуя книге [21], колебания рояльной струны, спектр частот которой определяет основной тон звука и его окраску, зависящую от гармоник.

При одинаковом основном тоне окраска звука может быть совершенно разной: основной тон определяется длиной, натяжением и плотностью струны, а спектр зависит от того, как возбудили колебания (в частности, для рояля от того, где молоточек ударил по струне)³. Попробуем понять, как зависит спектр колебания струны от места ее удара $x = \xi$. Это важно, поскольку разница звучаний рояля Бехштейна и Стенвея объясняется прежде всего различием мест удара молоточка по струне.

Для математического описания колебаний в первоначально неподвижной натянутой струне, получившей сосредоточенный на очень малой длине удар, передавший ее импульс p , будем исходить из уравнений и условий (3.12) — (3.14). Следует лишь конкретизировать вид функций $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$.

Если считать удар мгновенным и точечным, то $\Phi(x) = 0$, так как при этих условиях за время удара струна не сумеет переместиться. Струне при ударе передается импульс, поэтому

$$\int_0^l \rho \Psi(x) dx = p, \quad (3.23)$$

где ρ — постоянная плотность струны, а $\Psi(x)$ — скорость струны после удара в точке ξ . Будем считать, что удар сосредоточен в исчезающе малой окрестности ε , вне которой скорость $\Psi(x)$ сразу после удара равна 0. Поэтому условие (3.23) можно записать в виде:

$$\int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \Psi(x) dx = \frac{p}{\rho} \quad (\varepsilon > 0) \quad (3.24)$$

и $\Psi(x) = 0$ при $x \notin [\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon]$.

При неограниченном уменьшении длины отрезка, по которому ударяет молоточек, на нем функция $\Psi(x)$ неограниченно растет, но все время выполняется условие (3.23).

Итак, функция $\Phi(x) = 0$, а функция $\Psi(x)$ всюду равна нулю, за исключением исчезающе малой окрестности точки $x = \xi$ и для нее имеет место условие (3.23). С учетом сказанного вычислим по формулам (3.22) амплитуды A_m и B_m . Очевидно, что $B_m = 0$, а

$$A_m = \frac{2}{\pi m v} \int_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon} \Psi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x dx \approx \frac{2p}{\pi m \rho v} \sin \frac{\pi m}{l} \xi, \quad (3.25)$$

³Заметим, что дело не только в том, каков спектр, но и в том, как колебания превращаются в звук. Этот вопрос здесь не рассматривается.

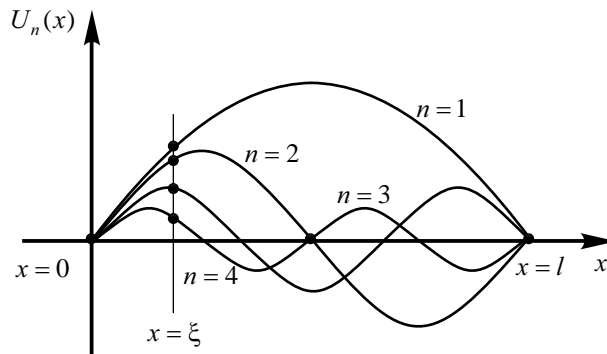


Рис. 3.5. Распределение вдоль струны стоячих волн на частоте основного тона $n = 1$ и на частотах первых трех гармоник $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

где формула тем точнее, чем меньше ε .

Задача 3.1. Задача. Считая, что $\Psi(x) = p/\rho\delta(x - \xi)$, где δ — обобщенная δ — функция (δ — функция Дирака), найдите решение задачи о струне рояля.

Из соотношения (3.25) следует, что максимальная амплитуда колебаний не основной частоте $\pi v/l$ и на частотах гармоник $2\pi v/l$, $3\pi v/l \dots$ равны, соответственно, $2p/(\pi\rho v) \sin(\pi\xi/l)$, $p/(\pi\rho v) \sin(2\pi\xi/l)$ и $2p/(3\pi\rho v) \sin(3\pi\xi/l) \dots$. Распределения стоячих волн вдоль струны для основного тона $n = 1$ и первых трех гармоник $n = 2$, $n = 3$ и $n = 4$ представлены на рис. 3.5. Как из него следует, основной тон преобладает при ударе по центру струны, но при этом не возбуждаются вторая и четвертая гармоники. Для того, чтобы эффективно возбуждись несколько первых гармоник, следует ударить недалеко от концов струны. Более того, чем меньше удаление от точки закрепления 1 струны, тем больше гармоник возбуждятся. Именно так делается в рояле, и именно этим различаются разные инструменты. Процитируем по этому поводу книгу [21]. “У Стенвея это расстояние меньше, чем у Бехштейна, и поэтому его “звонче”, но зато звук Бехштейна “бархатнее” и “мягче”. Звук скрипичной струны и фортепианной одного и того же основного тона сильно различаются и это отличие также объясняется различностью представительности гармоник.

Наше ухо устроено так, что звук воспринимает его как спектр. Музыкальные звуки до, ре, ми, ... имеют спектр, состоящий из основного тона и гармоник. Музыкальные аккорды имеют спектр, составленный из спектров, входящих в него музыкальных звуков ...

Почему определенные последовательности звуков вызывают у нас такие сильные эмоции, пожалуй, одна из величайших загадок природы. Хотя некоторые

необходимые для этого требования известны и составляют предмет теории музыки”.

3.3 Волны в одномерном резонаторе. Резонанс волновых систем

В лекции 2 мы обсуждали некоторые свойства общего линейного уравнения в частных производных $L[\varphi] = 0$, где L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Конкретизируем вид L , сохранив, однако, определенную общность.

Пусть уравнение, описывающее распространение волн в среде, можно записать следующим образом:

$$A \frac{\partial u}{\partial t} + B \frac{\partial u}{\partial x} + Cu = 0, \quad (3.26)$$

где A , B и C — матрицы, а u — вектор. Будем искать решение (3.26) в виде

$$u = \Psi e^{i(\omega t - kx)}, \quad (3.27)$$

$\Psi(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ — комплексный вектор (поляризационный вектор), компоненты которого Ψ_i есть коэффициенты распределения, характеризующие соотношение амплитуд различных физических переменных в гармонической волне.

Подставляя (3.27) в (3.26) приходим к алгебраической системе уравнений для Ψ_i . Условие существования нетривиального решения этой системы и будет искомым дисперсионным уравнением

$$\det(A\omega - Bk - iC) = D(\omega, k) = 0. \quad (3.28)$$

Пусть уравнение (3.28) имеет решения $\omega = \omega_s(k)$ и $k = k_s(\omega)$ где $s = 1, 2, \dots, n$. Это означает, что в среде существует n типов волн, т. е.

$$u(x, t) = \sum_{s=1}^n \Psi_s e^{i[\omega_s t - k_s(\omega) x]} + \text{к.с.};$$

к. с. означает комплексно-сопряженную величину. Как и в случае сосредоточенных систем (см. [1], лекции 7 и 8), можно перейти к нормальным волнам:

$$a_s(x, t) = \Psi_s e^{i(\omega_s t - k_s x)}.$$

Ввиду отсутствия связи между нормальными волнами они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial a_s}{\partial x} + ik_s a_s = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (3.29)$$

Такая запись удобна и тогда, когда между волнами появляется слабая связь: в уравнение (3.29) в этом случае необходимо добавить слагаемое a , с соответствующим коэффициентом связи (связанным волнам мы посвятим далее отдельную лекцию).

Мы уже указывали, что для распределённых систем дисперсионное уравнение — это уравнение, связывающее две комплексные величины ω и k . Для сосредоточенных же систем имеется характеристическое уравнение, которое даёт более полную информацию о системе, а именно, спектр её комплексных собственных частот.

Есть ли аналог подобного уравнения для распределенной системы? На примере струны уже можно положительно ответить на этот вопрос. Попробуем получить ответ в более общем случае, для чего обратимся к системам, в которых предполагается наличие обратной связи (будем называть их резонаторами). В простейшем случае такая обратная связь осуществляется в кольцевом резонаторе. В кольцевом резонаторе может реализоваться как режим чисто бегущей волны, так и режим суперпозиции встречных волн, частным случаем которого является стоячая волна. Для установления в кольце стоячей волны необходимо подобрать начальные условия. В более общем случае обратная связь, превращающая волновод в резонатор, обязана своим происхождением различного рода неоднородностям — стенкам, зеркалам, на которых бегущая волна достаточно сильно или полностью отражается, передавая энергию встречной волне. Примером могут служить оптический резонатор Фабри — Перо и линия передачи, закороченная или разомкнутая на концах. Решение при этом представляется в виде суперпозиции встречных волн:

$$u(x, t) = \Psi_1 e^{i(\omega t - kx)} + \Psi_2 e^{i(\omega t + kx)}, \quad (3.30)$$

амплитуды которых в простейшем случае идеального отражения концах резонатора должны равняться друг другу по модулю. Например, в случае рассмотренной выше струны, закрепленной на концах, $u(0, t) = 0$ и $u(l, t) = 0$ (l — длина струны). Из (3.30) получаем условие для амплитуд встречных волн $\Psi_1 = -\Psi_2$ и ограничение на спектр волновых чисел $\sin kl = 0$, откуда

$$k_n = \pi n / l, \quad (n - \text{целое}). \quad (3.31)$$

Нетрудно проверить, что в любом одномерном резонаторе с предельным отражением на концах могут реализоваться лишь элементарные решения, удовлетворяющие (3.31), т. е. в резонаторе укладывается целое число полуволн. В

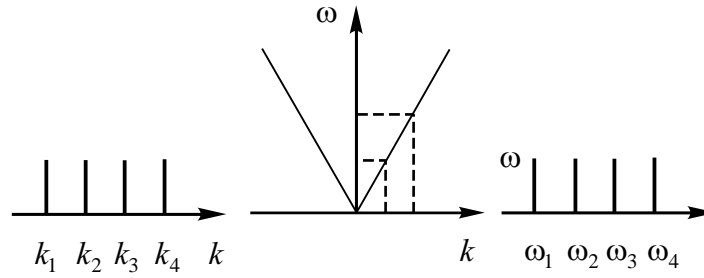


Рис. 3.6. Эквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде без дисперсии.

кольцевом резонаторе граничными условиями служат условия периодичности для всех переменных. Например, для замкнутой в кольцо линии передачи это $U, I(x, t) = U, I(x + l, t)$, откуда следует условие $\exp(ikl) = 1$, т. е. спектр

$$k_n = 2\pi n/l. \quad (3.32)$$

Физически это условие совершенно очевидно — в кольцевом резонаторе могут существовать лишь периодические в пространстве волны, которые укладываются в нем целое число раз. Зная дисперсионное уравнение среды, заполняющей резонатор: $D(\omega, k) = 0$, и спектр волновых чисел (3.31) или (3.32), мы можем получить уравнение относительно одной переменной: $\Delta(\omega) = D(\omega, k_n) = 0$, определяющее спектр нормальных частот резонатора. Именно это уравнение и есть аналог характеристического уравнения для сосредоточенных систем. Например, в случае среды без дисперсии при идеальных отражениях на концах $k_n = \pi n/l$ и $\omega_n = \pi n/(l\sqrt{LC}) = k_n/\sqrt{LC}$ рис. 3.6. Каким при эквидистантном спектре k будет спектр ω , если среда обладает дисперсией? Качественное поведение спектра, зная дисперсионные характеристики, можно получить с помощью элементарного графического построения, которое ясно из рис. 3.7 и 3.8.

В среде с дисперсией в области низких частот спектр собственных частот начинается с частоты ω_0 (рис. 3.8.), сгущается вблизи этой критической частоты; далеко от ω_0 спектр почти эквидистантный. При стремлении ω к ω_0 спектр становится непрерывный. В среде с дисперсией в области высоких частот картина такая же, но спектр становится редким при приближении к нулевой частоте (рис. 3.8, a). Если имеются две критические частоты, то имеются и две области сгущения спектра.

Заметим, что когда речь идет о нахождении собственных частот длинных линий, представленных эквивалентными схемами, с произвольными граничны-

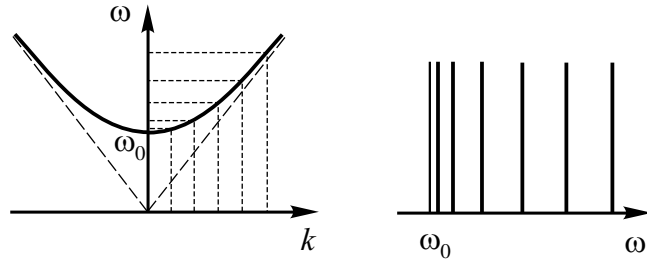


Рис. 3.7. Неэквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде с дисперсией в области низких частот.

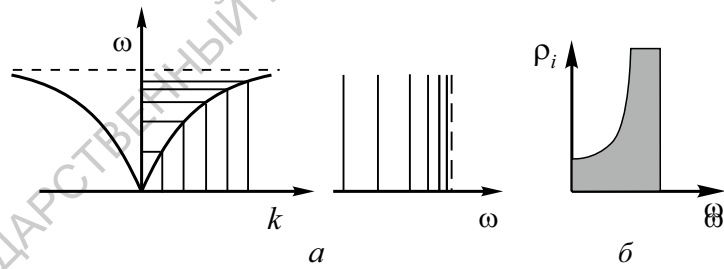


Рис. 3.8. Неэквидистантный спектр собственных частот, соответствующий эквидистантному спектру волновых чисел, в среде с дисперсией в области высоких частот (а) и плотность числа осцилляторов для низкочастотной ветви (б)

ми условиями на концах, то спектр волнового числа k_n находится из известного характеристического уравнения $\operatorname{tg} kl = iY(Z_0 + Z_l)/(1 + Z_0Z_lY^2)$, где Y — характеристическая проводимость длинной линии, Z_0 и Z_l — нагрузки при $x = 0$ и $x = l$ соответственно [17, 22]. Кроме рассмотренных случаев отметим еще один: линия короткозамкнута на одном и разомкнута на другом конце, т. е. $Z_0 = 0$, $Z_l = \infty$ (или $Z_0 = \infty$, $Z_l = 0$), тогда $k_n = \pi(2n - 1)/(2l)$.

Таким образом, если среда, заполняющая резонатор, обладает дисперсией, то даже при эквидистантном спектре k плотность $\rho(\omega)$ нормальных мод в различных участках спектра будет различной. Это дает один из способов измерения дисперсионных свойств одномерных сред, особенно ценный, например, при исследовании цепочек линейных полимеров. Допустим, мы смогли равномерно возбудить все степени свободы цепочки, тогда снятый экспериментально спектр ее колебаний будет просто суперпозицией плотностей спектральных распределений, соответствующих различным дисперсионным ветвям. Для каждой ветви плотность спектрального распределения (плотность числа осцилляторов) вводится формулой

$$\rho(\omega)d\omega = \operatorname{const} \cdot dk. \quad (3.33)$$

Здесь учтено, что число мод в интервале $(k, k + dk)$ для одномерной цепочки не зависит от k . Для продольных колебаний цепочки из тождественных молекул с точностью до нормирующего множителя из (3.33) мы имеем

$$\rho(\omega) = \operatorname{const} \cdot \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^{-1} = (2C/a)(\omega_{\max}^2 - \omega^2)^{-1/2}. \quad (3.34)$$

Этот спектр представлен на рис. 3.8. Аналогично нетрудно построить плотность спектрального распределения $\rho_l(\omega)$ цепочки из чередующихся легких и тяжелых молекул (см. лекцию 8 в [1]). Если возбуждены и продольные, и поперечные колебания цепочки, то к спектру $\rho_l(\omega)$ (см. (3.34)) следует добавить спектр поперечных колебаний, определяемый из дисперсионного уравнения $\omega(k) = B \sin^2(ka/2)$. Плотность спектрального распределения частот полного спектра приведена на рис. 3.9 [23].

Упомянем о прямой пространственно — временной аналогии. Рассмотрим распространение бегущей волны

$$\frac{1}{v_\phi} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

в одномерной среде (v_ϕ — постоянная фазовая скорость волны в среде), на которую воздействует внешняя распределенная сила $G(x, t) = G(x) \exp(i\omega t)$. Тогда

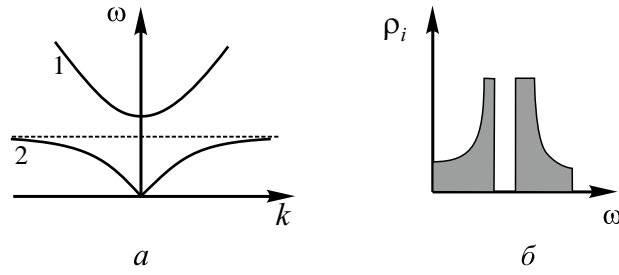


Рис. 3.9. Дисперсия (а) и плотность спектрального распределения (б) в среде с двумя ветвями дисперсионной характеристики: 1 — оптическая ветвь; 2 — акустическая ветвь

очевидно, что

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} u(x) = G(x) \quad \text{если } u(x, t) = u(x) \exp(i\omega t).$$

Это уравнение удобно переписать в интегральной форме (при условии $u(0) = 0$):

$$u(x) = e^{-i\omega x/v_\phi} \int_0^x G(\zeta) e^{i\omega\zeta/v_\phi} d\zeta, \quad (3.35)$$

где ζ — текущая переменная интегрирования.

Полагая, что $G(x, t) = G(0) \exp[i(\omega t - \omega x/v_{\text{вн}})]$, т. е. внешнее возмущение — волна постоянной амплитуды с частотой ω , бегущая с фазовой скоростью $v_{\text{вн}}$, и интегрируя (3.35), находим

$$u(x, t) = G(0) \exp[i(\omega t - \omega x/v_\phi)] \frac{\exp[i(\omega/v_\phi - \omega/v_{\text{вн}})x] - 1}{i(\omega/v_\phi - \omega/v_{\text{вн}})}.$$

При $\omega/v_\phi \approx \omega/v_{\text{вн}}$ получаем секулярный рост $u(x, t)$ вдоль координаты x :

$$u(x, t) = G(0) x e^{i(\omega t - \omega x/v_\phi)}.$$

В этом, в частности, и проявляется пространственно-временная аналогия — для нарастания гармонической волны в пространстве под действием внешнего поля необходимо совпадение их пространственных периодов, т. е. резонанс волновых чисел. В действительности здесь есть резонанс и частот, и волновых чисел, что выражается в равенстве фазовой скорости собственной волны в среде фазовой скорости внешней волны. Это условие обычно называют условием синхронизма волн. Если v_ϕ и $v_{\text{вн}}$ различаются сильно, то в системе возникнут пространственные биения (длину волны биений легко определить). В случае, когда в среде

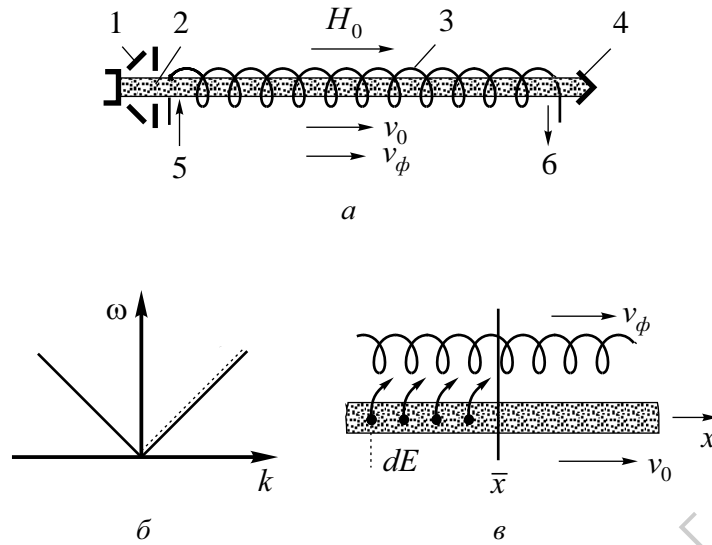


Рис. 3.10. Схема лампы бегущей волны: 1 — электронная пушка; 2— электронный пучок; 3 — спираль; 4 — коллектор; 5 и 6 — входное и выходное устройства; H_0 — фокусирующее магнитное поле (а); дисперсионные характеристики волны (сплошная линия) и пучка (штриховая линия) для модели $v_0 \approx v_\phi$ (б) и иллюстрация пространственного резонанса (в сечении $x = \bar{x}$ поле есть суперпозиция полей, создаваемых каждым элементом возмущенного пучка, расположенным при $x < \bar{x}$; поля складываются в фазе, если $v_0 \approx v_\phi$ (б)).

может распространяться много волн, т. е.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N u^{(n)} e^{i(\omega_n t - k_n x)},$$

и внешнее воздействие тоже многоволновое, условий синхронизма будет n , т. е. будет n равенств фазовой скорости собственной волны на частоте ω_i фазовой скорости внешней волны на той же частоте. Осознание сформулированных нами условий синхронизма позволило в свое время создавать электронные СВЧ — приборы с длительным взаимодействием электронов и волны (наиболее известный из них — лампа с бегущей волной — ЛБВ [24]). Для этих приборов время пролета электронов через пространство взаимодействия много больше периода высокочастотных колебаний поля в отличие от резонансных СВЧ — приборов типа клистронов приборов с кратковременным взаимодействием, о которых мы писали в курсе лекций “Линейные колебания” [1], в лекции 5.

Если считать, что $u(x, t)$ — продольная составляющая электрического поля E волны в волноведущей системе, а $G(x, t)$ — волна переменного тока I в электрон-

ном пучке (с точностью до размерного постоянного коэффициента), то уравнение для $u(x, t)$ есть уравнение возбуждения волновода заданным током [25, гл. 1], [26, лекц. 8]:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_{\phi}} E = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v_{\phi}} \right)^2 KI(x),$$

где K имеет размерность сопротивления и называется сопротивлением связи. Если прямолинейный электронный пучок с малой плотностью тока представить как поток невзаимодействующих частиц, движущихся со скоростью v_0 , то высокочастотные возмущения имеют вид волны тока $I(x, t) = I(0) \exp[i(\omega t - \omega x/v_0)]$ с фазовой скоростью v_0 ($v_{\text{фн}} = v_0$). Таким образом, простейшее условие синхронизма — это равенство конвективной скорости электронов фазовой скорости волны. Кстати, из этого условия следует необходимость при нерелятивистских скоростях электронов замедлять электромагнитную волну (в большинстве ЛБВ используются спиральные замедляющие системы; рис. 3.10). В случае, когда кулоновы силы в пучке существенны, возмущения в нем распространяются в виде волн пространственного заряда, скорости которых не равны v_0 . Для пространственного резонанса в этом случае необходимо, чтобы был синхронизм между одной из волн пространственного заряда и волной в замедляющей системе. Следует заметить, что в своих рассуждениях мы рассматривали лишь влияние внешней волны на собственную. В большинстве случаев это не так: при условии синхронизма есть и обратное влияние. В ЛБВ, например, поле волноведущей системы модулирует пучок по скорости и группирует электроны в сгустки. Такое взаимодействие имеет место в случае связанных волн, которые мы рассмотрим в лекции. 9.

Лекция 4

Линейные волны в жидкости

Вывод основных уравнений гидродинамики идеальной жидкости — уравнения Эйлера и уравнения непрерывности. Дисперсионное уравнение для звуковых волн в жидкости. Акустический эффект Доплера. Основные уравнения линейной теории стратифицированной жидкости. Гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Дисперсионные уравнения для “мелкой” и “глубокой” воды (анализ размерностей и точное решение). Круговые волны на воде. Корабельные волны (волны за движущимся источником). О связи капиллярных волн с моделью атомного ядра. Внутренние волны малой амплитуды в стратифицированной жидкости. Линейные волны Россби.

4.1 Основные уравнения гидродинамики идеальной жидкости. Звуковые волны. Акустический эффект Доплера

При гидродинамическом описании жидкость рассматривается как сплошная среда (см., например, [27, 28]), т. е. при анализе смещения некоторой частицы жидкости речь идет не об отдельной молекуле, а об элементе объема жидкости, включающем много молекул. В гидродинамике такой элемент, малый по сравнению с пространственными масштабами интересующих нас процессов, но большой по сравнению с межмолекулярными расстояниями, считается точкой. Для полного описания поведения движущейся жидкости достаточно, чтобы в такой точке были заданы следующие независимые переменные: скорость жидкости $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, термодинамические величины, например энтропия $S(x, y, z, t)$, отнесенная к единице массы жидкости [29], и плотность массы $\rho(x, y, z, t)$ (x, y, z — координаты рассматриваемого элемента объема в момент времени t). При таком, эйлеровом, описании скорость $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ не связана с определенными частицами жидкости, которые перемещаются со временем в пространстве, а относится к определенным точкам пространства в момент времени t . Также надо понимать и величины S и ρ .

Существование волн в жидкости, находившейся первоначально в стационарном состоянии, обусловлено возмущением жидкости и конкуренцией между силой, стремящейся возвратить жидкость в исходное состояние, и силами инерции, которые заставляют жидкость проскочить его. Например, для волн на воде возвращающими являются сила тяжести и сила поверхностного натяжения, для вращающейся жидкости — сила Кориолиса, для проводящей жидкости — сила действия магнитного поля.

Ограничимся рассмотрением случая идеальной жидкости. Идеальной называется жидкость, при движении которой вектор напряжения в ней перпендикулярен любому элементу поверхности независимо от того, как он ориентирован в пространстве (т. е. выполняется закон Паскаля). Математически это означает, что давление в жидкости есть скаляр, а не тензор [30]. В этом случае в жидкости отсутствуют сдвиговые силы, в частности силы вязкости.

Согласно второму закону Ньютона уравнение движения элемента объема dV жидкости плотности ρ можно записать в виде $\rho(d\mathbf{v}/dt)dV = d\mathbf{F}$, где \mathbf{v} — скорость рассматриваемого элемента, $d\mathbf{F}$ — сила, действующая на каждый элемент объема dV . На любой выделенный объем V жидкости со стороны окружающей жидкости действует сила, равная интегралу от давления, который берется по поверхности выделенного объема, т. е. $-\oint p d\mathbf{S}$. (Предполагается, что вектор $d\mathbf{S}$ равен площади элемента поверхности по абсолютному значению и направлен по внешней нормали к ней; отсюда знак минус перед силой). Но по интегральной теореме о градиенте $-\oint p d\mathbf{S} = -\int_V \nabla p dV$. Кроме того, на выделенный элемент может действовать внешняя заданная сила с плотностью $\rho\mathbf{a}_{\text{вн}}$. Таким образом, $d\mathbf{F} = -\nabla p dV + \rho\mathbf{a}_{\text{вн}} dV$, и уравнение движения становится таким:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + \rho\mathbf{a}_{\text{вн}}. \quad (4.1)$$

Учитывая в (4.1), что $d\mathbf{v}/dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$, приходим к основному уравнению гидродинамики — уравнению Эйлера:

$$\rho \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \rho\mathbf{a}_{\text{вн}}. \quad (4.2)$$

Очевидно, что имеет место закон сохранения массы $\int_V \rho dV$ рассматриваемого объема: изменение во времени массы в данном объеме $-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV$ равно взятому с обратным знаком потоку массы $-\oint \rho\mathbf{v} d\mathbf{S}$ через поверхность, ограничивающую этот объем, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \oint \rho\mathbf{v} d\mathbf{S} = 0, \quad (4.3)$$

или в дифференциальной форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.4)$$

Это — уравнение непрерывности. Вектор $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$ называют плотностью потока жидкости.

В уравнениях (4.2) и (4.3) пять неизвестных: плотность, три составляющие скорости и давление, т. е. одного уравнения не хватает. Таким уравнением является уравнение термодинамического состояния.

Будем считать, что теплообмен между отдельными элементами жидкости отсутствует (жидкость течет с такой скоростью, что отдельные ее участки не успевают обмениваться теплом друг с другом) и что она не обменивается теплом с окружающими телами, с которыми соприкасается. Таков допущение означает, что движение происходит адиабатически в каждом элементе жидкости, т. е. энтропия S , отнесенная к единице массы жидкости, остается постоянной при перемещении этого элемента в пространстве. Таким образом

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S = 0. \quad (4.5)$$

Умножим (4.4) на S , (4.5) на ρ и, сложив полученные соотношения, получим $S \partial \rho / \partial t + \rho \partial S / \partial t + S \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \nabla S = 0$. Используя в последнем соотношении формулу $\operatorname{div}(a \mathbf{f}) = a \operatorname{div} \mathbf{f} + \mathbf{f} \nabla a$, приходим к уравнению непрерывности для энтропии

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho S \mathbf{v}) = 0, \quad (4.6)$$

где $(\rho S \mathbf{v})$ — плотность потока энтропии. Если в начальный момент времени распределение энтропии жидкости пространственно однородно, то

$$S = \text{const} \quad (4.7)$$

в любой момент времени. Такой адиабатический процесс, происходящий при постоянной энтропии, называется изэнтропийным. В этом случае уравнение состояния есть просто функциональная зависимость между плотностью и давлением: $p = p(\rho)$ (или $\rho = \rho(p)$), откуда

$$\frac{dp}{dt} = \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_S \frac{d\rho}{dt}. \quad (4.8)$$

Линеаризуя уравнения (4.2), (4.4) относительно малых возмущений ρ' , \mathbf{v}' и p' плотности, скорости и давления соответственно на фоне их равновесных значе-

ний ρ_0 , \mathbf{v}_0 и p_0 , получаем (считаем $\mathbf{a}_{\text{вн}} = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p', \\ \frac{\partial p'}{\partial t} + \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_S [\text{div}(\mathbf{v}_0 \rho') + \rho_0 \text{div} \mathbf{v}'] &= 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В случае неподвижной среды ($\mathbf{v}_0 = 0$), вводя потенциал скорости $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, получаем для возмущения давления $p' = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t$. В результате из второго уравнения (4.9) следует волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varphi = 0, \quad (4.10)$$

где $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_S}$ — скорость звука. Очевидно, что в декартовых координатах волновому уравнению удовлетворяет и каждая из трех компонент скорости (чтобы убедиться в этом, надо применить к волновому уравнению операцию grad), и давление.

Если все переменные в волне зависят лишь от одной из декартовых координат (плоская волна), то уравнение (4.10) переходит в уже обсуждавшееся в гл. 9 одномерное уравнение $\partial^2 \varphi / \partial t^2 - c^2 \partial^2 \varphi / \partial x^2 = 0$, которое имеет общее решение в виде суперпозиции двух встречных плоских волн:

$$\varphi(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

Поскольку в рассматриваемом приближении дисперсии у звуковых волн нет, то закон дисперсии выглядит так:

$$\omega = \pm ck. \quad (4.11)$$

Бегущие звуковые волны произвольной формы оказываются стационарными, т. е. их профиль в процессе распространения не меняется. Это легко пояснить на спектральном языке. Из-за отсутствия дисперсии все спектральные составляющие, образующие волну, движутся с одинаковыми скоростями и фазовые соотношения между ними сохраняются.

В плоской акустической волне отлична от нуля только x -компонента скорости $v_x = \partial \varphi / \partial x$, т. е. частицы в волне движутся только по (или только против) направлению распространения волны. Именно поэтому акустические волны в жидкостях являются продольными.

Если скорость среды, в которой распространяется звуковая волна, отлична от нуля, то закон дисперсии (4.11) уже будет нарушен. Например, если плоская волна распространяется в однородном движущемся вдоль x с постоянной скоростью

v_0 потоке, то из (4.9) следует закон дисперсии:

$$\omega = \pm ck + v_0 k. \quad (4.12)$$

Можно получить соотношение более общего вида, чем (4.12) для случая однородного потока жидкости движущегося со скоростью \mathbf{u} . Следуя [27, § 68], введем неподвижную систему координат x, y, z , и назовем ее системой K , а также систему K' координат x', y', z' , движущуюся относительно системы K со скоростью \mathbf{u} . В системе K' жидкость неподвижна и монохроматическая волна в ней имеет вид

$$\varphi = \text{const} \cdot e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}' - kct)},$$

где \mathbf{r}' — радиус-вектор в системе K' связан с радиусом-вектором \mathbf{r} в системе K формулой $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{u}t$. Поэтому в неподвижной системе координат волна запишется так:

$$\varphi = \text{const} \cdot e^{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - (kc + \mathbf{k}\vec{n})t]},$$

\vec{n} — единичный вектор в направлении распространения волны. Коэффициент при t в показателе экспоненты есть частота ω волны. Следовательно, в движущейся среде частота связана с волновым вектором \mathbf{k} соотношением

$$\omega = ck + \mathbf{u}\mathbf{k}. \quad (4.13)$$

Групповая скорость распространения волн равна

$$\vec{v}_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{d\mathbf{k}} = c \frac{\mathbf{k}}{k} + \mathbf{u},$$

т.е. $\vec{v}_{\text{гр}}$ есть векторная сумма скорости c в направлении \mathbf{k} и “сносовой” скорости \mathbf{u} звука движущейся жидкости. С помощью формулы (4.13) можно описать акустический эффект Доплера, состоящий в том, что частота звука, воспринимаемого наблюдателем, движущимся относительно источника, не совпадает с частотой колебаний последнего.

Предположим, что звук, испускаемый неподвижным относительно среды источником, воспринимается наблюдателем, движущимся со скоростью \mathbf{u} . В системе K' , покоящейся относительно среды, имеем $k = \omega_0/c$, где ω_0 — частота колебаний источника. В то же время в системе K , движущейся вместе с наблюдателем, среда движется со скоростью $(-\mathbf{u})$ и частота звука будет в соответствии с соотношением (4.13) $\omega = ck - \mathbf{u}\mathbf{k}$.

Введем угол θ между направлением скорости \mathbf{u} и волнового вектора \mathbf{k} . Тогда воспринимаемая движущимся наблюдателем частота звука будет равна

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right). \quad (4.14)$$

Рассмотрим теперь распространение в неподвижной среде звуковой волны, испускаемой движущимся источником. Пусть \mathbf{u} обозначает скорость движения источника. Перейдем от неподвижной системы координат к системе K' , движущейся вместе с источником. В этой системе среда движется со скоростью $(-\mathbf{u})$, источник покоится, а частота, излучаемой им звуковой волны должна быть равна частоте ω_0 колебаний, совершаемых источником. Тогда из формулы (4.13), заменяя знак перед \mathbf{u} , и вводя угол θ между направлениями \mathbf{u} и \mathbf{k} , получим:

$$\omega_0 = ck \left(1 - \frac{u}{c} \cos \theta \right).$$

Вспомним, что в исходной неподвижной системе K частота связана с волновым вектором равенством $\omega = ck$. Тогда

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 - \frac{u}{c} \cos \theta}. \quad (4.15)$$

Это соотношение устанавливает связь между частотой ω_0 колебаний движущегося источника звука и частотой ω звука, который слышит неподвижный наблюдатель. Когда источник удаляется от наблюдателя, угол θ между его вектором скорости и направлением приходящей в точку наблюдения волной меняется в пределах $\pi/2 < \theta \leq \pi$, поэтому $\cos \theta < 0$, и, следовательно, частота, слышимого наблюдателем звука уменьшается по сравнению с ω_0 (см. формулу (4.15)).

Если источник приближается к наблюдателю, то $0 \leq \theta < \pi/2$, $\cos \theta > 0$, и частота $\omega > \omega_0$ увеличивается с увеличением скорости u . Интересен случай, когда $u \cos \theta > c$, согласно формуле (4.15) ω становится отрицательной. Это означает, что слышимый наблюдателем звук будет доходить до него в обратном порядке: звук, излученный источником в более поздние моменты времени, дойдет до наблюдателя раньше, чем звук, излученный в более ранние моменты времени.

4.2 Основные уравнения линейной теории волн в стратифицированной жидкости

Для описания волн в океане или атмосфере уравнения гидродинамики следует обобщить таким образом, чтобы учесть вращение Земли и стратификацию жидкости, т. е. зависимость плотности жидкости от вертикальной координаты. В частности, плотность морской воды зависит от давления, температуры и относительного содержания массы растворенных солей, которые меняются с глубиной [31–33]. Соответствующее обобщение приводит к тому, что уравнение Эйлера

вместо (4.2) примет вид

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p - 2\rho[\mathbf{\Omega} \mathbf{v}] - \rho g \nabla z. \quad (4.16)$$

Здесь $\mathbf{\Omega}$ — угловая скорость вращения Земли, ∇z — единичный вектор вертикальной оси координат; $\mathbf{a}_{\text{вн}}$ заменено на \mathbf{g} , поскольку жидкость находится в поле тяжести.

Предположим теперь, что длины интересующих нас волн много меньше радиуса Земли, и будем решать (4.16) и (4.4) на плоскости, соприкасающейся со сферической Землей в данной точке, Оси соответствующей прямоугольной системы координат направлены следующим образом: ось z — вертикально вверх, ось x — по параллели, с запада на восток, ось y — по меридиану с юга на север. Линеаризуем уравнения относительно некоторого состояния покоя, в котором плотность и давление суть функции только z . Пусть $p = p_0(z) + p'(x, y, z, t)$, $\rho = \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t)$, где $p', \rho' \ll p_0, \rho_0$. Заметим, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}'(x, y, z, t)$, так же как и p' и ρ' , есть величина первого порядка малости. Тогда из уравнений (4.16) и (4.4) получим

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = -2[\mathbf{\Omega} \mathbf{v}'] - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\rho_0} \nabla z, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}' - \mathbf{v}' \nabla \rho. \quad (4.18)$$

Уравнение состояния (4.8) в линейном приближении имеет вид

$$\frac{d}{dt}(\rho_0 + \rho') = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt}(p_0 + p'),$$

или

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + v_z \frac{\partial p_0}{\partial z} \right).$$

где $c(z) = 1/\sqrt{(\partial p/\partial \rho)_s}$ — адиабатическая скорость звука. Учитывая соотношение $\partial p_0/\partial z = -\rho_0 g$, окончательно получаем

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} - \rho_0 g v_z \right). \quad (4.19)$$

У горизонтального дна нормальная составляющая скорости должна исчезать, поэтому при $z = -H$

$$v_z = 0. \quad (4.20)$$

где H — глубина жидкости. На поверхности жидкости давление составляет $p_0 + p' = \text{const}$, поэтому $d(p_0 + p')/dt = 0$, что с учетом правой части (4.19) дает

при $z = 0$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \rho_0 g v_z = 0. \quad (4.21)$$

Воспользуемся в уравнениях (4.17)-(4.19) так называемым приближением Буссинеска: всюду, где $\rho_0(z)$ не стоит под знаком дифференциала, будем считать $\rho_0 = \text{const}$, причем пусть $\rho_0(0) = \rho_{00}$. Решение уравнений (4.17)-(4.19) будем искать в виде (см. [34])

$$\begin{aligned} v_x &= (\mathcal{P}(z)/\rho_{00})V_x(x, y)e^{i\omega t}, & v_y &= (\mathcal{P}(z)/\rho_{00})V_y(x, y)e^{i\omega t}, \\ v_z &= -i\omega\mathcal{V}(z)V_z(x, y)e^{i\omega t}, \\ p &= \mathcal{P}(z)V_z(x, y)e^{i\omega t}, & \rho' &= \rho'(x, y, z)e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

где ω — частота интересующих нас волн.

Подставляя (4.22) в (4.17)-(4.19), после простых преобразований получаем из (4.17)

$$V_x + iqV_y - s\omega\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)}V_z = \frac{i}{\omega}\frac{\partial V_z}{\partial x}, \quad (4.23)$$

$$V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega}\frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \frac{g}{c^2}\mathcal{P}(z) + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) - s\omega\mathcal{P}(z)\frac{V_x}{V_z} = 0; \quad (4.25)$$

из (4.19) имеем

$$\frac{1}{c^2} + \frac{\rho_{00}g}{c^2}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} - \rho_{00}\frac{1}{\mathcal{P}(z)}\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} = \frac{i}{\omega}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\right)\frac{1}{V_z}. \quad (4.26)$$

При выводе (4.23)-(4.26) использовано полученное из (4.18) выражение

$$\rho' = \left[\frac{\mathcal{P}(z)}{c^2} - \frac{\rho_{00}}{g}N^2(z)\mathcal{V}(z)\right]V_z \quad (4.27)$$

и определение частоты свободных вертикальных колебаний частиц жидкости, так называемой частоты Вайсяля:

$$N(z) = \left[-\frac{g}{\rho_{00}}\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\rho_{00}g}{c^2(z)}\right)\right]^{1/2}. \quad (4.28)$$

В уравнениях (4.23) и (4.24) введены следующие безразмерные величины:

$$q = (2\Omega_z/\omega) = (2\Omega/\omega)\sin\varphi, \quad \bar{q} = (2\Omega_y/\omega) = (2\Omega/\omega)\cos\varphi, \quad (4.29)$$

где φ — географическая широта места. С учетом (4.22) граничные условия (4.20) и (4.21) переписутся так:

$$z = -H, \quad \mathcal{V}(z) = 0, \quad (4.30)$$

$$z = 0, \quad \mathcal{P}(z) + \rho_{00}g\mathcal{V}(z) = 0. \quad (4.31)$$

Как показано в [34], уравнения (4.23)-(4.26) допускают разделение переменных в двух случаях: 1) s и q , взятые при φ , равном широте места, являются постоянными; это приближение справедливо для волн, на длине которых q и s меняются мало, — для звуковых, поверхностных, внутренних и инерционных волн; 2) можно пренебречь слагаемыми, содержащими лишь Ω_y , т. е. s , поскольку $s \sim \Omega_y$. Итак, пусть

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{0x} \\ V_{0y} \\ V_{0z} \end{pmatrix} e^{-i(k_x x + k_y y)}, \quad (4.32)$$

V_{0x} , V_{0y} — постоянные, $V_{0z} = 1$, что не ограничивает общности решения. Тогда уравнения (4.23) и (4.24) принимают вид

$$V_{0x} + iqV_{0y} = \frac{k_z}{\omega} + s\omega\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)}, \quad V_{0y} - iqV_{0x} = \frac{k_y}{\omega}.$$

Из этой системы уравнений находим, что

$$V_{0x} = \frac{1}{\omega(1-q^2)} \left\{ k_x + s\omega^2\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} - iqk_y \right\}, \quad (4.33)$$

$$V_{0y} = \frac{1}{\omega(1-q^2)} \left\{ k_y + iq s\omega^2\rho_{00}\frac{\mathcal{V}(z)}{\mathcal{P}(z)} + ik_x \right\}. \quad (4.34)$$

Наконец, из уравнения (4.25 и (4.26), используя (4.32)-(4.34), получаем два уравнения для $\mathcal{V}(z)$ и $\mathcal{P}(z)$:

$$\frac{\partial\mathcal{P}(z)}{\partial z} + \left(\frac{g}{c^2} - \frac{sk_x - iqsk_y}{1-q^2} \right) \mathcal{P}(z) + \rho_{00} \left(\frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{1-q^2} - N^2 \right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial\mathcal{V}(z)}{\partial z} + \left(-\frac{g}{c^2} + \frac{sk_x + iqsk_y}{1-q^2} \right) \mathcal{V}(z) + \frac{1}{\rho_{00}} \left(-\frac{1}{c^2} + \frac{\xi^2}{\omega^2(1-q^2)} \right) \mathcal{P}(z) = 0, \quad (4.36)$$

где $\xi^2 = k_x^2 + k_y^2$.

Учтем теперь, что частота ω звуковых волн намного превосходит Ω и N ; сила тяжести для этих волн в океане тоже не играет роли. Поэтому в (4.35) и (4.36) можно пренебречь слагаемыми, содержащими s , $q \sim Q$, N и g . Такое пренебрежение дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00}\omega^2\mathcal{V}(z) &= 0, \\ \frac{\partial\mathcal{V}(z)}{\partial z} - \frac{1}{\rho_{00}}\mathcal{P}(z) + \frac{\xi^2}{\rho_{00}\omega^2}\mathcal{P}(z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Исключая $\mathcal{V}(z)$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial^2\mathcal{P}(z)}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - \xi^2 \right] \mathcal{P}(z) = 0, \quad (4.38)$$

которое является основным в акустике океана.

Хотя $c(z)$ изменяется мало с глубиной, наличие, например, минимума $c(z)$ на какой-то глубине приводит к образованию подводного акустического волновода, по которому звук низкой частоты от источников (для низких частот поглощение в воде мало) может распространяться на расстояния до нескольких десятков тысяч километров [34, 35].

Заметим сразу, что в предположении несжимаемости $c^2 = dp/d\rho \rightarrow \infty$ уравнения (4.35), (4.36) могут быть упрощены и приведены к виду

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} - \frac{sk_x - iqsk_y}{1 - q^2} \mathcal{P}(z) + \rho_{00} \left(\frac{\omega^2 - 4\Omega^2}{1 - q^2} - N^2 \right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} + \frac{sk_x + iqsk_y}{1 - q^2} \mathcal{V}(z) + \left(\frac{\xi^2}{\omega^2 \rho_{00} (1 - q^2)} \right) \mathcal{P}(z) = 0. \quad (4.40)$$

Исключив $\mathcal{P}(z)$, приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} + 2i \frac{qsk_y}{1 - q^2} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} - \\ - \left[\frac{k_x^2 s^2 + q^2 k_y^2 + \xi^2 - (q^2 + s^2) \xi^2}{(1 - q^2)^2} - \frac{N^2 \xi^2}{\omega^2 (1 - q^2)} \right] \mathcal{V}(z) = 0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Для анализа гравитационных волн на поверхности жидкости, как мы сейчас убедимся, не существенны ни стратификация жидкости, ни вращение Земли, т. е. в (4.41) можно отбросить слагаемые, содержащие N , q и s , и мы придем к уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} + \xi^2 \mathcal{V}(z) = 0, \quad (4.42)$$

с граничными условиями (4.30) и (4.31), которые при сделанных предположениях записываются в виде

$$\mathcal{V}(z)|_{x=-H} = \left[g\mathcal{V}(z) - \frac{\omega^2}{\xi^2} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} \right]_{x=0} = 0. \quad (4.43)$$

Здесь учтено, что $\partial \mathcal{V}(z)/\partial z + (\xi^2/\omega^2 \rho_{00}) \mathcal{P}(z) = 0$ (см. 4.40).

4.3 Гравитационные и капиллярные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости

Справедливость использованных приближений (по крайней мере для гравитационных волн) мы покажем с помощью соображений размерности, следуя блестящей статье [36]. Автор этой статьи использует для размышлений о волнах

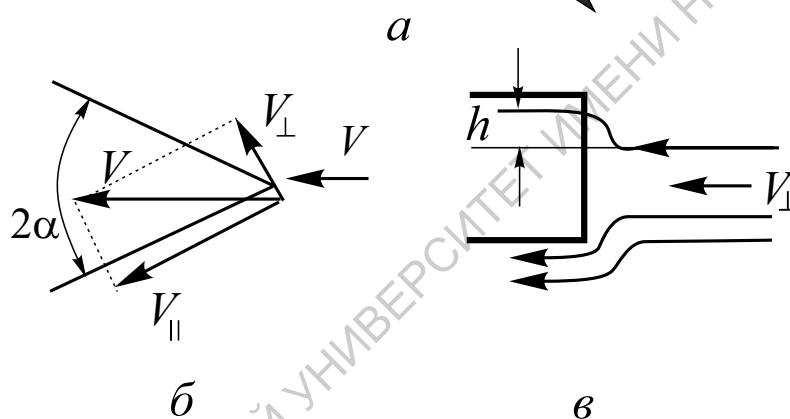
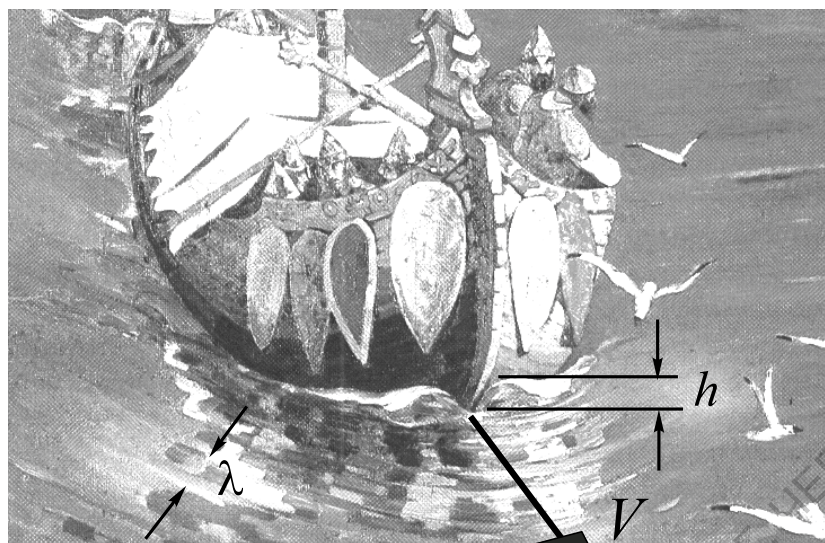


Рис. 4.1. Нужный нам для анализа фрагмент картины Н. Рериха “Заморские гости” (а) и картинка, поясняющие образование носовой волны (б)

картину Николая Рериха “Заморские гости”. “А при чем тут картина” — вопрошает он. И отвечает [36, с. 10]: “Просто, чтоб было веселее. В самом деле, разве не интересно попытаться определить, глядя на эту картину, с какой скоростью плывут заморские гости? Пусть относительно текущей воды, а не относительно берегов. А что в картине может нам дать необходимую информацию? Прежде всего - носовая волна, образующаяся с обоих бортов у форштевня, завершающегося драконом. Далее, круговые волны, которые бегут по поверхности воды от корабля ... (рис. 4.1)“. Об этих и других волнах пойдет разговор в следующих параграфах этой лекции.

Задача 4.1. [36, с. 11]. Пусть вода набегаёт симметрично со скоростью V на нос

корабля, изображенный в виде клина на рис. 4.1,б. Клин имеет вертикальные грани и угол при вершине, равный 2α . Скорость V — скорость корабля относительно воды. Разложим у самого носика клина вектор скорости V на две компоненты: V_{\parallel} — компонента, параллельная одному из бортов корабля (одной из граней клина), и V_{\perp} — перпендикулярная ей. Тогда можно считать, что вода около этого борта участвует в двух движениях: скользит вдоль борта со скоростью $V_{\parallel} = V \cos \alpha$ и набегаёт на него перпендикулярно со скоростью $V_{\perp} = V \sin \alpha$. При таком “набеге” нижние слои воды уходят под днище корабля, а верхний слой поднимается вертикально на некоторую высоту h , как на рис. 4.1.в. Оцените V . Не получится, загляните в статью [36].

Ответ: $V_{\perp}^2 \geq 2gh / \sin^2 \alpha$.

Мы займемся поверхностными волнами (круги на картинке), исходя из соображений размерности. Предположим, что в состоянии равновесия поверхность жидкости горизонтальная. Если ее вывести из этого состояния, то для возникновения поверхностных волн необходима “борьба” двух сил: возвращающей возмущенную жидкость в положение равновесия и силы инерции, из-за которой жидкость “проскакивает” положение равновесия. Какая сила может заставить исчезнуть появившийся на поверхности жидкости “горб”, заставить поверхность снова стать горизонтальной? Такой силой может быть, например, сила тяжести $F_g \sim g$ (g — ускорение свободного падения) или сила поверхностного натяжения F_{σ} (σ — коэффициент поверхностного натяжения). Обсудим отдельно действие обеих сил.

Падая вниз под действием силы тяжести, горб по инерции проваливается ниже положения равновесия; рядом с ним будет вытеснен другой “горб” и т.д. На поверхности жидкости начнет распространяться волна, которая называется гравитационной. Анализ размерностей позволяет найти зависимости фазовой скорости распространения волны v_{ϕ} от ее длины λ . Величина v_{ϕ} для гравитационных волн может зависеть от длины волны λ , от $F_g \sim g$, от инерции колеблющейся жидкости, мерой которой является ее плотность ρ , и от глубины жидкости H . Конечно, скорость распространения волн может зависеть и от многих других факторов, например, от плотности воздуха и даже притяжения Луны. Не будем их учитывать, считая влияние этих факторов несущественным. Таким образом,

$$v_{\phi} = f(\lambda, g, \rho, H).$$

Сразу видно из соображений размерности, что плотность ρ не будет входить в окончательную формулу, поскольку только в ρ входит размерность массы. Физически это объясняется тем, что и вес “горба”, возвращающий его к положению равновесия, и масса “горба”, характеризующая его инерционность, пропорциональны ρ . Размерности λ и H одинаковы, размерность времени содержится только в g , поэтому для скорости распространения волны можно написать две

равноправных формулы:

$$v_{\phi} = \sqrt{gH} f_1(\lambda/H) \quad \text{или} \quad v_{\phi} = \sqrt{gH} f_2(H/\lambda). \quad (4.44)$$

Пусть $\lambda \ll H$; в этом случае говорят о волнах на глубокой воде или коротких волнах, которые движутся лишь в поверхностном слое жидкости (толщина слоя $\sim \lambda$)¹. Скорость распространения волны в этом случае не должна зависеть от глубины жидкости, следовательно,

$$f_1(\lambda/H) = C_1(\lambda/H)^{1/2},$$

где $C_1 = \text{const}$, и тогда

$$v_{\phi} = C_1 \sqrt{g\lambda}. \quad (4.45)$$

Если сразу считать, что $v_{\phi} = f(\lambda, g, \rho)$ и не зависит от H , то в системе LMT имеем следующее уравнение размерностей²:

$$LT^{-1} = L^{\alpha}(LT^{-2})^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 3\gamma &= 1, \\ \gamma = 0, \quad \beta = 1/2 &\rightarrow \alpha = 1/2, \end{aligned}$$

т. е. приходим к формуле (4.45).

В случае длинных волн или волн в мелкой воде, когда $\lambda \gg H$, скорость распространения волны не должна зависеть от λ , поскольку движение всех частиц в тонком слое жидкости практически одинаково³. В этом случае во втором соотношении из (4.44)

$$f_2(H/\lambda) = C_2(H/\lambda)^{1/2},$$

и

$$v_{zp} = C_2 \sqrt{gh}. \quad (4.46)$$

¹Очень понятный пример коротких волн — волны, возникающие на поверхности пруда, когда в него брошен камень. Длина таких волн имеет порядок размера камня, а он мал по сравнению с глубиной пруда. К волнам на глубокой воде относятся и рябь на глубоких лужах и штормовые волны в море.

²Напомним, что размерностью называется выражение единиц измерения произвольной физической величины через единицы измерения величин, принятых за основные (например, LMT — длины, массы, времени). Размерность любой физической величины представляет собой произведение возведенных в степень размерностей величин, принятых за основные.

³Длина приливных волн, например, размера земного шара, так что для них самое глубокое место в океане — тонкий слой жидкости.

Поскольку $k = \omega/c$, из (4.45) и (4.46) получаем следующие законы дисперсии для гравитационных волн в двух предельных случаях:

$$kH \gg 1, \quad \omega(k) = C_1 \sqrt{2\pi g k} \quad \text{— глубокая вода,} \quad (4.47)$$

$$kH \ll 1, \quad \omega(k) = C_2 k \sqrt{gH} \quad \text{— мелкая вода.} \quad (4.48)$$

Проведенный анализ не строг. Мы не можем найти в его рамках C_1 и C_2 . Для их определения воспользуемся уравнениями (4.42) и (4.43). Если решение уравнения (4.42) $\mathcal{V}(z) = A_1 \exp(\xi z) + A_2 \exp(-\xi z)$ подставить в граничные условия (4.43), то из условия совместности получившейся алгебраической системы уравнений с неизвестными A_1 и A_2 , находим дисперсионное уравнение для поверхностных волн в жидкости конечной глубины:

$$\begin{vmatrix} e^{-\xi H} & e^{\xi H} \\ g - \omega^2/\xi & g + \omega^2/\xi \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \omega^2 = \xi g \operatorname{th}(\xi H). \quad (4.49)$$

Легко видеть, что

$$\omega = \sqrt{\xi g} \quad \text{при} \quad \xi H \gg 1, \quad (4.50)$$

$$\omega = \xi \sqrt{gH} [1 - (\xi H)^2/6 + \dots] \quad \text{при} \quad \xi H \ll 1. \quad (4.51)$$

Таким образом, в случае, когда, например $\xi = k_x = k$, в (4.47) и (4.48) $C_1 = 1/\sqrt{2\pi}$, $C_2 = 1$. Из формул (4.45)-(4.46) при $\xi = k_x = k$ следует, что при $kH \rightarrow 0$ (мелкая жидкость) фазовая скорость v_ϕ стремится к постоянному пределу \sqrt{gH} — дисперсия слабая. На глубокой воде дисперсия всегда есть $\omega \sim \sqrt{k}$; она связана с нелокальной зависимостью между давлением и глубиной жидкости.

Гравитационные волны обладают отрицательной дисперсией, поскольку $v_\phi = [(g/k) \operatorname{th}(kH)]^{1/2}$ уменьшается с ростом частоты. Групповая скорость $v_{gp} = d\omega/dk$ тоже уменьшается с ростом частоты, поэтому, скажем, в море или океане к берегу из области возникновения приходят сначала длинные волны, а уже потом короткие. Этот факт можно использовать для определения расстояния до шторма (читателю, по-видимому, доставит удовольствие придумать способ обнаружения шторма и оценить максимальную дальность обнаружения).

Заметим, что при анализе гравитационных волн мы исходили из достаточно общих уравнений. Если ограничить себя с самого начала анализом гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$), то можно исходить из уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\nabla(p/\rho) + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (4.52)$$

Полагая далее, что движение потенциальное ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$), можно ввести потенциал скорости $\mathbf{v} = \nabla\Phi$. Воспользуемся формулой векторного анализа $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - [\mathbf{v} \text{ rot } \mathbf{v}]$. Тогда для несжимаемой жидкости $\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = \partial\mathbf{v}/\partial t + \nabla(v^2/2)$ и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi) + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right) + \mathbf{g}.$$

Поскольку \mathbf{g} есть сила, действующая в поле тяжести на единицу массы, можно ввести $\mathbf{g} = -\nabla U$, где U — потенциальная энергия единицы массы жидкости в поле тяжести. Тогда

$$\nabla\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U\right) = 0.$$

откуда легко можно получить так называемый интеграл Коши - Лагранжа [37]:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = f(t),$$

где $f(t)$ — некоторая функция времени. В стационарном потоке жидкости, когда движение установившееся и скорость не зависит от времени ($\partial\Phi/\partial t = 0$), этот интеграл переходит в уравнение Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U = \text{const}, \quad (4.53)$$

причем для потенциального движения константа в (4.53) одинакова во всей жидкости. Если $\text{rot } \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \neq 0$ ($\boldsymbol{\omega}$ характеризует завихренность и определяет угловую скорость элементарного объема жидкости, то (4.53) справедливо вдоль данной линии тока (постоянная может быть разной вдоль разных линий тока).

Очевидно, что (4.53) выражает закон сохранения энергии. В этом состоит смысл уравнения Бернулли, связывающего скорость с давлением, поскольку U известна. Мы воспользуемся (4.53) в лекции 15 чтобы объяснить нарастание неустойчивости Гельмгольца.

Обратимся теперь к очень коротким волнам, когда жидкость стремится вернуться и положение равновесия под действием силы поверхностного натяжения. Такие волны называются капиллярными и для них разумно предположить, что

$$v_\phi = f(\lambda, \sigma, \rho).$$

В системе LMT легко получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} LT^{-1} &= (MT^{-2})^\alpha L^\beta (ML^{-3})^\gamma, \\ \beta - 3\gamma &= 1, \\ \alpha + \gamma &= 0, \\ \alpha = 1/2 \rightarrow \gamma &= -1/2, \quad \beta = 1/2. \end{aligned}$$

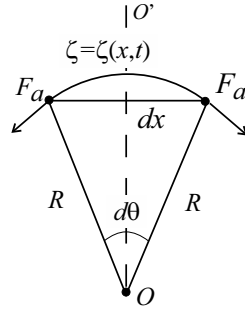


Рис. 4.2. К определению силы поверхностного натяжения для поверхности с отрицательной кривизной.

Таким образом,

$$v_{\phi} = C_3 \sqrt{\sigma/(\rho\lambda)}. \quad (4.54)$$

Закон дисперсии, соответствующий (4.54), имеет вид:

$$\omega = C_3 k^{3/2} \sqrt{\sigma/(2\pi\rho)}. \quad (4.55)$$

Теперь решим задачу более строго, исходя из интеграла Коши - Лагранжа и уравнения

$$\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = 0, \quad (4.56)$$

которое получено из условия несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и определения $\mathbf{v} = \nabla \Phi$. Когда поверхность раздела, скажем, между воздухом и жидкостью искривлена, то разность давлений по разные стороны от нее (но вблизи поверхности раздела) можно определить по формуле Лапласа [27, 29]:

$$p_1 - p_2 = \sigma/R.$$

Эта разность называется поверхностным давлением; R — радиус кривизны поверхности, причем $1/R = \partial^2 \zeta / \partial x^2$, если $\zeta = \zeta(x, t)$ — уравнение кривой, соответствующей границе раздела, а поверхность изогнута слабо. В нашем случае формула Лапласа имеет вид

$$p - p_0 = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (4.57)$$

где p — давление вблизи поверхности жидкости, $p_0 = \text{const}$ — внешнее давление. На рис. 4.2 кривизна поверхности отрицательна, что учтено знаком в (4.57).

В линейном приближении интеграл Коши - Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p - p_0}{\rho} = 0, \quad (4.58)$$

поскольку слагаемым $v^2/2$ в этом приближении можно пренебречь, силу тяжести мы не учитываем, чтобы рассмотреть только капиллярные волны, а $f(t)$ можно, не нарушая общности, считать равной нулю [27]. Используя (4.57), для $z = 0$ из (4.58) будем иметь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.59)$$

Будем искать решение системы (4.56) в виде $\Phi = \varphi(z) \exp[i(\omega t - kz)]$. Тогда $\partial^2 \varphi / \partial z^2 - k^2 \varphi = 0$ и $\varphi(z) = B_1 \exp(kz) + B_2 \exp(-kz)$. Но если жидкость достаточно глубокая, то $\varphi(z) \approx B_1 \exp(kz)$, поскольку под поверхностью $z < 0$ (плоскость xy совпадает с невозмущенной горизонтальной поверхностью жидкости). Продифференцируем (4.59) по t учтем, что $\partial \zeta / \partial t = v_z = \partial \Phi / \partial z$. Будем иметь

$$\rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \quad (4.60)$$

Поскольку $\Phi \approx B_1 \exp(kz) \exp[i(\omega t - kz)]$, из (4.60) получаем следующее уравнение для капиллярных волн:

$$\omega^2 = (\sigma / \rho) k^3. \quad (4.61)$$

Таким образом, C_3 в (4.55) равно $\sqrt{2\pi}$. Если одновременно учесть действие на жидкость обеих возвращающих сил — и силы тяжести, и силы поверхностного натяжения, — то в предположении, что $\Phi = \Phi(x, z, t)$, для жидкости, глубина которой равна H , мы получим дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \left(kg + \frac{\sigma k^3}{\rho} \right) \text{th}(kH). \quad (4.62)$$

Это уравнение даёт закон дисперсии для гравитационно-капиллярных волн (предоставляем читателям самим получить формулу (4.62)).

Для капиллярных волн $v_\phi = \sqrt{\sigma k / \rho}$, т. е. фазовая скорость растёт с ростом ω , что соответствует положительной дисперсии. На рисунке 4.3 показаны зависимости ω и v_ϕ от волнового числа k для поверхностных волн; кривые соответствуют (4.62).

В свое время, после открытия деления урана, теория капиллярных волн была с успехом применена к исследованию устойчивости атомного ядра по отношению к его делению на две приблизительно одинаковые по размерам части. Созданная теория основывалась на том, что между частицами в ядре действуют близкодействующие силы, которые похожи на силы поверхностного натяжения в жидкости (между молекулами тоже действуют силы близкодействия). Такому “поверхностному натяжению” в ядре противостоят дальнедействующие силы — силы кулоновского расталкивания протонов. Для частоты колебаний сферического ядра

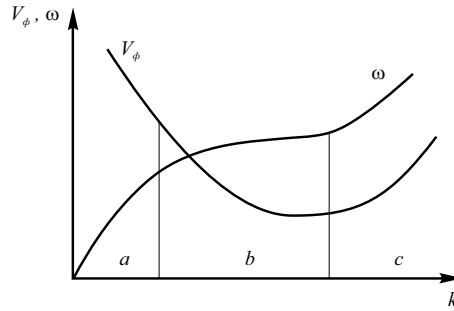


Рис. 4.3. Качественное поведение зависимостей ω и v_ϕ от k для поверхностных волн: а — длинные гравитационные волны ($kH \ll 1$, $kg \gg \sigma k^3/\rho$, $\omega \approx k\sqrt{gH}$, $v_\phi \approx \sqrt{gH}$); б — короткие гравитационные волны ($kH \gg 1$, $kg \gg \sigma k^3/\rho$, $\omega \approx \sqrt{gk}$, $v_\phi \approx \sqrt{g/k}$); в — капиллярные волны ($kH \gg 1$, $kg \ll \sigma k^3/\rho$, $\omega \approx k\sqrt{\sigma k/\rho}$, $v_\phi \approx \sqrt{\sigma k/\rho}$).

получается формула, подобная (4.62) $kH \gg 1$, только первое слагаемое в правой части имеет электрическое, а не гравитационное происхождение, и перед ним стоит знак минус (кулонова сила направлена по внешней нормали к поверхности). Из этого соотношения можно было найти условия неустойчивости ядра при бесконечно малых искажениях его поверхности.

Задача 4.2. Постройте сами теорию дробления заряженных дождевых капель, считая каплю сферической, а жидкость несжимаемой (колебания следует разлагать на стоячие сферические волны по полиномам Лежандра) [38, с. 292].

Вернемся к закону дисперсии (4.62). Для воды $\sigma = 8 \cdot 10^{-2}$ Н/м, $\rho = 10^3$ кг/м³. С учетом этого на рис. 4.4,а построены зависимости фазовой скорости поверхностных волн на воде, определяемых формулами (4.45) с $C_1 = 1/\sqrt{2\pi}$ и (4.54) с $C_3 = \sqrt{2\pi}$, от длины волны λ . В области $\lambda \approx 2$ см обе кривые пересекаются, т. е. при таком значении длины волны гравитационные волны переходят в капиллярные и для расчета фазовой скорости необходимо использовать закон дисперсии (4.62), в котором учитываются оба эффекта, положив в нем $kH \rightarrow \infty$. Соответствующая кривая показана на рис. 4.4,а пунктиром. Минимум зависимости $v_\phi(\lambda)$ достигается при $\lambda_\phi^* = 1,79$ см и составляет $v_\phi^* = 21,4$ см.

Для объяснения картины волн, появляющейся на поверхности воды при падении маленького камешка или при движении корабля, важную роль играет также зависимость групповой скорости от λ . Для воды она показана на рис. 4.4,б. Видно, что групповая скорость также имеет минимум, который соответствует значениям $\lambda_{gp}^* = 4,39$ см и $v_{gp}^* = 17,9$ см.

Задача 4.3. Получите значения λ_ϕ^* , v_ϕ^* , λ_{gp}^* и v_{gp}^* , приведенные в предыдущем абзаце.

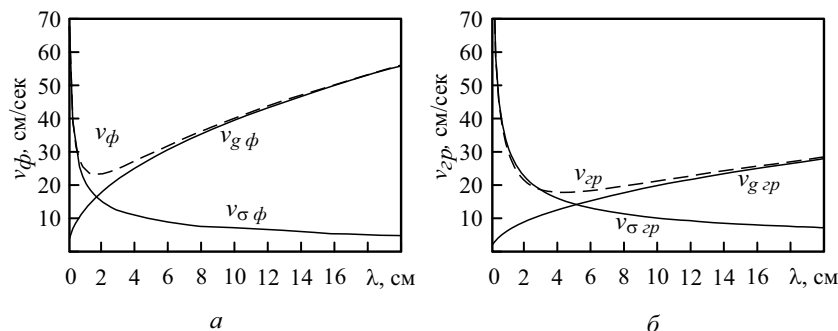


Рис. 4.4. Зависимости фазовой (а) и групповой (б) скорости от длины волны для поверхностных волн на воде. Индексами g и σ обозначены кривые для гравитационных и капиллярных волн соответственно; пунктиром показаны общие зависимости для гравитационно-капиллярных волн.

Если известна зависимость скорости от длины волны, т.е. известен закон дисперсии, можно объяснить много разных явлений. Почти во всех описаниях круговых волн приводятся слова бессмертного Козьмы Пруткова: “Бросая в воду камешки, смотри на круги ими образуемые: иначе такое бросание будет пустою забавою”. От камешка, возмущающего только очень малую область воды, начинают расходиться круги, а в центре быстро расширяющейся системы кругов образуется область спокойной воды. Капиллярные волны имеют малую амплитуду и быстро затухают при убегании от центра. Их и видно плохо. Поскольку у гравитационных волн затухание меньше, они живут дольше, и их хорошо видно. В следующих разделах этой лекции будет изложено математическое описание круговых волн на воде и системы волн на воде за движущимся источником.

4.4 Круговые волны на воде

Попробуем сначала понять картину волн, которая возникает, когда на поверхность спокойной воды падает камешек или капля воды⁴. Наш опыт показывает, что появляющиеся волны не слишком сильно зависят от формы камешка, поэтому можно считать, что он круглый, и вся картина симметрична относительно точки падения. В первые мгновения после падения на поверхности появляется возмущения, а в слое жидкости — сложное распределение скоростей и давлений. Рассчитать их практически невозможно, да и не нужно, потому что качественная картина практически не зависит от этих деталей. поэтому ограничимся простой моделью, считая, что в начальный момент на поверхности создано некоторое воз-

⁴Изложение этого и следующего параграфов следует [7, 31].

мушение $\eta(r, 0) = \eta_0(r)$, а скорость жидкости в любой точке (в том числе и на поверхности) равна нулю.

Можно сделать некоторые качественные заключения о форме начального распределения. Ясно, что чем меньше поперечный размер капли или камешка, тем меньше область, где $\eta_0(r)$ отлична от нуля. Если область начального возмущения имеет конечный размер, то он совпадает по порядку величины и размером упавшего в воду тела l . Из общих свойств преобразования Фурье следует, что разложение такого возмущения в интеграл Фурье будет содержать гармонические составляющие со всевозможными по направлению в плоскости x, y волновыми векторами \mathbf{k} , а амплитуды спектральных гармоник будут максимальны для возмущений с длинами волн $\lambda \sim l$, или волновыми числами $k_m \sim 2\pi/l$. Наиболее интенсивно возбуждаются волны, длина которых порядка l . Вспоминая рис. 4.4, *a*, приходим к выводу, что при $d \gtrsim \lambda_{\phi}^*$ волны будут гравитационными, а при $d \lesssim \lambda_{\phi}^*$ — капиллярными. Картины круговых волн для обоих случаев выглядят по-разному, что определяется различием в законах дисперсии.

Каждая спектральная компонента побежит от места возмущения со своей фазовой скоростью v_{ϕ} , причем из-за аксиальной симметрии они побегут сразу по всем направлениям, формируя картину расширяющихся цилиндрических волн. Это лишь немногим усложняет дело по сравнению с одномерным случаем. Нужно чуть-чуть подождать, пока волны не отойдут от центра, тогда небольшой участок волнового фронта можно будет рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся в одном направлении⁵. Чтобы найти результат интерференции всех спектральных гармоник, воспользуемся понятием волнового пакета, введенным в лекции 11. Для этого выберем какое-нибудь значение волнового числа k и рассмотрим все Фурье компоненты с волновыми числами, лежащими близи него в интервале шириной $\Delta k \ll k$. Это и есть волновой пакет, распространяющийся с групповой скоростью $v_{gp}(k)$. Совокупность пакетов, покрывающая весь диапазон волновых чисел и составляет результирующее возмущение.

Если рассматривать точки, находящиеся достаточно далеко от центра, то возмущение в них прибегает через большое время, за которое пакеты с близкими волновыми числами разойдутся далеко в пространстве друг от друга. Поэтому можно считать, что при таких условиях, в точке r в момент времени t находится только пакет, для которого

$$v_{gp}(k) = r/t. \quad (4.63)$$

⁵Разумеется строгий анализ, который можно найти, например в [7], подтверждает это приближенное рассмотрение.

Решив это уравнение относительно k , можно найти “локальное” значение волнового числа как функцию координаты и времени $k(r, t)$. Термин “локальное” волновое число подразумевает, что измеряя в момент времени t в точке r длину волны, мы получим примерно значение $\lambda \approx 2\pi/k(r, t)$. На самом деле, для измерения длины волны необходимо померить, например, расстояние между несколькими повторяющимися гребнями или впадинами (измерение только между двумя соседними гребнями недостаточно, так как при этом не будет уверенности, что процесс близок к периодическому, то есть что действительно измеряется длина волны). Так как в случае волнового пакета эти расстояния от одного периода к другому немного меняются, мы и говорим о *примерном* значении длины волны и волнового числа в точке⁶. Волновому числу $k(r, t)$, в соответствии с дисперсионным уравнением, отвечает частота $\omega(r, t) = \omega[k(r, t)]$, которая также зависит от r и t .

Для построения видимой картины волн знания волнового вектора и частоты, однако, недостаточно. Вспомним, что для плоской волны вида $\text{Re}\{Ae^{i(\omega t - kx)}\}$ гребням и впадинам соответствуют определенным значения фазы $\Phi = \omega t - kx$, а именно, гребни находятся в точках, где $\Phi = 2\pi n$, а впадины — там, где $\Phi = \pi(2n + 1)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Поэтому в нашем случае также необходимо знание локальной фазы волны в зависимости от координаты и времени:

$$\Phi(r, t) = \omega(r, t)t - k(r, t)r.$$

Чтобы двигаться дальше, нужно задать конкретный закон дисперсии. Будет считать, что глубина жидкости достаточно велика, а размер камешка — несколько сантиметров в диаметре. Тогда можно считать, что возникающие волны — гравитационные волны на глубокой воде. Закон дисперсии (4.50) известен, поэтому можно записать $v_{gp}(k) = \omega'(k) = \sqrt{g/k}/2$. Тогда из (4.63) можно найти

$$k(r, t) = \frac{gt^2}{4r^2}. \quad (4.64)$$

Отсюда видно, что проходящие через фиксированную точку пространства волны сначала имеют большую длину волны (малые k), а с течением времени она уменьшается. Напомним, что все рассмотрение, основанное на концепции волновых пакетов, базируется на предположении, что расстояние от источника волн до точки наблюдения достаточно велико, так что в формуле (4.64) r не может быть

⁶Здесь прослеживается прямая связь с квантовой механикой, где значение импульса частицы в точке, а значит и волновое число волны Де-Бройля $\mathbf{k} = \vec{p}/\hbar$, можно указать лишь с конечной погрешностью, задаваемой принципом неопределенности.

равно нулю! Подставляя это выражение в закон дисперсии, получаем локальную частоту и фазу волны:

$$\omega(r, t) = \frac{gt}{2r}, \quad \Phi(r, t) = \frac{gt^2}{4r}. \quad (4.65)$$

Эти соотношения позволяют представить качественную картину разбегающих волн практически полностью. Вспоминая вид зависимости v_{zp} от λ , можно сделать вывод, что любое возмущение на глубокой воде распространяется быстрее, чем v_{zp}^* , поэтому должен, во всяком случае, существовать круг спокойной воды, радиус которого $r_1 = v_{zp}^* t$ линейно увеличивается со временем. С другой стороны, волновое движение можно ожидать в той области, где фаза волны Φ заметно (на величину порядка π) меняется в пространстве и времени. При $r_2 \gtrsim gt^2/4$, как следует из (4.65), фаза меньше единицы и колебаний нет. Поэтому картина волн должна лежать внутри круга радиуса r_2 , который растет во времени с ускорением $g/2$. Все волновое возмущение сосредоточено в кольце с радиусами r_1 и r_2 , ширина которого постоянно увеличивается. Внутри кольца отдельные цуги волн появляются на заднем фронте возмущения и со временем продвигаются к переднему фронту (в сторону внешней границы кольца). Ширина отдельного “горба” при этом увеличивается, а скорость растет, так как он сдвигается в стороны меньших волновых чисел. В каждой точке скорость вершины вдвое превышает скорость, с которой переносится локальное значение волнового числа. Достигнув переднего фронта, “горб” расплывается и уменьшается по высоте настолько, что становится практически невидимым.

Строго говоря, и при $r > r_2$ существует отличное от нуля возмущение, однако оно не носит характера колебаний в пространстве, а является “предвестником” — в этой области при увеличении r поле быстро спадает к нулю. Предвестник формируется за счет самых быстрых пакетов, которые соответствуют большим длинам волн. Если глубина жидкости не слишком большая, то может оказаться, что приближение глубокой воды для них уже неприменимо, поскольку в этой части спектра $kH \ll 1$. Дисперсия при этом отсутствует, все такие волны распространяются с одной и той же групповой скоростью \sqrt{gH} , которая является предельной для данной системы. Следовательно, вне круга с радиусом $r_3 = \sqrt{gH}t$, возмущение строго равно нулю в соответствии с принципом причинности.

Для капиллярных волн картина разбегающихся кругов на поверхности воды совершенно другая — это связано с иным законом дисперсии (4.61). Маленькие по ширине цуги волн рождаются вблизи внешней границы кольца, содержащего все возмущение, и исчезают вблизи внутренней, увеличиваясь в размерах. Все возмущение в целом опережает каждый отдельный “горб”, так как в этом случае

$v_{gp} = 3v_{\phi}/2$. К этим заключениям легко прийти, получив выражения для локальных значений волнового числа, частоты и фазы капиллярных волн. Сделайте это самостоятельно.

Задача 4.4. Получите выражение для локальной фазы круговой капиллярной волны на поверхности глубокой воды.

Ответ. $\Phi(r, t) = -\frac{4\rho}{27\sigma} \frac{r^3}{t^3}$

4.5 Волны за движущимся источником

Еще более красивая картина волн возникает на воде вслед за движущимся источником. Ее можно видеть, например, наблюдая за движением корабля с высокого обрыва реки или моста. Поэтому такие волны называют еще корабельными [31]. В качестве модели для теоретического анализа примем, что в каждой точке траектории источник создает возмущение, аналогичное возмущению от камешка, брошенного в воду, которое было рассмотрено в предыдущем параграфе. В линейной случае задача тогда сводится к суммированию все таких элементарных возмущений. Для полного понимания необходимо иметь представление о таком замечательном физическом эффекте, как излучение Вавилова – Черенкова.

Кратко напомним суть эффекта Вавилова – Черенкова. Пусть имеется среда, в которой могут распространяться волны, вообще говоря, произвольной физической природы, с фазовой скоростью v_{ϕ} . Если в такой среде движется источник с постоянной скоростью V , то происходит излучение волн с волновыми векторами \mathbf{k} , для которых выполняется условие $V > v_{\phi}$. При этом угол θ между направлением движения и волновым вектором определяется условием

$$\cos \theta = \frac{v_{\phi}}{V}. \quad (4.66)$$

Точечный источник испускает волны со всеми возможными волновыми числами, удовлетворяющими условию Черенкова, каждая из таких волн излучается под своим углом. Следует подчеркнуть, что источник сам по себе не совершает никаких колебаний и может вообще не иметь внутренних степеней свободы. На излучение тратится кинетическая энергия поступательного движения, поэтому, чтобы поддерживать скорость постоянной, надо совершать работу. Этот эффект вносит вклад в сопротивление движению тела за счет излучения волн и его учет необходим, например, при конструировании судов.

Если в среде нет дисперсии, то направление излучения для всех частот совпадают, в результате формируется конус, вершина которого совмещена с мгновен-

ным положением источника, а угол полураскрыва равен $\psi = \pi/2 - \theta$. Все излучение сосредоточено вблизи поверхности конуса, а точно на нем поле теоретически обращается в бесконечность. Такова картина, например, для черенковского излучения электронов или акустической волны при сверхзвуковом движении снаряда⁷.

Вернемся к волнам на воде. С точки зрения теории, волны, возбуждаемые на поверхности воды за движущимся судном, есть ни что иное, как излучение Вавилова - Черенкова. Здесь, однако, эффект усложняется дисперсией среды. Тем не менее, зная картину волн от точечного источника, можно составить представление об общей картине и в этом случае. Для понимания важны следующие утверждения:

1. В результате эффекта Вавилова - Черенкова, излучение под углом θ к направлению движения имеет волновое число \mathbf{k} , определяемое условием (4.66).
2. Вдоль этого направления излучение распространяется в виде волнового пакета с групповой скоростью.

В соответствии с условием (4.66), скорость источника должна быть больше или равна фазовой скорости волны. Так как для капиллярно-гравитационных волн зависимость $v_{\phi}(\lambda)$ имеет минимум (см. рис. 4.4), отсюда следует, что при $V < v_{\phi}^* = 21.4$ см возбуждения волн не будет. Чтобы появилась характерная картина “усов” за источником, он должен двигаться с достаточно большой скоростью. Этим обстоятельством объясняется, в частности, тот факт, что на поверхности быстрого ручья появляются “усы” от опущенной в воду ветки или лежащего на мели камня, в то время, как на медленной воде их нет.

Приступим к количественному построению картины волн, причем начнем со случая гравитационных волн на глубокой воде, опираясь на закон дисперсии (4.50). Докажем сначала, что вся картина волн сосредоточена в клинообразной области с углом раскрыва $\approx 39^\circ$, причем вершина клина совпадает с мгновенным положением источника. Этот красивый результат был впервые получен Кельвином [31]. На рис. 4.5 прямая AB представляет собой траекторию судна, причем пусть оно в некоторый момент находилось в точке A , и за время t переместилось в точку B , значит $|AB| = Vt$. В точке A произошло излучение пакетов во всех направлениях, для которых выполнено условие Черенкова. Под углом θ бежит пакет, для которого $v_{\phi} = V \cos \theta$. За время t он переместится на расстояние $r = v_{gp}t = Vt \cos \theta/2$ (так как для гравитационных волн на глубокой

⁷Разумеется в действительности бесконечный рост поля ограничивают эффекты, которые не были приняты во внимание. Для электрона это слабая дисперсия среды, в акустике — формирование ударной волны (конуса Маха).

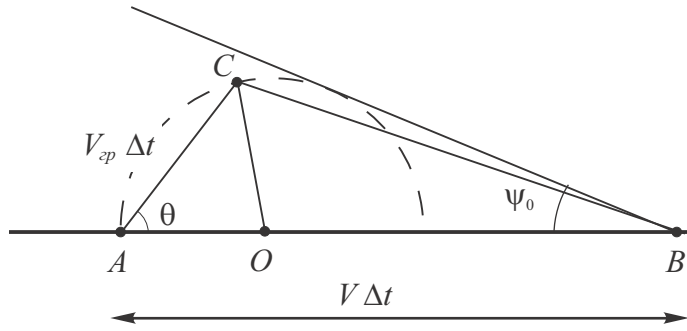


Рис. 4.5. К объяснению картины волн за движущимся источником

воде $v_{zp} = v_{\phi}/2$) и попадет в точку C . Нетрудно убедиться, что местоположение всех таких пакетов совпадает с полуокружностью радиуса $Vt/4$ и центром в точке O , находящимся на расстоянии $3Vt/4$ от точки B . Действительно, введем систему координат с началом в точке B и осью x , совпадающей с направлением движения источника. В ней координаты точки C даются соотношениями

$$\begin{aligned} x &= -Vt + r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Выразив r через t и θ , получим

$$\begin{aligned} x &= -Vt + \frac{1}{2}Vt \cos^2 \theta = -\frac{3}{4}Vt + \frac{1}{4}Vt \cos 2\theta, \\ y &= \frac{1}{2}Vt \cos \theta \sin \theta = \frac{1}{4}Vt \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Отсюда $(x + 3Vt/4)^2 + y^2 = (Vt/4)^2$ и утверждение доказано. Проведем касательную из точки B к окружности, показанной на рис. 4.5 пунктирной линией. Так как $|OB| = 3Vt/4$, угол $\psi_0 = \arcsin(1/3) \approx 19,5^\circ$. Замечательно, что этот угол не зависит от t , поэтому волны, испущенные в разных точках траектории будут лежать в пределах одного и того же клина! Так как картина симметрична относительно прямой AB , то мы приходим к результату Кельвина. Все волны остаются сзади судна, что неудивительно, так как $v_{zp} < V$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы получить полную картину волн. Используя соотношение (4.65) для фазы волны и формулу $r = Vt \cos \theta/2$, можно выразить r и Vt через величины Φ и θ :

$$\begin{aligned} r &= \frac{V^2 \Phi}{g} \cos^2 \theta, \\ Vt &= \frac{g}{2V^2 \Phi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Подставив эти выражения в (4.67), получаем

$$\begin{aligned} x &= -\frac{V^2\Phi}{g} \cos\theta(2 - \cos^2\theta), \\ y &= \frac{V^2\Phi}{g} \sin\theta \cos^2\theta. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Соотношения (4.70) представляют собой уравнения для линий постоянной фазы в параметрической форме. Решив их для заданных значений координат, можно найти фазу и направление волнового вектора в любой точке. Это можно сделать численно, однако важнее, что эти соотношения дают удобный способ нарисовать картину волн. Зафиксируем фазу Φ и будем менять значения θ от $-\pi/2$ до $\pi/2$, при этом точка с координатами (x, y) будет перемещаться вдоль линии постоянной фазы, например, вдоль одного из гребней. Задавая фазы, отличающиеся по величине на 2π , можно получить всю видимую картину волн. Результат показан на рисунке 4.6. На рисунке 4.7 приведена фотография волн за движущимся судном, сделанная с самолета. На фотографии ясно выражены боковые волны, прижатые к границе клина Кельвина. Волны вслед за кормой судна в данном случае практически не возбуждаются, причина этого будет объяснена ниже. Турбулентный след за кормой судна объясняется причинами, которые здесь не рассматриваются. Вернемся к рис. 4.6. Вся совокупность гребней сосредоточена внутри клиновидной области, причем отчетливо наблюдаются волны двух типов с различным поведением. Во-первых, это короткие волны, прижатые к границам клина и распространяющиеся под большими углами к оси x . Во-вторых — более длинные волны, бегущие вслед за кормой, фронт их перпендикулярен вектору скорости судна. Для таких волн условие черенковского излучения $V \approx v_\phi = \sqrt{gk}$, поэтому их длина волны $\lambda \approx 2\pi V^2/g$. Гребни, соответствующие двум типам волн касаются друг друга в точках, лежащих на границе клина, в них распространение происходит под углом $\theta_m = \arcsin(1/\sqrt{3}) = 35,3^\circ$, фазовая скорость в этой точке $c_m = \sqrt{2/3}V$, а длина волн $\lambda_m = 4\pi V^2/3g$.

Построенная картина, вообще говоря, справедлива для излучателя бесконечно малых размеров, когда эффективно возбуждаются все возможные волновые числа. Если учитывать конечный размер судна l , то можно прийти еще к одному интересному выводу. Как уже отмечалось, при таких условиях наиболее сильно возбуждаются волны с $k \sim 2\pi/l$, если, разумеется, для них выполняется соотношение $V > v_\phi$. Отсюда следует, что характер волн определяется безразмерным параметром $\mathbf{Fr} = V^2/gl$, называемым в гидродинамике числом Фруда [31]. Если $\mathbf{Fr} \ll 1$, то волны, для которых $\lambda \sim l$, лежат вне пределов черенковского резонанса и интенсивность излучения в целом мала. В другом пределе $\mathbf{Fr} \gg 1$

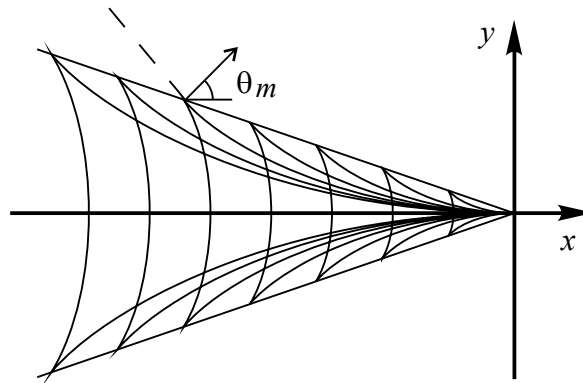


Рис. 4.6. Гравитационные волны на поверхности глубокой воды.



Рис. 4.7. Фотография гравитационных волн за движущимся судном.

следует ожидать интенсивного возбуждения волн и резкого повышения сопротивления движению судна. Если число Фруда порядка единицы, то меняя эту величину, можно наблюдать относительное изменение интенсивности волн с разными λ . При небольших числах \mathbf{Fr} более сильно возбуждаются длинные волны, бегущие вслед за кормой (эта картина характерна для крупных судов), при больших \mathbf{Fr} (быстроходный катер) — короткие волны, прижатые к границам клина.

Аналогично можно рассмотреть возбуждение капиллярных волн на глубокой воде. В этом случае $v_{gp} = \frac{3}{2}v_\phi$, групповая скорость больше фазовой, поэтому, используя условие черенковского излучения (4.66), можно написать $r = \frac{3}{2}Vt \cos \theta$. Исключая время из формулы для фазы капиллярных волн (см. ответ к задаче 4.4), имеем $\Phi = -\frac{\rho V^2}{3\sigma} r \cos^2 \theta$. Тогда

$$\begin{aligned} r &= -\frac{3\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{1}{\cos^2 \theta}, \\ t &= -\frac{2\sigma\Phi}{\rho V^3} \frac{1}{\cos^3 \theta}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Подставляя эти соотношения в (4.67), приходим к параметрическим уравнениям для линий постоянной фазы капиллярных волн от движущегося источника:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{2 \sin^2 \theta - \cos^3 \theta}{\cos^2 \theta}, \\ y &= -\frac{\sigma\Phi}{\rho V^2} \frac{3 \sin \theta}{\cos^3 \theta}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Картина волн, полученная так же, как и в предыдущем случае⁸, показана на рисунке 4.8. Для волн, излучаемых по направлению движения $\theta = 0$ и из (4.72) вытекает $x = \frac{\sigma|\Phi|}{\rho V^2} > 0$. Такие волны обгоняют источник, что не удивительно, так как групповая скорость больше фазовой. Для волн, излучаемых поперек направления движения $\theta = \pi/2$ при этом $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow \infty$. В этом пределе

$$y \approx \pm \frac{3}{2^{2/3}} \left(\frac{\sigma|\Phi|}{\rho V^2} \right)^{1/3} |x|^{2/3}, \quad \text{при } x \rightarrow -\infty. \quad (4.73)$$

Форма усов стремится к полукубической параболе. Картину, показанную на рисунке 4.8, легко можно наблюдать в ванной, равномерно двигая перпендикулярно опущенную в воду тонкую спицу и наблюдая за изображением на дне, созданным за счет преломления световых лучей на возмущенной поверхности.

⁸Для правильного построения необходимо учесть, фаза принимает отрицательные значения. Это следует из решения задачи 4.4.

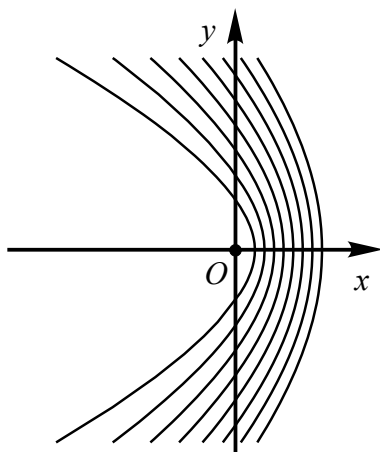


Рис. 4.8. Капиллярные волны за движущимся источником.

4.6 Внутренние волны в стратифицированной жидкости. Линейные волны Россби.

Простейший пример внутренних волн в стратифицированной жидкости — волны, распространяющиеся вдоль поверхности раздела двух однородных жидкостей разной плотности. Распространение волн обусловлено балансом между силами плавучести и полной силой инерции жидкости. Более сложный случай — волны в жидкости с непрерывной стратификацией. В стратифицированной жидкости любое смещение произвольного участка жидкости по высоте нарушает равновесие и возникают колебания. Как уже говорилось, плотность морской воды зависит не только от давления, но от температуры и от относительного содержания растворенных солей, которые меняются с глубиной.

Предположим сначала, что $\omega \gg \Omega$ и вращением Земли можно пренебречь. При этом уравнение (4.41) значительно упрощается:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} - \xi^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \mathcal{V}(z) = 0. \quad (4.74)$$

Если среда безгранична и $N = \text{const}$, то $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}(0) \exp(\pm i k_z z)$, $k_z^2 = -\xi^2(1 - N^2/\omega^2)$ и

$$k^2 = k_z^2 + \xi^2 = \xi^2 \frac{N^2}{\omega^2} \quad (4.75)$$

или

$$\sin \theta = \frac{\mu \omega}{N}, \quad (4.76)$$

где θ — угол между вектором k и вертикалью, $\mu = \pm 1$. Из (4.76) следует, что волны могут существовать только при $\omega < N$. Если угол θ задан, то частота ω

определяется однозначно, в то время как длина волны и фазовая скорость могут быть произвольными.

Заметим, что в несжимаемой жидкости условие $N = \text{const}$ соответствует экспоненциальной зависимости плотности от глубины.

Рассмотрим распространение внутренних волн в волноводе, образованном поверхностью жидкости и горизонтальным дном. В этом случае решение уравнения (4.62) при сохранении предположения о постоянстве частоты Вайсяля имеет вид

$$\mathcal{V}(z) = c_1 e^{-ik_z z} + c_2 e^{ik_z z}, \quad k_z = \xi \sqrt{N^2/\omega^2 - 1}. \quad (4.77)$$

Подставляя формулы (4.77) в граничные условия (4.43), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 e^{-ik_z H} + c_2 e^{ik_z H} &= 0, \\ (g + ik_z \omega / \xi^2) c_1 + (g - ik_z \omega / \xi^2) c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Из условия совместности системы (4.78) — равенства нулю ее определителя — находим дисперсионное уравнение

$$gk_z \operatorname{tg}(k_z H) = N^2 - \omega^2. \quad (4.79)$$

При $k_z H \ll 1$ можно считать, что $\operatorname{tg}(k_z H) \approx k_z H$ и, следовательно, когда $\omega < N$, одно из решений (4.79) запишется так:

$$k_{z0} = \sqrt{(N^2 - \omega^2)/(gH)} \quad (4.80)$$

С учетом второго соотношения (4.77), из (4.80) имеем $\omega = \xi_0 \sqrt{gH}$, что совпадает с (4.52) при $\xi H \rightarrow 0$.

Очевидно, что найденная в этих приближениях волна — это поверхностная волна в мелкой воде, которая распространяется со скоростью \sqrt{gH} , т. е. стратификация жидкости не влияет на характер этой волны.

Мы уже говорили, что при $N = \text{const}$ в несжимаемой жидкости плотность зависит от глубины по закону $\rho_0(z) = \rho_{00} \exp(-2\nu z)$. Здесь $\nu = N^2/(2g)$. Поскольку $\nu H \ll 1$ (типичные значения N для океана колеблются в пределах от 0 до $0,01 \text{ с}^{-1}$ [31], величина $(k_{z0} H)^{-2} = g/[H(N^2 - \omega^2)]$ при $\omega < N$ имеет порядок величины $(\nu H)^{-1}$, которая много больше единицы. Переписывая (4.79) в виде

$$\operatorname{ctg}(k_z H)/(k_z H) = g/[H(N^2 - \omega^2)] \sim (\nu H)^{-1} \gg 1,$$

находим, что корни дисперсионного уравнения достаточно близки

$$k_z H \approx n\pi \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.81)$$

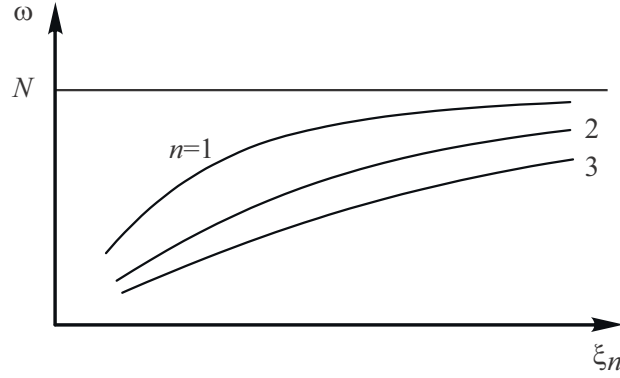


Рис. 4.9. Дисперсия внутренних волн в стратифицированной жидкости.

или с учетом второго соотношения из (4.77)

$$\omega = \frac{N}{\sqrt{1 + (n\pi/(\xi_0 H))^2}} \quad (4.82)$$

Полученный для внутренних волн закон дисперсии - это типичный закон дисперсии для многомодового волновода (рис. 4.9).

Когда N зависит от z , возможны и более сложные законы дисперсии [39]. Как отмечается в [34], решения уравнения (4.74) с граничными условиями (4.43) при $N = N(z)$ описывают волны, одна из которых близка к поверхностной, поскольку максимум $\mathcal{V}(z)$ достигается при $z = 0$, и, кроме того, набор внутренних волн, у которых максимумы расположены внутри интервалов $0 < z < H$.

Остановимся кратко на гироскопических (инерционных) волнах, закон дисперсии для которых можно получить из уравнений (4.35) и (4.36) для однородной ($N = 0$) несжимаемой ($c \rightarrow \infty$) жидкости. Эти волны характерны для океана — они связаны с вращением Земли.

Для решений вида $\mathcal{V}(z), \mathcal{P}(z) \sim \exp(\pm ik_z z)$ после простых, но громоздких преобразований получаем (см. [34])

$$\omega^2 = 4\Omega(\mathbf{k}/k) \quad \text{или} \quad \omega = 2\mu\Omega \cos \theta \quad (\mu = \pm 1), \quad (4.83)$$

где θ — угол между Ω и \mathbf{k} ; значение μ выбирается из условия $\mu \cos \theta > 0$. Из (4.83) следует, что, поскольку для данной частоты угол θ вполне определенный, длина волны может быть любой, как и для внутренних волн.

Если $N = \text{const}$ и $\Omega \neq 0$, то возникают так называемые гравитационно-гироскопические волны, закон дисперсии для которых, как показано в [34], имеет

вид $\omega^2 = N^2 \sin^2 \varphi + 4\Omega^2 \cos^2 \varphi$, φ — угол между \mathbf{k} и положительным направлением оси z .

Волноводная задача для инерционных волн на мелкой воде в пренебрежении членом $k_y \Omega_y$ (это можно сделать, если $k_y \ll k_z$, т. е. если масштаб изменения величин в направлении z много меньше длины волны в y -направлении) приводит к дисперсионному уравнению $\omega^2 = \xi^2 gH + 4\Omega_z^2$. Когда $\Omega_z \rightarrow 0$, получаем длинные гравитационные волны ($\omega = \xi \sqrt{gH}$). Таким образом, вращение Земли приводит к появлению дисперсии у длинных гравитационных волн.

Волны Россби могут быть исследованы в рамках тех же общих уравнений (4.23)-(4.26), но в приближении, когда $d\Omega/dyX = \beta = \text{const}$ (приближение β -плоскости; см. [33, с. 35]. Прежде чем обсудить свойства этих волн, заметим, что они весьма важны при изучении синоптических океанических вихрей [29, 40]. Эти вихри подобны циклонам и антициклонам в атмосфере (отсюда термин синоптические). Понимание их динамики в связи с процессами взаимодействия океана и атмосферы очень важно для построения корректной математической модели циркуляции атмосферы, а следовательно, обеспечения верного, хотя и сравнительно краткосрочного, предсказания погоды.

Линейные модели распространения волн Россби оказываются полезными при описании среднего дрейфа синоптических вихрей [40].

Традиционным приближением для получения волн Россби является допущение о том, что $k_z \gg k_y$. Оно и позволяет отбросить в уравнениях члены, содержащие горизонтальную составляющую вектора Ω , т. е. слагаемые, содержащие s . Главным условием существования этих волн является изменение вертикальной составляющей Ω , с широтой φ , т. е. изменение с широтой горизонтальной составляющей силы Кориолиса. Для того чтобы учесть это, разложим $q = (2/\omega)\Omega \sin \varphi$ в ряд по степеням y/a в точке $\varphi = \varphi_0 = \varphi_{x=0, y=0}$ и ограничимся двумя членами разложения. Очевидно, что

$$q = q(\varphi_0) + dq/d\varphi|_{\varphi=\varphi_0} \Delta\varphi = (2\Omega/\omega) \sin \varphi_0 + (2\Omega/\omega) \cos \varphi_0 \Delta\varphi,$$

$\Delta\varphi = y/a$, где a — радиус Земли. Окончательно получаем

$$q = (2\Omega/\omega) \sin \varphi_0 + \beta y/\omega, \quad (4.84)$$

$$\beta = (2\Omega/a) \cos \varphi_0. \quad (4.85)$$

Учет члена βy в выражении (4.84) называют учетом β -эффекта. Предполагая еще, что $c \rightarrow \infty$, с учетом сделанных допущений перепишем систему уравне-

ний (4.23)-(4.26) следующим образом

$$V_x + iqV_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad (4.86)$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) = 0, \quad (4.87)$$

$$-\rho_{00} \frac{1}{\mathcal{P}(z)} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} = \frac{i}{\omega} \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) \frac{1}{V_z}. \quad (4.88)$$

Мы уже говорили, что в такой системе уравнении возможно разделение переменных (см. §12.2). В последнем уравнении правая часть может зависеть только от x , а левая — от z . Вводя параметр разделения ε и приравнивая ему обе части последнего уравнения системы, получим

$$V_x + iqV_y = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial z}, \quad V_y - iqV_x = \frac{i}{\omega} \frac{\partial V_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = -i\omega\varepsilon V_z; \quad (4.89)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\rho_{00}} \mathcal{P}(z) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{P}(z)}{\partial z} + \rho_{00}(\omega^2 - N^2)\mathcal{V}(z) = 0. \quad (4.90)$$

Продифференцируем первое уравнение в (4.89) по y , второе по x и вычтем одно из другого, учитывая, что $dq/dy = \beta/\omega$. Используя в получившемся уравнении третье из (4.89), находим

$$\frac{\partial V_x}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial x} + \omega\varepsilon q V_z + i\frac{\beta}{\omega} V_y = 0. \quad (4.91)$$

Дифференцируя третье уравнение из (4.89) по y и используя второе уравнение, будем иметь

$$\frac{\partial V_y}{\partial y^2} + \omega^2 \varepsilon V_y = -\frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + iq\omega^2 \varepsilon V_x. \quad (4.92)$$

Выражение для $\partial^2 V_x / \partial x \partial y$ легко найти, взяв производную по y от (4.91). Подставив получившееся соотношение для $\partial^2 V_x / \partial x \partial y$ в (4.92) и используя первое уравнение из (4.89), удастся исключить из системы (4.89)-(4.90) V_x и V_y .

Уравнение для V_y имеет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - i\frac{\beta}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} + \omega^2 \varepsilon (1 - q^2) \right] V_y = 0. \quad (4.93)$$

Предположим, что $\omega \ll \Omega$ и $q^2 \gg 1$, т. е. $1 - q^2 \approx -q^2$. Если решение уравнения (4.93) имеет вид плоских волн $V_y = V_{y0} \exp[-i(k_x x + k_y y)]$, то дисперсионное уравнение получается таким:

$$[k_x + \beta/(2\omega)]^2 + k_y^2 = [\beta/(2\omega)]^2 - 4\varepsilon\Omega^2 \sin^2 \varphi_0. \quad (4.94)$$

Параметр разделения ε находится как собственное значение системы уравнений (4.90 с граничными условиями (4.30) и (4.31); эти уравнения и условия легко переписать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z^2} - \varepsilon \omega^2 \left(1 - \frac{N^2}{\omega^2}\right) \mathcal{V}(z) = 0, \quad (4.95)$$

$$\mathcal{V}(z)|_{z=-H} = \left[g\mathcal{V}(z) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{V}(z)}{\partial z} \right]_{z=0} = 0. \quad (4.96)$$

Если положить $\varepsilon = \xi^2/\omega^2$, то (4.95) совпадает с уравнением (4.74) для внутренних волн, а (4.96) — с граничным условием (4.43). Из соответствующих соотношений для волноводных волн (из второго из соотношений (4.77) и (4.80), а также (4.81)) имеем для моды $n = 0$, которая называется “баротропной”:

$$\varepsilon_0 = 1/(gH), \quad (4.97)$$

для мод более высоких порядков n , называемых “бароклинными”,

$$\varepsilon_n = \frac{n^2 \pi^2}{H^2} \frac{1}{N^2 - \omega^2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.98)$$

Проанализируем подробнее дисперсионное уравнение (4.94). Для того чтобы k_x и k_y были вещественными, необходима положительность правой части (4.94), т. е. должно выполняться условие $\beta/(2\omega) > 2\sqrt{\varepsilon}\Omega \sin \varphi_0$, которое с учетом определения (4.85) удобно переписать как

$$\operatorname{tg} \varphi_0 < (2a\omega\varepsilon^{1/2})^{-1}. \quad (4.99)$$

Если задана широта места φ_0 , то волны Россби существуют для частот $\omega < \omega_{\text{кр}}$, где критическая частота определяется формулой $\omega_{\text{кр}} = (2a\varepsilon^{1/2} \operatorname{tg} \varphi_0)^{-1}$. (В частности, для “баротропной” моды из (4.97) $\omega_{\text{кр}} = \sqrt{gH}(2a \operatorname{tg} \varphi_0)^{-1}$). Когда ω и φ_0 далеки от критических значений, в дисперсионном уравнении (4.94) можно пренебречь последним слагаемым. Предполагается, что $\omega > 0$. В этом случае закон дисперсии волн Россби имеет вид

$$\omega = -\frac{k_x \beta}{k_x^2 + k_y^2}. \quad (4.100)$$

Из этого уравнения видно, что оно удовлетворяется лишь при $k_x < 0$ (как и уравнение (4.94)). Это означает, что волны Россби распространяются только с востока на запад. Последнее подтверждается наблюдениями над синоптическими вихрями там, где средние течения океана слабые [40].

Лекция 5

Линейные волны в плазме

Общие сведения о плазме. Гидродинамическое описание плазмы (основные уравнения плазменной гидродинамики). Дисперсионное уравнение для плазменных ленгмюровских колебаний и анализ важных частных случаев. Элементы кинетической теории плазмы (плазма в продольном поле; плазменные колебания и затухания Ландау). Дисперсия волн в двухжидкостной плазменной гидродинамике, ионно-звуковые волны.

5.1 Общие сведения о плазме.

Как известно [41, 42] совокупность свободно движущихся разноименно заряженных частиц (ионизованный газ) называется плазмой, если дебаевский радиус мал по сравнению с размерами объема, занимаемого газом.

Напомним физический смысл радиуса Дебая. Плазму можно рассматривать как смесь трех компонентов — свободных электронов, положительных ионов и центральных атомов или молекул. Квазинейтральность плазмы, т. е. приближительное равенство плотностей электронов и ионов, определяется электрическими силами, которые связывают отрицательные и положительные заряды в плазме. При смещении группы электронов относительно ионов, т. е. при разделении зарядов, возникают электрические поля, стремящиеся восстановить квазинейтральность.

Пусть в каком-то объеме после возмущения остались заряды одного знака, что соответствует полному разделению зарядов. Если объемная плотность заряда $\rho = ne$ (n — концентрация частиц, e — заряд частицы), то поле в выделенной области удовлетворяет уравнению $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Очевидно, что для области с линейными размерами порядка x имеем $\operatorname{div} \mathbf{E} \sim E/x \sim 4\pi ne$ и $E \sim 4\pi nex$, что соответствует изменению потенциала плазмы в области разделения зарядов на величину $V \sim Ex \sim 4\pi nex^2$. Если разность потенциалов V велика, то разделения зарядов не будет: сильное поле вытолкнет из объема, где нарушена квазинейтральность, частицы с зарядом одного знака и втянет частицы другого знака.

Что будет, если выделенный в плазме объем мал настолько, что поле, созданное избытком в нем частиц одного знака, слабо и не может существенно изменить движение частиц? В таком объеме, для которого $x < r_D$ (r_D — характерный линейный размер), при заданных концентрации и температуре плазмы возможно нарушение квазинейтральности плазмы. Оценим r_D .

Если в области с линейным размером порядка r_D произошло полное разделение зарядов, то потенциальная энергия заряженной частицы имеет порядок тепловой энергии частиц, т. е. $W_n = eV \sim 4\pi n e^2 r_D^2 \sim k_B T$ (k_B — постоянная Больцмана, T — температура плазмы, которая пока принята одинаковой для электронного и ионного компонентов). Таким образом,

$$r_D \sim [k_B T / (4\pi n e^2)]^{1/2} \sim (T/m)^{1/2}. \quad (5.1)$$

Эту величину называют радиусом экранирования. Дело в том, что при введении в плазму пробного точечного заряда вокруг него образуется область сильного электрического поля, ограниченная сферой, радиус которой равен r_D (радиус Дебая, или дебаевская длина). Таким образом, радиус Дебая — это характерный пространственный масштаб областей декомпенсации плазмы, а рассматриваемому нами случаю соответствует условие $x \gg r_D$. Время t , в течение которого сохраняются области декомпенсации, пропорционально r_D/v_e , где скорость v_e электронов (наиболее быстрых частиц) определяется из соотношения $m_e v_e^2/2 \sim k_B T$ (m_e — масса электрона). Тогда характерный временной масштаб декомпенсации плазмы

$$t \sim [k_B T / (4\pi n e^2)]^{1/2} (2k_B T / m_e)^{-1/2} \sim [m_e / (4\pi n e^2)]^{1/2}.$$

Замечательно, что это время от температуры уже не зависит. Соответствующая этому времени частота

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}} \quad (5.2)$$

называется плазменной.

Сделаем еще два замечания о концентрации и температуре плазмы. Поскольку в плазме могут быть помимо однозарядных и многозарядные ионы, концентрации электронов и ионов не обязательно равны. Кроме того, так как массы электронов и ионов сильно различаются, плазма в общем случае характеризуется двумя температурами — электронной T_e и ионной T_i . Лишь когда средние кинетические энергии электронов и ионов близки, можно говорить просто о температуре T плазмы.

5.2 Гидродинамическое описание плазмы (основные уравнения плазменной гидродинамики)

Для описания распространения волн малой амплитуды в плазме удобно использовать модель двухжидкостной гидродинамики, в рамках которой плазма представляется смесью электронной и ионной жидкостей.

Модель справедлива, когда характерный пространственный масштаб много больше длины свободного пробега и характерный временной масштаб (характерная длительность процессов) t_p много больше времени τ между двумя столкновениями. Подобно обычной гидродинамике, для полного описания плазменной жидкости достаточно задать скорость любого компонента $\mathbf{v}(x, y, z, t)$, плотность $n(x, y, z, t)$ и температуру $T(x, y, z, t)$.

Движение единичного объема ионного (индекс i) или электронного (индекс e) компонента плазмы подчиняется второму закону Ньютона: $n_{e,i}m_{e,i}d\mathbf{v}/dt = \sum \mathbf{F}_s$, где $\sum \mathbf{F}_s$ — сумма сил, действующих на этот объем. Что это за силы? Если сразу отказаться от учета силы тяжести, то для ионного компонента это прежде всего, сила, обусловленная градиентом давления и равная $-\nabla p_i$. Как и в обычной гидродинамике, для замыкания системы уравнений плазменной гидродинамики нужно использовать уравнение состояния, связывающее давление, плотность и температуру. Давление каждого компонента плазмы с изотропным распределением заряженных частиц выражается, как и для идеального газа, уравнением состояния $p_{i,e} = n_{i,e}k_B T_{i,e}$. Используя уравнение состояния, получим, что $-\nabla p_i = -\nabla n_i k_B T_i$. Поскольку в плазме существует электрическое поле, то вторая сила, действующая на единичный ионный объем, — сила со стороны электрического поля, которая для однозарядных ионов равна $-n_{i,e}e_{i,e}\nabla\varphi$. Потенциал электрического поля φ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi e(n_i - n_e) \quad (5.3)$$

где $e_i = e_e = e$. Существование электрического поля приводит к тому, что в общем случае $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{v}_e$ поэтому между компонентами возникает сила трения \mathbf{F}_{ei} , которая определяется импульсом, передаваемым в единицу времени электронами ионам, причем $\mathbf{F}_{ei} = -\mathbf{F}_{ie}$ [43]. Наконец, если плазма помещена в магнитное поле, то на единичный объем действует еще и сила Лоренца, равная $-(1/c)e_{i,e}n_{i,e}[\mathbf{v}_{i,e}\mathbf{B}]$. Расшифровывая слагаемое $\sum \mathbf{F}_s$ в уравнении движения единичного объема ионной жидкости, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i = -\frac{\nabla n_i k_B T_i}{m_i n_i} - \frac{e_i}{m_i} \nabla \varphi + \frac{\mathbf{F}_{e,i}}{m_i n_i} - \frac{e_i}{cm_i} [\mathbf{v}_i \mathbf{B}]. \quad (5.4)$$

По аналогии для электронного компонента имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e = -\frac{\nabla n_e k_B T_e}{m_e n_e} - \frac{e_e}{m_e} \nabla \varphi - \frac{\mathbf{F}_{e,i}}{m_e n_e} - \frac{e_e}{c m_e} [\mathbf{v}_e \mathbf{B}]. \quad (5.5)$$

Уравнения (5.4) и (5.5) — уравнения Эйлера для двух заряженных взаимопроникающих жидкостей, которые взаимодействуют между собой благодаря трению и через самосогласованное электрическое поле. Если плазма сохраняет квазинейтральность и ионы однозарядные, то $n_i \approx n_e = n$. В этом случае можно перейти к модели одножидкостной гидродинамики, сложив уравнения (5.4) и (5.5). Тогда, если пренебречь силой Лоренца, получим

$$m_i n \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla [n k_B (T_i + T_e)], \quad (5.6)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}_i + (m_e/m_i) \mathbf{v}_e \approx v_i$ (слагаемые, связанные с силами «электрического трения» и трения из-за столкновений, взаимно уничтожились).

Для электронной и ионной жидкостей должны также выполняться уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{v}_e = 0. \quad (5.8)$$

При выводе предполагалось, что процессами ионизации и рекомбинации можно пренебречь.

5.3 Дисперсионное уравнение для плазменных ленгмюровских колебаний и анализ важных частных случаев.

Предположим, что все электроны в тонком слое холодной бесстолкновительной безграничной плазмы ($T_e = T_i = 0$, $F_{ei} = F_{ie} = 0$) внезапно смещены вправо так, что между плоскостями 1 и 2 на рис. 5.1,а электронов нет. Ионы плазмы будем считать неподвижными. Справа от плоскости 2 будет избыток заряда, что приведет к возникновению возвращающей силы $F_B = -eE_x$ обусловленной декомпенсацией зарядов. Величину E_x мы уже оценивали: если электроны сместились на x то $F_B \approx -4\pi n e^2 x'$. Эта сила сообщает им ускорение $-(4\pi n e^2/m_e)x'$, поэтому движение группы смещенных электронов описывается уравнением гармонических колебаний с плазменной частотой ω_p :

$$\ddot{x}' + \omega_p^2 x' = 0.$$

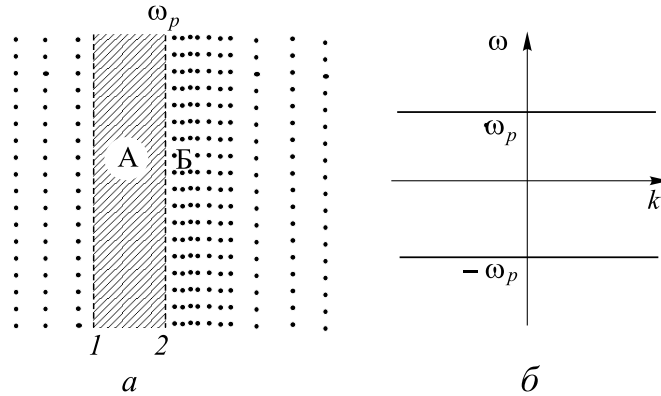


Рис. 5.1. К объяснению ленгмюровских плазменных колебаний; *a* — все электроны в тонком слое внезапно смещены вправо (А — область, где электронов нет; Б — область с избытком электронов); *б* — дисперсионная кривая $\omega^2 = \omega_p^2$.

. Такие колебания называются плазменными или ленгмюровскими колебаниями в “холодной” бесстолкновительной неподвижной плазме. Опишем их с помощью уравнений (5.4)-(5.8). Будем полагать, что магнитное поле равно нулю; столкновениями можно пренебречь; ионы не участвуют в колебаниях и являются однородным компенсирующим неподвижным фоном ($m_i \gg m_e$); плазма представляет собой одномерный поток электронов, движущийся со скоростью $v_0 = \text{const}$ в направлении оси x . Учтем также влияние сил, связанных с перепадом давления в плазме, т. е. влияние звуковых эффектов. Допустим, что начальное возмущение имеет вид плоской волны с частотой ω и волновым числом k ($f' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$). Для малых возмущений давление электронной жидкости $p_e = p_0 + p'$, концентрация $n = n_0 + n'$, скорость электронной жидкости $v = v_0 + v'$ (все возмущенные величины, много меньшие соответствующих невозмущенных). Давление электронной жидкости представим в виде $p_e(n_0 + n') = p_0 + m_e(\partial p_e / \partial \rho_0)n'$ (ρ — плотность электронного газа) и $\nabla p_e = m_e(\partial p_e / \partial \rho_0)(\partial n' / \partial x)$. При сделанных допущениях из уравнений двухжидкостной плазменной гидродинамики (5.4), (5.5) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} &= -\frac{1}{n_0} \frac{\partial p_e}{\partial \rho_0} \frac{\partial n'}{\partial x} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} &= 4\pi e n', \quad \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial n'}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Подставляя в эти уравнения $v', n', \varphi' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$, из условия совместности получившейся алгебраической системы находим закон дисперсии ленгмюровских

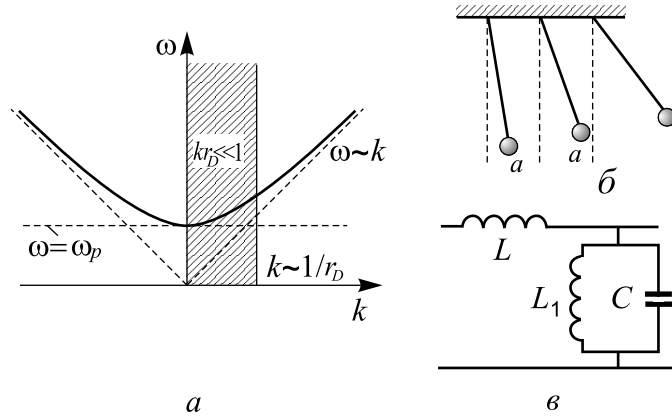


Рис. 5.2. Закон дисперсии для плазмы, представляющей собой среду с дисперсией в области низких частот; показана граница по k справедливости гидродинамической теории ($kr_D \ll 1$) (а). Механический (б) и электрический (в) аналоги волн в плазме (см. 13.10)

волн:

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 + k^2 \frac{\partial p_e}{\partial \rho_0} \quad (5.9)$$

Это уравнение при $v_0 = 0$ соответствует дисперсионному уравнению $\omega^2 = \omega_0^2 + k^2/(LC)$ для цепочки связанных маятников (см. рис. 5.2). Подобное (5.9) уравнение было получено впервые Ленгмюром, который исходил из аналогии со звуковыми волнами в воде (4.12). Здесь осталась неизвестной величина $\partial p_e / \partial \rho_0$. Чтобы замкнуть уравнения гидродинамики, будем считать давление электронной жидкости изотропным и связанным с концентрацией уравнением состояния $p_e/n^\gamma = \text{const}$, но $p_e = nk_B T_e$ поэтому $\partial p_e / \partial \rho_0 = \gamma p_e / (nm_e)$ ($\rho_0 = m_e n$). Как следует из кинетической теории [42], $\gamma = 3$ т.е. $\partial p_e / \partial \rho_0 = 3k_B T_e / m_e$. Уравнение $p \sim n^3$ является уравнением состояния газа в случае одномерного адиабатического сжатия и может быть получено из термодинамики. С учетом сказанного из (5.9) окончательно имеем

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 + \frac{3k_B T_e}{m_e} k^2 \quad (5.10)$$

Задача 5.1. В книге [41] для модели, в которой газ находится в среде с двумя параллельными плоскими стенками, расстояние между которыми медленно изменяется, уравнение $p \sim n^3$ получено из оценочных соображений, основанных на сохранении адиабатического инварианта $v_\perp l = \text{const}$, где v_\perp — компонента скорости частицы, перпендикулярная стенке, l — расстояние между стенками. Попробуйте рассмотреть эту модель самостоятельно. Формула $v_\perp l = \text{const}$ легко доказывается, если рассмотреть отражение частиц от неподвижной стенки.

График закона дисперсии для среды из осцилляторов, соответствующий уравнению (5.10) при $v_0 = 0$, показан на рисунке 5.2. Остановимся более подробно на анализе (5.9) для различных частных случаев.

Плазменные колебания в “холодной” неподвижной плазме. Уравнение дисперсии получается из (5.9) при $T_e = 0$ и $v_0 = 0$ и имеет уже известный нам вид $\omega^2 = \omega_p^2$ (см. рис 5.1,б). В “холодной” плазме ленгмюровские колебания не обладают дисперсией, и, если плазма покоится, они не распространяются, поскольку $v_{zp} = d\omega/dk = 0$. Следует, однако, заметить, что фазовая скорость отлична от нуля и равна $v_{\phi} = \omega/k = \omega_p/k$ (k — волновое число плоской волны возмущений).

Плазменные колебания в одномерном “холодном” потоке ($v_0 \neq 0, T_e = 0$). Из (5.9) находим, что

$$(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 \quad (5.11)$$

Легко видеть, что решением уравнения (5.11) являются широко используемые в СВЧ — электронике [44] волны пространственного заряда: медленная с $k = \omega/v_0 - \omega_p/v_0$ и быстрая с $k = \omega/v_0 + \omega_p/v_0$ (рис. 5.3). Плазменные колебания в одномерном “холодном” потоке представляют собой только что рассмотренные ленгмюровские колебания, которые переносятся электронами с дрейфовой скоростью v_0 . Поэтому волны пространственного заряда часто называют электрокинематическими.

Плазменные колебания в неподвижной “горячей” плазме ($T_e \neq 0, v_0 = 0$). Перепишем (5.9) при $v_0 = 0$ в виде

$$\omega^2 = \omega_p^2(1 + 3k^2r_D^2), \quad (5.12)$$

где $r_D = (k_B T_e / m_e \omega_p^2)^{1/2}$ — радиус Дебая (см. (5.1)). Дисперсионное уравнение (5.12) справедливо только для длинноволновых возмущений, когда $kr_D \ll 1$ или $r_D \ll \lambda$. Электроны смещаются за период $2\pi/\omega$ на расстояние, меньшее, чем длина волны; сжатие должно быть адиабатическим. Напомним, что мы раскладывали правую часть уравнения состояния в ряд и ограничивались одним членом разложения, поэтому и дисперсионное уравнение (5.12) имеет вид аналогичного разложения по малому параметру kr_D . Учет конечной температуры электронов в этом приближении дает лишь поправку к теории “холодной” плазмы. Легко видеть, что $v_{zp} = 3\omega_p kr_D^2 / \sqrt{1 + 3k^2r_D^2}$, откуда при условии применимости рассмотрения ($kr_D \ll 1$) имеем

$$v_{zp} \approx 3kr_D \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}. \quad (5.13)$$

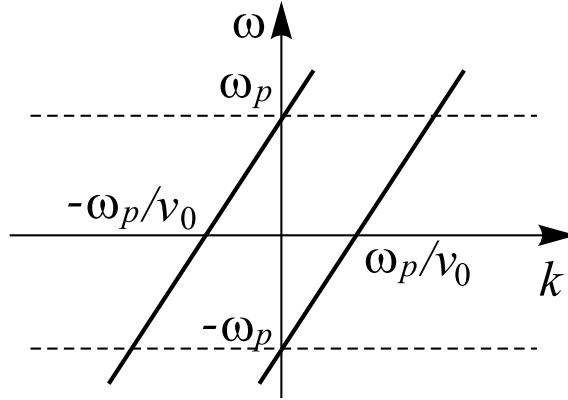


Рис. 5.3. Дисперсионные кривые для холодного одномерного электронного потока

Величина $\sqrt{k_B T_e / m_e}$ имеет порядок тепловой скорости электронов, поэтому групповая скорость волн в неподвижной “горячей” плазме, как это видно из (5.13), много меньше тепловой. Таким образом, волна переносит энергию через “горячую” плазму в отличие от предыдущего случая, где групповая скорость просто равнялась дрейфовой.

5.4 Элементы кинетической теории плазмы

Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, где \mathbf{x} — координата, \mathbf{v} — скорость частицы, так что $f d^3x d^3v$ — число частиц в области $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$, $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$ фазового пространства. Она удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k f) + \frac{\partial}{\partial v_k} (a_k f) = 0 \quad (5.14)$$

(см., например, [45]). В уравнении (5.14) нижние индексы обозначают декартовы компоненты, а суммирование ведется по $k = 1, 2, 3$. Пусть $\mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ — ускорение частицы, имеющей в точке \mathbf{x} скорость \mathbf{v} , причем, для частицы с массой m и зарядом e в электрическом поле \mathbf{E} и магнитном поле \mathbf{B}

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \right\}, \quad (5.15)$$

где квадратные скобки означают векторное произведение. Для любого ускорения, выражаемого формулой (5.15), $\partial a_k / \partial v_k = 0$, поэтому уравнение (5.14) можно переписать в виде :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial f}{\partial v_k} = 0, \quad (5.16)$$

которое в литературе (см., например, [45]) называют уравнением Больцмана — Власова.

При статистическом подходе функция f должна быть гладкой, т.е. дифференцируемой, функцией, которую будем обозначать \bar{f}^1 . В данном рассмотрении функция \bar{f} имеет смысл только в применении к достаточно большому объему фазового пространства $d^3x d^3v$, который содержит очень большое число частиц. При этом $\bar{f} d^3x d^3v$ есть среднее (а не точное) число частиц в этом объеме. Представляется разумным и выражение для полей в формуле (5.15) заменить сглаженными функциями $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$ $\bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t)$. Тогда окончательно имеем :

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k} + \bar{a}_k \frac{\partial \bar{f}}{\partial v_k} = 0, \quad (5.17)$$

где

$$\mathbf{a} = \frac{e}{m} \left\{ \bar{\mathbf{E}} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \bar{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t)] \right\}. \quad (5.18)$$

Если заряженных частиц несколько сортов s , то нужно использовать функцию \bar{f} для каждого сорта (\bar{f}_s). При этом уравнение (5.17) будет справедливо для каждого сорта частиц.

Очевидно, что плотность объемного заряда и плотность тока для s -го сорта заряженных частиц имеет вид:

$$\bar{\rho}_s = e_s \int \bar{f}_s d^3v, \quad (5.19)$$

$$\bar{\mathbf{j}}_s = e_s \int \mathbf{v} \bar{f}_s d^3v. \quad (5.20)$$

Систему уравнений (5.17)-(5.20) замыкают уравнения Максвелла, в которые могут входить плотности заряда $\rho_{внеш}$ и тока $\bar{\mathbf{j}}$, создаваемые внешним источником (если он есть). Чтобы применять уравнения (5.17) к “сглаженным” функциям распределения и компонентам электромагнитного поля, необходимо предположить, что сила, действующая на любую частицу, является непрерывной и медленно меняющейся в пространстве функцией, описывающей влияние всех остальных частиц на данную. Это справедливо практически для всех частиц, кроме расположенных вблизи от выбранной: для них изменения поля в рассматриваемой области физического пространства могут быть достаточно быстрыми. Между

¹При точном описании функция $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ представляет собой совокупность δ — функций (по одной на каждую частицу). Ускорение \mathbf{a} после учета собственного поля частицы должно определяться действием полей всех остальных частиц и полем внешнего источника, если такой есть. Иными словами, уравнение (5.16) при таком рассмотрении пригодно для решения задачи об определении траекторий частиц.

такими близко расположенными частицами могут происходить столкновения. Уравнение (5.17) можно с хорошим приближением применять только в случае, когда вклад от столкновения с одной или небольшим числом близлежащих частиц пренебрежимо мал по сравнению с коллективным влиянием далеких частиц. Поэтому уравнение (5.17) называют “Бесстолкновительным уравнением Больцмана — Власова” [45]. Заметим, что использованные ранее гидродинамические уравнения могут быть получены при определенных условиях из уравнения (5.17) (см., например, [45]). В векторной форме бесстолкновительное уравнение Больцмана — Власова можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right\} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (5.21)$$

заряд выбран как $+|e|$, черта над всеми величинами опущена. В невозмущенном состоянии $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ (\mathbf{B}_0 — однородное магнитное поле) и для каждого сорта частиц $f = f_0$ во всем пространстве. При этом функция f_0 зависит только от \mathbf{v} , а суммарные плотность заряда и тока равны нулю. В этом случае из уравнения (5.20) находим, что

$$[\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (5.22)$$

Если предположить существование малого возмущения, то

$$f = f_0 + f_1, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_1, \quad (5.23)$$

где f_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{E}_1 — малые возмущения. С учетом (5.23) и малости возмущений (следует пренебречь квадратами, произведениями и более высокими степенями возмущенных величин) линеаризованное уравнение (5.21) перепишем так:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}} + \frac{e}{cm} \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E}_1 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_1] \right\} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (5.24)$$

Будем искать решения уравнения (5.24) в виде

$$f_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1 \sim e^{i(\omega t - \mathbf{kx})} \quad (5.25)$$

и в большинстве случаев опускать в формулах экспоненциальный множитель. Пусть далее \mathbf{E}_1 параллельно \mathbf{k} , и оба вектора направлены вдоль оси x ; $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_1 = 0^2$. Задача в этом случае становится одномерной и уравнение (5.24) принимает

²При этих допущениях y - и z - компоненты скорости каждой частицы остаются постоянными, и их распределение не сказывается на результатах. Можно проинтегрировать уравнение (5.21) по v_y , v_z , рассматривая распределение лишь продольной скорости. Тогда

$$f_{\text{прод}}(x, v_x, t) = \iint f dv_y dv_z.$$

Задача стала одномерной и индекс “прод.” и у f_0 , и у f_1 можно опустить.

вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = -\frac{e}{m} E_1 \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (5.26)$$

Сначала предположим для простоты, что E_1 — заданное внешнее поле, т.е. правая часть уравнения (5.26) известна. Используя в уравнении (5.26) зависимости (5.25) находим, что

$$f_1 = \frac{ieE_1}{m} \frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv}. \quad (5.27)$$

Это “вынужденное” решение уравнения (5.26), которое разумно дополнить решением соответствующего однородного уравнения

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0. \quad (5.28)$$

Решение последнего можно представить в виде:

$$f_1(x, v, t) = \mathcal{F}(vt - x, v), \quad (5.29)$$

где \mathcal{F} — произвольная вещественная функция своих аргументов. Это решение соответствует потоковому переносу возмущения частицами, свободно движущимися с постоянной скоростью. Окончательно общее решение уравнения (5.26) запишем так:

$$f_1(x, v, t) = \frac{ieE_1}{m} \frac{\partial f_0/\partial v}{\omega - kv} e^{i(\omega t - kx)} + \mathcal{F}(vt - x, v), \quad (5.30)$$

где \mathcal{F} определяется начальными условиями. Как правило, интерес представляет не сама функция f_1 , а плотность заряда и тока

$$\rho = e \int f_1 dv, \quad J = e \int v f_1 dv. \quad (5.31)$$

Выберем в решении (5.30) функцию \mathcal{F} пропорциональной величине E_1 , сохраняя в ρ и J зависимость $e^{i(\omega t - kx)}$. Тогда ρ и j становятся пропорциональными E_1 , т.е.

$$\rho = \eta(\omega, k) E_1, \quad J = \sigma(\omega, k) E_1, \quad (5.32)$$

где функции η и σ могут быть комплексными.

Принцип причинности налагает на эти функции ряд условий, которые должны обеспечивать реакцию плазмы как следствие на вызывающий ее источник для того, чтобы гармонические решения при сложении давали реально существующее возмущение. Если источник равен нулю при всех $t < 0$, то нулю должна быть равна и реакция.

Пусть величина k — вещественная, а ω — комплексная и лежит в нижней полуплоскости (ω/k). В этом случае величины, пропорциональные $e^{i\omega t}$, не только осциллируют, но и экспоненциально нарастают во времени. Это можно интерпретировать так: возмущающее поле включили в бесконечно далеком прошлом, когда плазма была невозмущенной, и оно возросло до значения, соответствующего настоящему моменту времени. Тогда функцию F для соблюдения принципа причинности нужно выбрать равной нулю, иначе f_1 не обратится тождественно в нуль при $t \rightarrow -\infty$. Результирующие значения η и σ должны быть аналитическими функциями ω , и в нижней полуплоскости ω не должно быть полюсов, потому что они приведут к неустойчивости³.

Проведем вычисления, качественно описанные выше, для соотношения (5.30). При $\text{Im } \omega < 0$ и действительном k положим $\mathcal{F} = 0$. Тогда из соотношений (5.31) и (5.32) с учетом (5.30) находим:

$$\eta = \frac{ie^2}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{\omega - kv} dv, \quad (5.33)$$

$$\sigma = \frac{ie^2}{m} \int_{\infty}^{\infty} \frac{v(df_0/dv)}{\omega - kv} dv. \quad (5.34)$$

В выражениях (5.33) и (5.34) подынтегральные выражения имеют особенность при $v = \omega/k$, но она “не страшная”, поскольку полюс находится ниже контура интегрирования, как показано на рис. 5.4,а. Величину k можно без потери общности считать положительной. Устремим теперь $\text{Im } \omega$ к нулю. Тогда условие аналитичности η и σ требует обхода полюса сверху, как показано на рис. 5.4,б. Если $\text{Im } \omega > 0$ и поле затухает, то контур интегрирования становится таким, как на рис. 5.4,в. Иногда выбор контура в зависимости от $\text{Im } \omega$ называют правилом Ландау обхода полюсов. Если df_0/dv — аналитическая функция комплексной величины v , то правило обхода дает необходимое аналитическое продолжение по ω для функций η и σ .

При вещественном значении ω интегрирование проводится по контуру, пока-

³Напомним, что функция $f(z)$, где $z = \text{Re } z + i \text{Im } z = x + iy$, называется аналитической, если существует производная $f'(z) = df/dz$. Если записать $f(z)$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то для аналитической функции выполняются условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

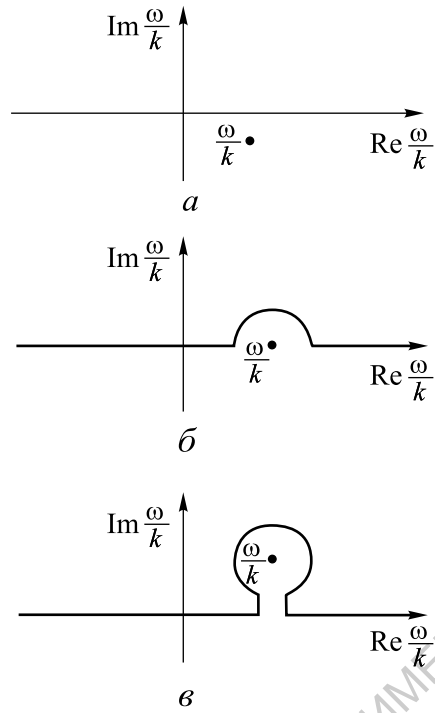


Рис. 5.4. Контуры интегрирования C , соответствующие правилу Ландау обхода полюса.

занному на рис. 5.4,б, и результат интегрирования можно записать в виде:

$$\int_C = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} - i\pi \text{Res}(\text{при } v = \omega/k) \quad (\omega - \text{вещественна}), \quad (5.35)$$

где \mathcal{P} — главная часть интеграла берется вдоль вещественной оси в точки син-

гулярности $v = \omega/k^4$. Это можно записать также в виде

$$\frac{1}{\omega - kv} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega - kv} + i\pi\delta(\omega - kv), \quad (\omega - \text{вещественна}) \quad (5.36)$$

δ — дельта функция Дирака.

Возможна следующая интерпретация соотношения (5.35): вклад от вычета — результат выбора ненулевой функции \mathcal{F} в формуле (5.30), а интеграл вдоль вещественной оси можно отождествить с частным решением (5.27). Тогда, если $\mathcal{F} \sim e^{-ikx}$, то ее следует записать в виде:

$$\mathcal{F}(vt - x) = e^{ik(vt-x)} F(v), \quad (5.37)$$

где $F(v)$ — произвольная функция. Сравнение этого выражения с представлением (5.36) при вещественном значении ω/k показывает, что функцию F нужно выбрать следующим образом:

$$F(v) = -\frac{\pi E_1 e}{m} \left[\frac{dt_0}{dv} \right]_{v=\omega/k} \cdot \delta(\omega - kv).$$

Если ω находится в верхней полуплоскости, то интегрирование проводится по контуру, изображенному на рис. 5.4,6 и

$$\int_C = \int_{-\infty-i\gamma}^{\infty+i\gamma} -2\pi i \operatorname{Res}(\text{при } v = \omega/k), \quad (\operatorname{Im} \omega > 0, \gamma > 0). \quad (5.38)$$

⁴Напомним основные сведения о вычетах, необходимые для наших вычислений.

Пусть $f(z)$ однозначная и аналитическая функция всюду на замкнутом контуре \mathcal{L} (по нему вычисляется $\oint_{\mathcal{L}} f(z) dz$) и всюду внутри \mathcal{L} , за исключением конечного числа точек z_1, z_2, \dots, z_N , расположенных внутри \mathcal{L} , контур \mathcal{L} ориентирован против часовой стрелки (в положительном направлении). Тогда справедлива теорема Коши о вычетах:

$$\oint_{\mathcal{L}} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z).$$

В правой части суммирование распространяется на все особые точки функции $f(z)$, расположенные внутри \mathcal{L} , если таких нет, то интеграл равен нулю. Из теоремы Коши вытекает интегральная формула Коши:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{L}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

причем, $f(z)$ — однозначная и аналитическая всюду внутри контура \mathcal{L} и на нем, а точка z_0 находится внутри \mathcal{L} .

Если подынтегральная функция $f(z)$ представляет собой отношение двух конечных функций $f(z) = g(z)/h(z)$, причем, в некоторой точке $z = z_0$ числитель отличен от нуля, а знаменатель обращается в нуль по закону $h(z) \sim z - z_0$ (полюс первого порядка), то

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

где штрих означает производную по z .

В этом случае выбор $F(v)$ не столь очевиден.

В теории плазмы часто используется и другое представление отклика плазмы на продольные поля. Уравнение Пуассона

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_1 = 4\pi(\rho_{\text{плазм}} - \rho_{\text{внеш}}),$$

где $\rho_{\text{плазм}} = \eta \mathbf{E}_1$ (см. формулы (5.32)), а $\rho_{\text{внеш}}$ — плотность заряда, обусловленная каким либо сторонним источником, перепишем в виде:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{внеш}},$$

$\mathbf{D} = (\varepsilon \mathbf{E}_1 / 4\pi)$. Тогда с учетом того, что все величины изменяются с координатой по гармоническому закону, “диэлектрическая проницаемость” ε представляет собой безразмерную величину

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi\eta}{ik} \quad \text{или} \quad \varepsilon(\omega, k) = 1 + \frac{4\pi\sigma}{i\omega}. \quad (5.39)$$

В такой трактовке заряды плазмы рассматриваются как источники поляризации, а не токов, поэтому имеет место аналогия не с проводящей средой, а с диэлектриком.

Предположим теперь, что поле \mathbf{E}_1 , которое до сих пор считали заданным, возникает за счет пространственного заряда самой плазмы. В рамках одномерной линеаризованной модели уравнение Пуассона при $\rho_{\text{внеш}} = 0$ примет вид:

$$-ikE_1 = 4\pi\rho, \quad (5.40)$$

где ρ — полная плотность пространственного заряда, создаваемая всеми составляющими плазмы. Будем далее для простоты считать, что ρ определяется только электронной компонентой. Это означает, что тяжелые ионы неподвижны и нейтрализуют статический заряд электронов. Согласно первому соотношению (5.32) и (5.40) имеем $\eta = -ik/4\pi$ или с учетом формулы (5.33) находим:

$$\frac{4\pi e^2}{mk} \int_C \frac{df_0/dv}{\omega - kv} dv = -1. \quad (5.41)$$

В этом уравнении контур C выбран согласно правилу обхода Ландау, т.е. вдоль вещественной оси, если $\operatorname{Im} \omega < 0$, и с обходом полюса сверху, если $\operatorname{Im} \omega \geq 0$. В силу первого уравнения из (5.39) уравнение (5.41) можно записать и так:

$$\varepsilon(\omega, k) = 0. \quad (5.42)$$

Будем считать величину k заданной, положительной и решать дисперсионное уравнение (5.41) относительно ω . Чаще всего это сделать непросто, но при заданной $f_0(v)$ в принципе возможно.

Имеются ли решения с ω в нижней полуплоскости? Если да, то имеет место неустойчивость и плазменные колебания возрастают экспоненциально. В следующей лекции покажем, что такая ситуация возможна, если, например, f_0 состоит из двух δ -функций, соответствующих двум скоростям потоков. Причем, при небольшом уширении распределения скоростей при переходе к непрерывному распределению f_0 решение все еще будет неустойчивым. Когда плазма с распределением скоростей f_0 будет устойчивой? Без доказательства примем, что достаточным условием устойчивости является наличие у функции $f_0(v)$ не более одного максимума, причем функция должна быть положительной и стремиться к нулю при $v \rightarrow \pm\infty$. Заметим, что этим требованиям удовлетворяет распределение Максвелла

$$f_0(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = n \sqrt{\frac{m^2}{(2\pi k_B T)^3}} e^{-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{u})^2}{2kT}}, \quad (5.43)$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — температура, n — концентрация, \mathbf{u} — скорость дрейфа компонент плазмы; при этом для двухкомпонентной плазмы, состоящей из однократно заряженных ионов (i) и электронов (e)

$$\int f_{0i} d^3v = \int f_{0e} d^3v = n, \quad (5.44)$$

$$\int v f_{0i} d^3v = \int v f_{0e} d^3v = n\mathbf{u}. \quad (5.45)$$

Далее для удобства выберем систему отсчета, в которой в среднем электроны покоятся, а $f_0(v)$ соответствует устойчивой плазме.

Перепишем уравнение (5.41) в виде:

$$D(\omega, k) = 0, \quad (5.46)$$

где

$$D(\omega, k) = \int_C \frac{df_0/dv}{\omega/k - v} dv + \frac{mk^2}{4\pi e^2}. \quad (5.47)$$

Как показано выше в рамках гидродинамической теории (см. формулу (5.11)) для холодной неподвижной плазмы дисперсионное уравнение имеет вид: $\omega^2 = \omega_p^2$, а учет тепловых скоростей при $kr_D \ll 1$ ($r_D \ll \lambda$), дает малую поправку к ω_p^2 , выражаемую соотношением (5.12). Если $kr_D \gg 1$, многие электроны успевают пройти за период колебания расстояние в одну длину волны и больше, вследствие

чего сжатие перестает быть адиабатическим. Кинетическая теория соответствует физике таких колебаний. Разумно проанализировать, что дает кинетическая теория по сравнению с гидродинамической в том же длинноволновом пределе.

Предположим, что имеет место разброс тепловых скоростей с некоторым характерным значением тепловой скорости v_T , таким, что $|v| \gg v_T$ и при этом функция $f_0(v)$ очень мала. В этом случае влияние теплового разброса пренебрежимо мало, если фазовая скорость волны $\omega/k \gg v_T$, так что практически все частицы неподвижны. В силу того, что при этом $\omega \sim \omega_p$, можно считать $\omega_p/k \gg v_T$, то $k \ll \omega_p/v_T$. Но радиус Дебая $r_D = \sqrt{k_B T/m_e \omega_p^2}$, а $k_B T \sim m_e v_T^2$; иными словами $r_D \sim v_T/\omega_p$ и $kr_D \ll 1$ ($r_D \ll \lambda$), что и соответствует длинноволновому приближению. Уже указывалось, что функция $f_0(v)$, будучи устойчивым распределением, монотонно спадая при $|v| \gg v_T$, обращается в нуль лишь при $v \rightarrow \pm\infty$. Пусть также ведет себя и df_0/dv . При этом решения с вещественными ω отсутствуют, поскольку в этом случае главная часть интеграла (см. формулу (5.35)) дает вещественный вклад в (5.47), а вычет — чисто мнимый. Поэтому положим $\omega = \omega_r + i\gamma$, где $(\omega_r - \omega_p)$ и γ — малые поправки к вещественной и мнимой частям ω , соответственно, что позволяет вычислить их методом последовательных приближений. В большинстве интересных случаев выполняется неравенство $\gamma \ll |\omega_r - \omega_p|$, поэтому в первом приближении можно пренебречь вычетом и решать уравнение $D(\omega, k) = 0$, оставляя только главную часть интеграла. Разложим подынтегральное выражение в (5.47) в ряд по kv/ω . Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{(\omega/k - v)} dv &= \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{(1 - kv/\omega)} dv = \\ &= \frac{k}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \frac{kv}{\omega} + \left(\frac{kv}{\omega} \right)^2 + \dots \right] \frac{df_0}{dv} dv. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Возьмем этот интеграл по частям, что дает

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_0/dv}{(\omega/k - v)} dv = \frac{k^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} f_0 \left[1 + 2 \frac{kv}{\omega} + 3 \left(\frac{kv}{\omega} \right)^2 + \dots \right] dv. \quad (5.49)$$

Интегрируя правую часть (5.49) почленно и учитывая, что $n = \int f_0 dv$ и $nk_B T = \int mv^2 f_0 dv$, окончательно находим⁵:

$$D(\omega, k) = \frac{mk^2}{4\pi e^2} - \frac{nk^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{3k_B T}{m\omega^2} + \dots \right). \quad (5.50)$$

⁵Следует заметить, что введенная выше температура T соответствует продольному движению и отличается от полной температуры, если распределение анизотропно.

Как и следовало ожидать, в первом приближении уравнение $D(\omega, k) = 0$ дает $\omega^2 = \omega_p^2$ ($\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$), а в следующем приближении $\omega^2 = \omega_p^2(1 + 3k^2 r_D^2)$, если положить $\omega = \omega_p$ в поправочном члене. Иными словами, получили полное совпадение с гидродинамической теорией. Процесс нахождения поправок можно продолжить и дальше (на каждом шаге ω является вещественной), но до тех пор пока можно пренебрегать вкладом от вычета. Вычислим теперь и вычет. Напомним, что было сделано предположение $\gamma \ll |\omega_r - \omega_p|$. Это означает, что поправка, вносимая слагаемым $i\gamma$ в ω меньше, чем вещественные поправки, которые вычислялись до сих пор. Величина ω_r найдена уже с достаточной степенью точности. Вычисляя $D(\omega, k)$ при $\omega = \omega_r$, получим

$$D(\omega, k) = \mathcal{P}[D(\omega, k)] + i\pi \left[\frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k}$$

(символ $\mathcal{P}[D(\omega, k)]$ обозначает величину $D(\omega, k)$, найденную без учета вклада от вычета). Очевидно тогда, что

$$D(\omega_r + i\gamma, k) = \mathcal{P}[D(\omega_r, k)] + i\pi \left[\frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k} + i\gamma \left[\frac{\partial D}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_r}. \quad (5.51)$$

Если $D = D_r + iD_i$, то

$$i\gamma \left[\frac{\partial D}{\partial \omega} \right]_{\omega=\omega_r} = \gamma \left[\frac{\partial D_r}{\partial \gamma} + i \frac{\partial D_i}{\partial \gamma} \right]_{\omega=\omega_r}.$$

Действительная часть этого выражения дает небольшую поправку к ω_r , которой можно пренебречь. Мнимая часть должна сократиться с вычетом в (5.51), если при подправленной частоте по-прежнему $D = 0$.

В соответствии с условиями Коши-Римана (см. сноску на стр. 99) $\partial D_i / \partial \gamma = \partial D_r / \partial \omega_r$, так как D аналитическая функция. Тогда

$$\gamma = -\pi \left[\frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k} \left[\frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \right]^{-1}. \quad (5.52)$$

Величину $\partial D_r / \partial \omega_r$ можно вычислить, используя, что при вещественных ω величина $D_r = \mathcal{P}(D)$. Пусть функция $\omega_r(k)$ определяется уравнением $D_r = 0$ (именно эту функцию мы определяем методом последовательных приближений (см. соотношение $\omega^2 = \omega_p^2(1 + 3r^2 k^2)$). Дифференцируя $D_r = 0$, получим

$$\frac{\partial D_r}{\partial k} + \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} \frac{d\omega_r}{dk} = 0. \quad (5.53)$$

Из формулы (5.47) следует, что

$$\frac{\partial D_r}{\partial k} = \frac{2mk}{4\pi e^2} - \frac{\omega_r}{k} \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r}. \quad (5.54)$$

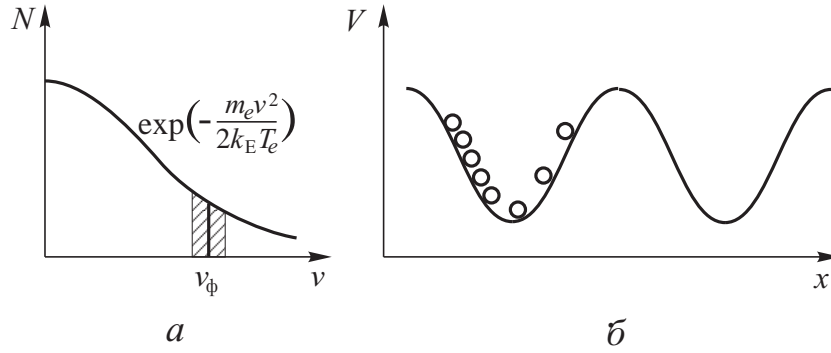


Рис. 5.5. К объяснению затухания Ландау: *a* — распределение электронов по скоростям (заштрихованная область соответствует резонансным электронам ($v_p \sim v_\phi$)); *б* — модель движения резонансных электронов в поле плазменной волны, если $v_p < v_\phi$, но одного порядка; большая часть электронов группируется на ускоряющем склоне потенциально “горба” плазменной волны.

Из соотношений (5.53) и (5.54) следует

$$\left(\frac{d\omega_r}{dk} - \frac{\omega_r}{k} \right) \frac{\partial D_r}{\partial \omega_r} = -\frac{2mk}{4\pi e^2}. \quad (5.55)$$

Тогда с учетом (5.55) выражение (5.52) принимает вид:

$$\gamma = -\frac{2\pi^2 e^2}{mk} \left[\frac{df_0}{dv} \right]_{v=\omega_r/k} \left(\frac{\omega_r}{k} - \frac{d\omega_r}{dk} \right). \quad (5.56)$$

В первом приближении $\omega_r = \omega_p$ и $d\omega_r/dk = 0$, и приходим к результату полученному впервые Ландау (Ландау Л.Д., ЖЭТФ, 1946, т.16, с.574). Поскольку $df_0/dv < 0$, $\gamma > 0$ и волна, содержащая множитель $e^{-\gamma t}$ затухает. Этот эффект называется “затуханием Ландау”.

Качественное объяснение эффекта состоит в том, что, если скорость электронов меньше фазовой скорости волны, но близка к ней, электроны забирают энергию у волны и колебания затухают. Чем больше будет таких резонансных частиц, тем больше будет затухание. Если функция распределения для плазмы монотонно спадает со скоростью $df_0/dv < 0$, то электронов, отстающих от волны будет больше, чем обгоняющих (отдающих энергию). Сказанное иллюстрируется на рис. 5.5.

В том случае, если скорость электронов больше фазовой скорости волны (но по — прежнему близка к ней) и $df_0/dv > 0$ для этой скорости, волна будет усиливающейся, что связывают с черенковским излучением плазменных волн резонансными частицами. Затухание Ландау и эффект Черенкова, в известном смысле

ле, — два явления, обратных друг другу, поскольку они тесно связаны условием $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$.

5.5 Дисперсия волн в двухжидкостной гидродинамике. Ионно — звуковые волны.

Будем исходить из уравнений двухжидкостной гидродинамики, считая, как и прежде, что $T_e \gg T_i$, магнитные поля отсутствуют, столкновениями можно пренебречь, и, кроме того, пренебрежем инерцией электронов в уравнении (5.5), т.е. пренебрегаем слагаемым $\partial \mathbf{v}_e / \partial t + (\mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e$. Тогда в одномерном случае из уравнений (5.3)-(5.7) получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad 0 = -\frac{1}{n_e m_e} \frac{\partial}{\partial x} (n_e k_B T_e) + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= -4\pi e (n_i - n_e), \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0. \end{aligned}$$

Пусть электроны имеют постоянную температуру, т.е. $T_e = \text{const}$. Тогда из второго уравнения в линейном приближении имеем, что

$$(k_B T_e / n_0) \partial n'_e / \partial x = e \partial \varphi / \partial x,$$

где $n_e = n_0 + n'_e$ ($n_0 \gg n'_e$), и, следовательно, первое уравнение можно переписать в виде $\partial v'_i / \partial t = -[k_B T_e / (m_i n_e)] \partial n'_e / \partial x$. Из третьего уравнения имеем $n'_i = n'_e - [1 / (4\pi e)] \partial^2 \varphi / \partial x^2$, или, используя выражение для $\partial \varphi / \partial x$, находим, что $n'_i = n'_e - [1 / (4\pi n_0 e^2)] \partial^2 n'_e / \partial x^2$. Окончательно преобразованную систему уравнений можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \frac{k_B T_e}{n_0 m_i} \frac{\partial n'_e}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial n'_i}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v'_i}{\partial x} &= 0, \\ n'_i &= n'_e - \frac{1}{4\pi n_0 e^2} \frac{\partial^2 n'_e}{\partial x^2}. \end{aligned} \tag{5.57}$$

Сравнивая систему уравнений для длинной линии, ячейка которой представлена на рис. 5.6 с системой уравнений (5.57), легко установить между ними прямое соответствие [46].

Для наглядности выпишем параметры и величины: для длинной линии

$$\begin{aligned} u, I, I', L, C_1, C, \\ 1/\sqrt{LC} = \omega_0, \quad 1/k_0^2 = c_1/c \sim (\Delta x)^2; \end{aligned}$$

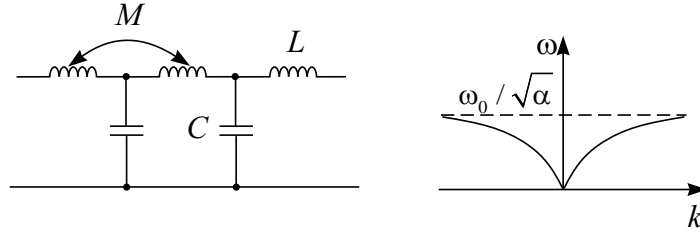


Рис. 5.6. Длинная линия с индуктивной связью M , моделирующая ионный звук в плазме.

для плазмы

$$v_i, n_e, n_i, 1/n_0, m_i/(4\pi e^2), m_i n_0/(k_B T_e), \\ (4\pi n_0 e^2/m_i)^{1/2} = \omega_{pi}, \quad 1/k_0^2 = k_B T_e/(4\pi n_0 e^2) = r_D^2.$$

Подчеркнем, что размер ячейки длинной линии (Δx) соответствует радиусу Дебая для плазмы.

Полагая, что все возмущения распространяются в виде плоских волн вида $\exp[i(\omega t - kx)]$, из (5.57) можно найти дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \omega_{pi}^2 k^2 / (k_0^2 + k^2)$$

или

$$\omega^2 = \frac{c_s^2 k^2}{1 + k^2 r_D^2}, \quad (5.58)$$

где $c_s = \sqrt{k_B T_e/m_i}$ — скорость ионного звука. Если $kr_D \ll 1$, то $\omega = c_s k$. С ростом k частота начинает расти медленнее, чем по линейному закону, фазовая скорость волны начинает падать; $v_{\phi} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Физически дисперсия ионного звука связана с тем, что колебания ионов происходят при неподвижных в среднем электронах: давление последних компенсирует действие электрического поля, не давая электронам смещаться. Дисперсия имеет место в области высоких частот. Приведем в качестве аналогии с длинной линией результаты эксперимента [46]. Разрядная трубка, использованная в эксперименте, схематически представлена на рис. 5.7,а. Между подвижными сеткой и анодом возбуждались стоячие волны; с помощью зонда приводился анализ возникших колебаний. Были обнаружены ионные звуковые волны с частотой $f_{кол} \sim 2\sqrt{k_B T_e/m_i}/L$ (L — характерный размер плазмы, например длина трубки или расстояние между электродами). Результаты эксперимента приведены на рис. 5.7,б.

До сих пор, говоря о плазме, мы имели в виду ионизованный газ. В последние годы широко исследуется плазма твердого тела. В частности, плазма полупроводников и металлов определяется как совокупность подвижных электронов и

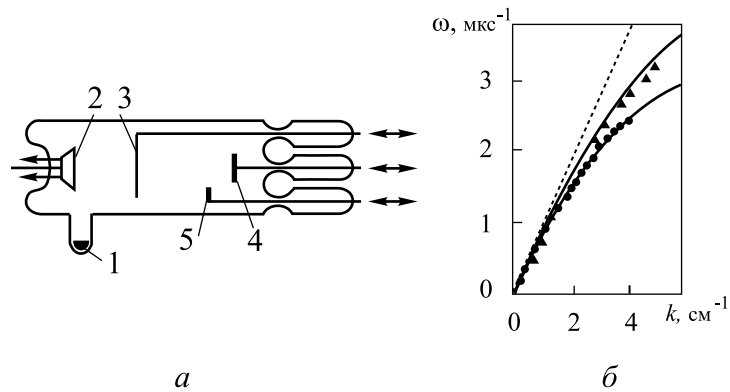


Рис. 5.7. Схема разрядной трубки (знаком \longleftrightarrow отмечен подвижной электрод; 1 — ртуть; 2 — катод; 3 — сетка; 4 — анод; 5 — зонд Ленгмюра (*a*) и измеренные экспериментально дисперсионные кривые для двух значений тока разряда (кружки — $I_p = 10$ мА; треугольники — $I_p = 16$ мА; штриховая линия — расчетная прямая по уравнению $\omega = \omega_0 k/k_0$ (*б*)) [46].

дырок, а также ионизованных атомов, связанных с кристаллической решеткой. Коллективные колебания в твердотельной плазме имеют много общего с рассмотренными нами колебаниями газоразрядной плазмы [47–49].

Лекция 6

Кинематика волнового движения

О различных способах введения понятия групповой скорости. Скорость распространения энергии. Два парадокса Л.И. Мандельштама, которые возникают, если не принимать во внимание различие понятий фазовой и групповой скорости. Фазовая, групповая и скорость распространения энергии волн в некоторых сплошных средах.

6.1 О различных способах введения понятия групповой скорости. Скорость распространения энергии.

В лекции 2 было дано напоминание волновой терминологии и обсуждены понятия фазовой и групповой скорости в простых ситуациях, когда дополнительные разъяснения не нужны. Однако, в случаях активной среды или содержащей переменные параметры вопрос о скоростях распространения волн требует обсуждения (см., например, [31, 50–52]). Будем далее в изложении в основном следовать книге [53].

Если изменение некоторой функции, характеризующей процесс распространения волны, можно представить в виде $u(x, t) = u_0 \operatorname{Re}\{\exp[i(\omega t - kx)]\}$, где $u_0 = \operatorname{const}$, то такая монохроматическая волна распространяется со скоростью

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} \quad (6.1)$$

Это — фазовая скорость волны, которая определяет скорость отдельного гребня, впадины или узла волны $u(x, t)$. Если ввести фазу $\varphi = \omega t - kx$, линейную по независимым переменным, то $\varphi = \operatorname{const}$ для наблюдателя, движущегося со скоростью $v_{\text{ф}}$. Действительно, $d\varphi/dt = \partial\varphi/\partial t + (dx/dt)\partial\varphi/\partial x = 0$, когда $dx/dt = v_{\text{ф}}$, поскольку по определению $\partial\varphi/\partial t = \omega$, а $\partial\varphi/\partial x = -k$. Однако передать сигнал с помощью монохроматической волны, очевидно, нельзя из — за ее однородности в пространстве и во времени (она должна существовать во все времена t

от $-\infty$ до $+\infty$ и на всей оси x от $-\infty$ до $+\infty$). Таких волн в природе, конечно, нет: у всякого волнового процесса есть начало и конец, т. е. реальный сигнал всегда имеет конечную ширину спектра частот и распространяется в общем случае со скоростью, не равной v_{ϕ} . Пусть теперь мы каким-то образом изменяем амплитуду или фазу волны, чтобы можно было передать информацию. Рассмотрим для определенности задачу с такими начальными условиями: в начальный момент времени $t = 0$ волна задана пространственным распределением $u = \text{Re}[f(x) \exp(-ik_0x)]$, причем $f(x)$ изменяется медленно по сравнению с $\exp(-ik_0x)$. Можно ожидать, что волна будет распространяться как волна с постоянной амплитудой $u = \text{Re}\{f(x) \exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]\}$, т. е. со скоростью $v = \omega_0/k_0$ (ср. с (6.1)). Однако в средах с дисперсией это не так. Действительно, представим $f(x)$ в виде интеграла Фурье

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ikx} dk, \quad \text{где} \quad g(k) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx.$$

Тогда

$$u(x, 0) \sim e^{-ik_0x} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ikx} dk \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-i(k+k_0)x} dk.$$

Заметим, что наш интеграл — это непрерывный набор волн постоянной амплитуды, существующих на всей оси x от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда для группы волн (волнового пакета)

$$u(x, t) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{i[\omega t - (k+k_0)x]} dk. \quad (6.2)$$

Как мы знаем, в диспергирующей среде $\omega = \omega(k)$. Медленность изменения $f(x)$ по сравнению с $\exp(-ik_0x)$ означает, что $g(k)$ отлично от нуля только для $k \ll k_0$, поэтому функцию $\omega(k)$ можно разложить в ряд и ограничиться двумя членами разложения:

$$\omega(k_0 + k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} k. \quad (6.3)$$

Подставляя (6.3) в (6.2), получаем

$$u(x, t) \sim e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-ik[x - (d\omega/dk)_{k_0} t]} dk$$

или

$$u(x, t) = f[x - (d\omega/dk)_{k_0} t] e^{i(\omega_0 t - k_0 t)}.$$

Если рассматривать $f[x - (d\omega/dk)_{k_0}t]$ как изменяющуюся амплитуду волны, фазовая скорость которой $v_\phi = \omega_0/k_0$, то изменение амплитуды распространяется с групповой скоростью.

$$v_{gp} = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k=k_0}.$$

Долгое время считалось, что на особенности распространения группы волн первым в 1876 году обратил внимание Дж. Стокс. Правда, в конспекте Л.И. Мандельштама (см. [50], стр. 420) было упоминание о более ранних работах У.Р. Гамильтона. В небольшой заметке [54] М.Л. Левина, замечательного физика и удивительного человека, показано сколь далеко продвинулся У.Р. Гамильтон в понимании этого вопроса задолго до Стокса и Рэлея. Гамильтон анализировал “среду” в виде дискретной решетки довольно общего вида с собственными волнами типа $u \sim \cos(kx - st + \psi)$ [55]. Он интересовался вопросом что будет через большой промежуток времени с возмущением, которое при $t = 0$ имело вид $u(0) \sim \cos(kx + \psi)$ и занимало ограниченную область решетки? Гамильтон получил следующий результат [55]: “... введенные выше формулы сразу имеют динамическое приложение и соответствуют распределению колебательного движения через систему взаимно притягивающихся или отталкивающихся точек; они приводят к тому замечательному результату, что скорость, с которой такое колебание распространяется в тех частях колеблющейся среды, которые ранее были невозмущенными, в общем случае отлична от скорости перехода некоторой данной фазы от данной частицы к другой внутри той части среды, которая уже полностью возбуждена:

$$\text{Скорость переноса фазы} = \frac{s}{k},$$

но

$$\text{Скорость распространения колебательного движения} = \frac{ds}{dk} \dots”$$

Название статьи М.Л. Левина “Как свет побеждает тьму...” связано с тем, что у У.Р. Гамильтона пишется о скорости, “с которой свет данного цвета завоевывает темноту...” [55]¹.

Учтем в разложении функции $\omega(k)$ в ряд еще одно слагаемое по сравнению с (6.3):

$$\omega(k_0 + k) = \omega_0 + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} k + \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} \frac{k^2}{2}.$$

¹Здесь уместно настоятельно порекомендовать читателю прочитать книгу [56]. Почему? Ответ звучит в первых строках предисловия ко второму изданию книги.

“Мы предвидели притягательность этой книги, но все же не ожидали столь проникающего ее воздействия на людей разных жизненных устоев. Вероятно, все мы тянемся сопоставлять свои свойства и судьбы с какими - либо “образцами” — предпочтительно “типично необычными”. И это обогащает наши жизни новыми смыслами...”

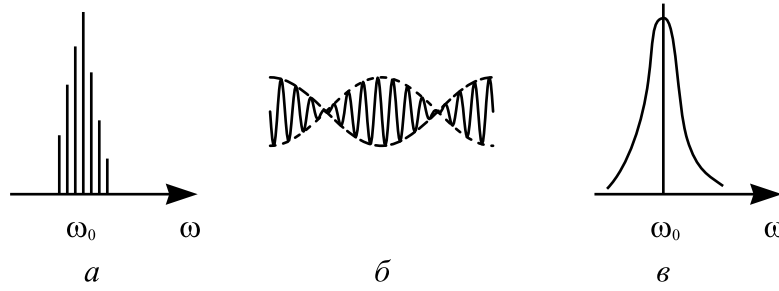


Рис. 6.1. Узкий дискретный спектр — все составляющие близки к ω_0 (а); пакеты волн, ограниченные огибающей модуляции (2), которая переносит в отличие от высокочастотного заполнения (1) всю информацию о сигнале (б) и пример непрерывного спектра сигнала (в).

Чтобы можно было пренебречь в показателе экспоненты в (6.2) дополнительной фазой $(d^2\omega/dk^2)_{k_0}(k^2t/2)$, должно выполняться неравенство $[(d^2\omega/dk^2)(k^2t/2)] \ll 1$, которое можно переписать в виде

$$|(\pi/v_{gp})(dv_{gp}/d\lambda)_{\lambda_0}\Delta| \ll 1.$$

Здесь введено расстояние $\Delta = v_{gp}t$, на которое сместилась "амплитуда" за время t , и использовано равенство $k = 2\pi/\lambda$, где λ — длина волны. Расстояние Δ — это тот характерный масштаб, на котором справедливо наше рассмотрение; он тем больше, чем меньше $(dv_{gp}/d\lambda)_{\lambda_0}$. Итак, групповая скорость есть характеристика движения волнового пакета в диспергирующей среде, если пакет еще сохраняет свою форму и размеры, т. е. на расстояниях порядка Δ . В некотором смысле пакет в этом случае подобен частице в классической механике, а групповая скорость всего пакета подобна скорости частицы.

Рассмотрим еще один способ введения понятия групповой скорости, для чего проанализируем распространение сигнала с дискретным спектром частот (смотри рис. 6.1,а)

$$u = \text{Re} \left[u_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} + u_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + u_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} + \dots \right].$$

Представим такую суперпозицию монохроматических волн с частотами $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots$ в виде

$$u = \text{Re} \left[F e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \right], \quad (6.4)$$

где

$$F = u_0 + u_1 e^{i[(\omega_1 - \omega_0)t - (k_1 - k_0)x]} + u_2 e^{i[(\omega_2 - \omega_0)t - (k_2 - k_0)x]} + \dots \quad (6.5)$$

Функция $F(x, t)$ называется комплексной огибающей высокочастотного сигнала в пространстве и во времени [51]. Смысл этого названия легко понять, если ввести $F = A \exp(i\varphi)$. Тогда из (6.4) имеем квазигармоническую волну $u = A \cos(\omega_0 t - k_0 x + \varphi)$ (A — огибающая, $(\omega_0 t - k_0 x)$ — высокочастотная фаза, φ — медленно изменяющаяся фаза). Если спектр сигнала узкий (все спектральные составляющие сосредоточены около ω_0), то все разности типа $\omega_n - \omega_0$ и $k_n - k_0$ ($n = 1, 2, \dots$) малы. Следовательно, в (6.4) функция F изменяется медленно со сравнениу с $\exp[i(\omega_0 t - k_0 x)]$. Экспоненциальный множитель соответствует распространению монохроматической волны с частотой ω_0 , которая называется несущей. Перепишем формулу (6.5) в виде

$$F = u_0 + u_1 \exp \left\{ -i(k_1 - k_0) \left[x - \frac{(\omega_1 - \omega_0)t}{k_1 - k_0} \right] \right\} + \\ + u_2 \exp \left\{ -i(k_2 - k_0) \left[x - \frac{(\omega_2 - \omega_0)t}{k_2 - k_0} \right] \right\} + \dots \quad (6.6)$$

Для узкого спектра можно положить

$$\frac{\omega_1 - \omega_0}{k_1 - k_0} = \frac{\omega_2 - \omega_0}{k_2 - k_0} = \dots = \frac{d\omega}{dk} = v_{gp}$$

(равенства выполняются тем точнее, чем уже спектр), и, следовательно,

$$F = u_0 + u_1 \exp[-i(k_1 - k_0)(x - v_{gp}t)] + \\ + u_2 \exp[-i(k_2 - k_0)(x - v_{gp}t)] + \dots = F(x - v_{gp}t). \quad (6.7)$$

Сказанное выше позволяет определить групповую скорость как скорость распространения огибающей сигнала (рис. 6.1, б). Если в дисперсионном уравнении связь между ω и k линейная и однородная, то $d\omega/dk = \omega/k = v_{\phi}$ и волновой пакет распространяется так же, как отдельная монохроматическая волна, — это отличительный признак среды без дисперсии.

Для сигнала с непрерывным спектром, занимающим узкий интервал около некоторой фиксированной частоты $\omega = \omega_0$ (рис. 6.1, в), соотношение (6.7) остается в силе [51]. Конечно, и при таком подходе понятие групповой скорости по-прежнему справедливо, пока пакет не исказился, т. е. для сравнительно малых промежутков времени и для сигналов с узким спектральным диапазоном.

Введем понятие групповой скорости теперь из более общих соображений для волны, которая квазигармонически плавно модулирована и по амплитуде, и по частоте, т. е. имеет вид $u(x, t) \exp[i\Psi(x, t)]$, где Ψ — быстро осциллирующая фаза (помимо узкого пакета можно рассмотреть широкий k -пакет, для которого

изменения k имеют порядок самого k). Мгновенные частоты и волновое число определяются производными фазы по формулам

$$\omega(x, t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad k(x, t) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (6.8)$$

и, очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (6.9)$$

Если разложить Ψ в ряд около какой-либо точки (x_0, t_0) , то ω и k совпадают с локальными частотой и волновым числом в традиционном определении, когда характерный масштаб изменений ω и k велик по сравнению с $1/\omega$ и $1/k$. Предположим, что на пространственных интервалах, много больших периода модуляции, но меньших характерного масштаба ее изменений, локальная частота близка к частоте синусоидальной волны с данным "локальным" значением k . Тогда ω и k связаны дисперсионным уравнением $\omega = \omega(k)$. Используя его в (6.9), получаем

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + v_{gp}(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (6.10)$$

где $v_{gp}(k) = \partial \omega / \partial k$. Таким образом, можно дать еще одно важное для понимания кинематики волнового движения определение: групповая скорость $v_{gp}(k)$ есть скорость распространения возмущений волнового числа k . Уравнение (6.1) для k является гиперболическим нелинейным уравнением даже тогда, когда исходная задача линейная. Из этого уравнения следует постоянство k вдоль кривых — характеристик на плоскости (x, t) , для которых $dx/dt = v_{gp}$ откуда, в свою очередь, вытекает, что и $v_{gp} = \text{const}$, т. е. характеристики — это прямые, определяемые уравнением

$$x - v_{gp}t = \text{const} \quad (6.11)$$

(рис. 6.2).

Ясно, что вместо (6.10) можно пользоваться уравнением

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + v_{gp}(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (6.12)$$

которое также нелинейно; о дисперсии, следовательно, можно говорить как о "частотной нелинейности". Левая часть (6.12) есть $d\omega/dt$, взятая вдоль линии $dx/dt = v_{gp}$ на плоскости (x, t) , т. е. уравнение (6.12) означает, что вдоль указанной линии $\omega = \text{const}$. Но тогда и $v_{gp}(\omega) = \text{const}$ вдоль характеристик $t - x/v_{gp}(\omega) = \xi(\omega)$, где $\xi = \text{const}$ для данного ω . Зависимость $\xi(\omega)$ определяется модуляцией частоты при $x = 0$; таким образом, общее решение уравнения (6.12) имеет вид

$$\omega = \Omega[t - x/v_{gp}(\omega)], \quad (6.13)$$

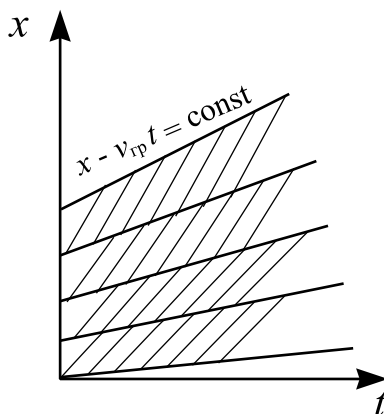


Рис. 6.2. Поведение группы волн на плоскости xt ; вдоль жирных прямых $x - v_{gp}t = \text{const}$ ($\lambda = 2\pi/k = \text{const}$); траектория гребней волн, возникающих из “ничего” и исчезающих на фронте, показаны тонкими линиями [31].

где Ω — произвольная функция, обратная $\xi(\Omega)$. Решение (6.13) подробно обсуждается в связи с теорией простых волн, поведение которых определяется тем, что каждая точка профиля простой волны движется со скоростью $v(\omega)$ — постоянной, но разной для разных ω . Поэтому можно представить волну как совокупность независимых групп, движущихся каждая со своей скоростью.

Очевидно, что в зависимости от модуляции частоты эти группы могут и расходиться, и сближаться, обгоняя друг друга и вновь расходясь. Если построить характеристики на плоскости (x, t) , то можно получить, например, фокус — точку, в которой сходятся две или три группы, потом эти группы опять разбегаются (рис. 6.3). При этом проявляется неоднозначность в решении (в потоке невзаимодействующих частиц). Здесь очевидна аналогия и с поведением лучей в обычной геометрической оптике (см гл. 10). В [52], например, показано, что эта аналогия не случайна, и для диспергирующей среды естественно говорить о приближении пространственно - временной геометрической оптики.

Если заменить ω через $v_{\phi}k$ и использовать $k = 2\pi/\lambda$, то из определения $v_{gp} = \partial\omega/\partial k$ приходим к формуле Рэлея.

$$v_{gp} = v_{\phi} - \lambda \frac{dv_{\phi}}{d\lambda}. \quad (6.14)$$

Из соотношения (6.14) видно, что групповая скорость может быть как положительной и нулевой, так и отрицательной, как больше фазовой, так и меньше. Простой способ определения v_{gp} по кривой $v_{\phi} = v_{\phi}(\lambda)$ был предложен еще Эренфестом. Этот способ легко понять из рис 6.4. Примерами реальных волн, у кото-

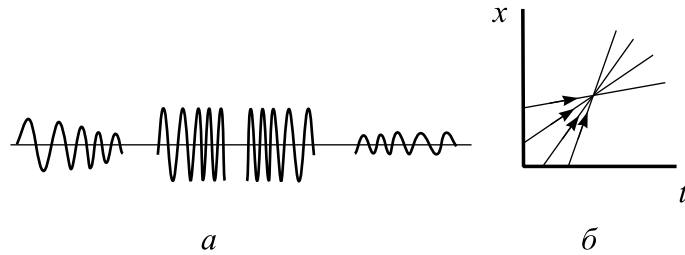


Рис. 6.3. Распространение частотно-модулированной волны. Схема сжатия и последующего расплывания пакета (а) и соответствующая пространственно-временная диаграмма (б).

рых v_{gp} и v_{ϕ} противоположны по направлению, служат обратные электромагнитные волны или обратные пространственные гармоники электромагнитной волны, которые распространяются в замедляющих системах, используемых в СВЧ усилителях и генераторах типа ламп с обратной волной (ЛОВ).

В лекциях [50], анализируя рисунки, подобные рис. 6.4, Л.И. Мандельштам приводит следующие красивые и понятные образы — примеры:

“...если кривая $v_{\phi}(\lambda)$ достаточно круто поднимается, то групповая скорость может обращаться в нуль, и сделаться отрицательной... При отрицательной групповой скорости медленно меняющаяся амплитуда движется в сторону, противоположную направлению распространения волн, составляющих группу.

Как представить себе это наглядно? Флеминг приводит следующий пример: по плывущей барже вереницей бегут мальчики, спрыгивают с носа в воду и взбираются затем на корму. Если мальчики будут бежать в сторону, противоположную движению баржи, то мы и получим картину

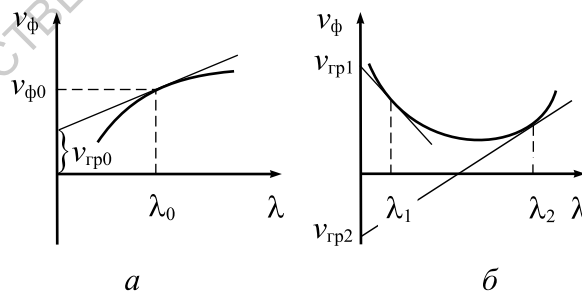


Рис. 6.4. К графическому определению v_{gp} : а — $v_{gp} > 0$; б — $v_{gp} > 0$ для $\lambda = \lambda_1$ и $v_{gp} < 0$ для $\lambda = \lambda_2$. Отрезок, отсекаемый на оси ординат касательной к кривой $v_{\phi}(\lambda)$, проведенной, например, в точке $\lambda = \lambda_0$ этой кривой, равен $|v_{\phi_0} - \lambda(\partial v_{\phi}/\partial \lambda)_0|$.

отрицательной групповой скорости (скорость баржи). Примером нулевой групповой скорости может служить эскалатор: ступени (играющие роль волн) движутся, а группа в целом, т.е. весь эскалатор стоит на месте”.

Мы не касались вопроса о скорости распространения короткого импульса в диспергирующей среде. Изложение состояния можно найти, например, в обзоре [57]. Подчеркнем лишь, что для короткого импульса и импульса с широким частотным спектром понятие групповой скорости становится неопределенным: форма импульса сильно искажается по мере его распространения.

Наконец, введем понятие скорости распространения энергии в среде:

$$V = \frac{\text{Средняя плотность потока энергии}}{\text{Средняя плотность энергии}}.$$

Как показано М.А. Леонтовичем, в том случае, когда в среде отсутствует поглощение и нет вращения плоскости поляризации, V совпадает с v_{gr} . Разумеется, по-прежнему нужно, чтобы спектр пакета был достаточно узким.

6.2 Парадоксы Л.И. Мандельштама

При рассмотрении некоторых волновых явлений могут возникать различные парадоксы, если не принимать во внимание различие фазовой и групповой скоростей. На два таких парадокса обратил внимание Л.И. Мандельштам [50, с.427-428].

Парадокс первый. В двух инерциальных системах координат, относительная скорость которых есть V , отсчеты времен t' и t связаны согласно преобразованию Лоренца соотношением

$$t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}}.$$

Пусть в нештрихованной системе сигнал в момент времени t вышел из точки x и в момент времени $t + \Delta t$ пришел в точку $x + \Delta x$. Тогда между выходом и приходом сигнала по часам штрихованной системы прошел промежуток времени

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - (V/c^2)\Delta x}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}} = \Delta t \frac{1 - Vv/c^2}{\sqrt{1 - (V^2/c^2)}}.$$

где $v = \Delta x/\Delta t$ — скорость сигнала в нештрихованной системе .

Очевидно, что при $v > c$ всегда найдутся такие $V < c$, для которых $(1 - Vv/c^2) < 0$, но тогда при $\Delta t > 0$ получается, что в штрихованной системе

$\Delta t' < 0$. Последнее означает, что сигнал придет раньше, чем вышел, т.е. нарушится принцип причинности. Чтобы этого не было, теория относительности утверждает: никакой сигнал (процесс, позволяющий воздействовать “отсюда — туда”) не может иметь скорости, большей скорости света. В вакууме фазовая скорость может быть больше скорости света, она не есть скорость сигнала.

Парадокс второй. Для гравитационных волн на глубокой воде $\omega = \sqrt{gk}$ (см. гл. 4), т.е. $d\omega/dk = (1/2)(g/k)^{1/2}$, но $v_\phi = \omega/k = (g/k)^{1/2}$, и, следовательно

$$v_{gp} = (1/2)v_\phi. \quad (6.15)$$

Тогда из выражения (6.15) видно, что для длинных волн и фазовая и групповая скорости могут быть больше скорости света c в вакууме.

Но мы только что пришли к выводу, что сигнал не может распространяться со скоростью, большей c . В чем же дело? В этом примере парадокс объясняется просто: закон дисперсии и, следовательно, формула для v_ϕ выведены для несжимаемой жидкости. Предположение же о несжимаемости противоречит теории относительности.

6.3 Фазовая, групповая и скорость распространения энергии волн в сплошных средах

Рассмотрим несколько примеров расчета фазовой и групповой скоростей волн в реальных сплошных средах. **1.** Для капиллярных волн из (4.61) следует, что $\omega = k^{3/2}(\sigma/\rho)^{1/2}$ и $v_{gp} = d\omega/dk = (3/2)(\omega/k) = (3/2)v_\phi$, т.е. скорость распространения энергии v_{gp} капиллярных волн больше скорости v_ϕ гребней (для данной длины волны).

2. В гл. 5 мы уже отмечали, что в одномерном “холодном” потоке электронов ленгмюровские колебания переносятся электронами с дрейфовой скоростью v_0 , т.е. $v_{gp} = v_0$. Кроме того, было установлено, что в неподвижной “горячей” плазме волна переносит энергию со скоростью $v_{gp} \approx 3kr_D \sqrt{kT_e/m_e}$, много меньшей тепловой. Рассмотрим теперь распространение поперечной плоской волны через ионосферу, состоящую из неподвижных свободных электронов.

При этом в отличие от гл. 5 проанализируем колебания в плазме с электродинамической точки зрения. Исходя из уравнений Максвелла и уравнения непрерывности в предположении, что все переменные изменяются по закону $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})]$, находим (см. [58])

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}) - (\omega^2/c^2)\mathbf{D} = 0. \quad (6.16)$$

Используя теперь уравнения движения заряженных частиц, вектор электрической индукции \mathbf{D} можно выразить через вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} : $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$, где $\hat{\varepsilon}$ — тензор диэлектрической проницаемости среды. Подставив это выражение для \mathbf{D} в (6.16), получим систему линейных однородных уравнений, поскольку $D_\alpha = \sum_\beta \varepsilon_{\alpha\beta} E_\beta$, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — матрица. Условие совместности этой системы уравнений приводит к дисперсионному уравнению (см. [58])

$$\text{Det} \|k^2 \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - (\omega^2/c^2) \varepsilon_{\alpha\beta}\| = 0, \quad (6.17)$$

δ — символ Кронекера.

В случае изотропной плазмы без магнитного поля $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ и для продольной волны из (6.16) находим, что

$$\varepsilon_{\parallel} = 0, \quad (6.18)$$

а для поперечной волны

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}. \quad (6.19)$$

Заметим, что в лекции 5 мы получили, исходя из кинетической теории плазмы, уравнение (5.42), аналогичное (6.18).

Задача 6.1. Используя уравнения Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, & \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0,$$

вывести уравнение (6.16). В выписанных уравнениях ρ — плотность заряда, \mathbf{j} — вектор плотности тока, \mathbf{E} и \mathbf{B} — векторы напряженности электрического поля и магнитной индукции.

Указание. Ввести вектор \mathbf{D} электрической индукции соотношением $\partial \mathbf{D} / \partial t = \partial \mathbf{E} / \partial t + 4\pi \mathbf{j}$ и показать, что $\text{div } \mathbf{D} = 0$.

Выразим ε_{\perp} из уравнения движения электронов $\partial v_{\perp} / \partial t = (e/m_e) \mathbf{E}_{\perp}$. Так как мы считаем что $v_{\perp}, \mathbf{E}_{\perp} \sim \exp i\omega t$, то $v_{\perp} = [e/(im_e\omega)] \mathbf{E}_{\perp}$. Поэтому для плотности тока имеем $\mathbf{j}_{\perp} = e\rho_0 \mathbf{v}_{\perp} = -i\omega_{pe}^2 \mathbf{E}_{\perp} / (4\pi\omega)$. По определению $\mathbf{D} = \varepsilon_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + 4\pi \mathbf{j}_{\perp} / (i\omega)$. Таким образом,

$$\varepsilon_{\perp} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (6.20)$$

Приравнивая правые части соотношений (6.19) и (6.20), получаем

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (6.21)$$

Итак, в ионосфере $v_{\phi} = c/\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}$ и $v_{zp} = c\sqrt{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}$ т. е. v_{ϕ} всегда больше c , $v_{zp} < c$, а $v_{\phi} v_{zp} = c^2$.

Последнее соотношение не является столь общим, как часто считают. В частности, для различных линий передачи, используемых в технике и электронике СВЧ, связь между v_ϕ и v_{zp} имеет вид (см. [59]):

$$v_\phi v_{zp} = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \left(1 \mp \frac{\tau}{k} \frac{d\tau}{dk} \right)^{-1}, \quad (6.22)$$

где $\tau^2 = k^2 - \beta^2$; k — волновое число в среде; β — фазовая постоянная в линии передачи; ε , μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; верхний знак соответствует $k > \beta$ (быстрые волны при $\varepsilon = \mu = 1$), нижний соответствует $k < \beta$ (медленные волны; $\tau^2 = \beta^2 - k^2$). Из (6.22) следует, что $v_\phi v_{zp} = c^2$, только если $\varepsilon = \mu = 1$ и $d\tau/dk = 0$. В частности, $d\tau/dk = 0$ для металлического волновода без потерь с однородным диэлектрическим заполнением, т. е. $v_\phi v_{zp} = c^2/(\varepsilon\mu)$. Для замедляющих систем типичны значения v_{zp} и v_ϕ , меньшие скорости света в среде.

3. Обратимся к внутренним волнам в стратифицированной жидкости (см. гл. 4). Пусть среда безгранична и частота Вайсяля $N = \text{const}$. Тогда справедливо уравнение (4.76): $\sin \theta = \mu(\omega/N)$. Предположим для определенности, что волна распространяется в сторону положительных z , т. е. $\mu = +1$. Воспользуемся для определения групповой скорости уравнением (4.76) или, что тоже самое, (4.75):

$$\omega = N\xi/k = N(k_x^2 + k_y^2)^{1/2}/(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2},$$

считая, что скорость $\mathbf{v}_{zp} = \mathbf{x}_0 \partial\omega/\partial k_x + \mathbf{y}_0 \partial\omega/\partial k_y + \mathbf{z}_0 \partial\omega/\partial k_z$, где \mathbf{x}_0 , \mathbf{y}_0 , \mathbf{z}_0 — соответствующие единичные векторы [31]. После выполнения дифференцирования и простых преобразований, получаем (см. [34])

$$\mathbf{v}_{zp} = (Nk_z/k^3)(k_z \xi/\xi - \xi \nabla_z). \quad (6.23)$$

Нетрудно видеть из (6.23), что $\mathbf{v}_{zp} \mathbf{k} = 0$, т. е. \mathbf{v}_{zp} направлен перпендикулярно \mathbf{k} (рис. 6.5). При $q \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$ и $\omega \gg \Omega$ из (4.40) имеем $\partial\mathcal{V}(z)/\partial z + [\xi^2/(\omega^2 \rho_{00})]\mathcal{P} = 0$, так что при $\mathcal{V}(z) = \mathcal{V}_0 \exp[i(\omega t - k_z z)]$ для давления находим

$$p = (tk_z \omega^2 \rho_{00}/\xi^2) \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})].$$

Следовательно, вектор $\nabla p = -i\mathbf{k}p$ направлен по \mathbf{k} . Для внутренних волн из (4.33) и (4.34) следует, что $V_{0x} = k_x/\omega$ и $V_{0y} = k_y/\omega$. С учетом (4.22) и этих соотношений для скоростей частиц получим

$$\mathbf{v} = (-k_z \xi/\xi^2 + \nabla_z) v_z, \quad v_z = -iv_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})]. \quad (6.24)$$

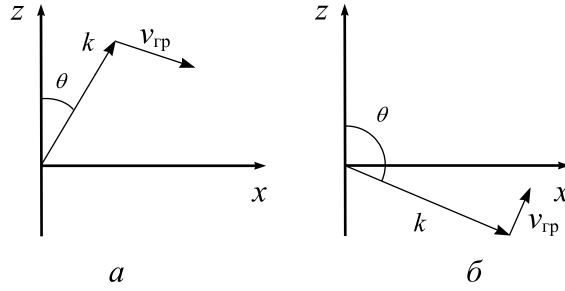


Рис. 6.5. К определению групповой скорости внутренних волн в стратифицированной жидкости [34]: а — волна бежит вверх, поток энергии направлен вниз ($k_y = 0, \mu = 1$); б — волна бежит вниз, поток энергии направлен вверх ($k_y = 0, \mu = -1$).

Но из (6.24) сразу имеем, что $\mathbf{v}\mathbf{k} = 0$, т.е. частицы движутся по траекториям, перпендикулярным \mathbf{k} в плоскости, где лежит вектор \mathbf{k} и ось z . Используя выражение для давления p и скорости частиц \mathbf{v} из (6.24), для средней по времени плотности потока энергии $\mathbf{P} = (1/4)(p\mathbf{v}^* + \text{к.с.})$ легко получаем соотношение

$$\mathcal{P} = (1/2)\rho_{00}v_0^2N^2\mathbf{v}_{zp}. \quad (6.25)$$

Аналогично для средней плотности энергии $W = (1/2)\rho_{00}\mathbf{v}\mathbf{v}^*$ находим

$$W = (1/2)\rho_{00}v_0^2N^2. \quad (6.26)$$

Из (6.25) следует, что поток энергии направлен по вектору групповой скорости (рис. 6.5), а скорость распространения энергии в среде $\mathbf{V} = \mathbf{P}/W$ в точности равна групповой скорости.

Задача 6.2. Докажите, что если дно наклонное, то выполняется следующий закон отражения волн: угол падения равен углу отражения, но по отношению не к нормали, а к вертикали поверхности дна (рис. 6.6). Для того чтобы отраженная волна компенсировала перпендикулярную границе составляющую скорости частиц в падающей волне, необходимо выполнение равенства

$$k_{\text{пад}} \sin(\Theta - \Psi) = k_{\text{отр}} \sin(\Theta - \Psi),$$

когда $k_{\text{пад}}$ и нормаль к границе лежат в плоскости рис. 6.6 (докажите это!). Отсюда следует любопытный вывод: при отражении меняется длина волны. Противоречия здесь нет: при данной частоте длина волны может быть любой (см. гл. 4).

Для волн Россби из уравнения (4.75) легко показать, что при k_y фазовая и групповая скорости волн направлены в разные стороны. В общем случае, когда $k_y \neq 0$,

$$\begin{aligned} \partial\omega/\partial k_x &= (\beta/\xi^2)(k_x^2 - k_y^2)/(k_x^2 + k_y^2), \\ \partial\omega/\partial k_y &= (\beta/\xi^2) \cdot 2k_x k_y / (k_x^2 + k_y^2), \end{aligned}$$

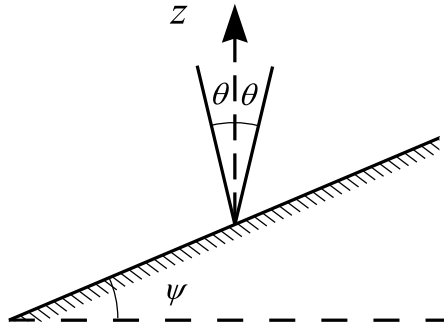


Рис. 6.6. К отражению волны от наклонного дна [34].

и для групповой скорости получаем

$$\mathbf{v}_{gp} = (\beta/\xi^2)(\mathbf{x}_0 \cos 2\gamma - \mathbf{y}_0 \sin 2\gamma),$$

т.е. \mathbf{v}_{gp} направлено от конца вектора ξ к центру круга (4.100), γ — угол между ξ и осью k_x .

Приведенные примеры показывают, что для сред с анизотропной дисперсией, т.е. для сред с дисперсионным соотношением $\omega = \omega(k_x, k_y, k_z)$, вектор групповой скорости ведет себя довольно нестандартно. Кажется ясным, что с точки зрения кинематики волн понятие групповой скорости можно обобщить на многомерные системы. Не вдаваясь в детали работ [7, 31], выпишем основные соотношения. Пусть в модулированной волне $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \exp[i\Psi(\mathbf{x}, t)]$ вектор \mathbf{x} имеет координаты x_1, x_2 и x_3 . Определим

$$\partial\Psi/\partial t = \omega, \quad \partial\Psi/\partial x_i = -k_i, \quad k_i = 1, 2, 3, \quad (6.27)$$

где k_1, k_2 и k_3 — компоненты волнового вектора. Дисперсионное соотношение имеет вид $\omega = \omega(k_1, k_2, k_3)$ или

$$\partial\Psi/\partial t = \omega(-\partial\Psi/\partial x_1, -\partial\Psi/\partial x_2, -\partial\Psi/\partial x_3). \quad (6.28)$$

Дифференцируя (6.28) по x_i с учетом определений (6.27), получаем трехмерный аналог (6.10) в следующей форме:

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0, \quad (6.29)$$

где $U_j = \partial\omega/\partial k_j$ — компоненты вектора групповой скорости. Если $U_j = dx_i/dt$, то компоненты k_j волнового вектора постоянны, а движение с постоянной скоростью U_j имеет место вдоль прямой $x_j - U_j t = \text{const}$. В работе [31] доказано, что

для синусоидальных волн групповая скорость $U_j = \partial\omega/\partial k_j$, совпадает в любых однородных анизотропных системах со скоростью распространения энергии (для внутренних волн мы это видели).

Более сложным является случай распространения волн в неоднородной нестационарной диспергирующей среде, когда $\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$. В этих случаях групповая скорость выступает как так называемая лучевая скорость. Мы не касаемся этого и более сложных вопросов, отсылая читателя к работам [7, 31, 60].

Задача 6.3. Известно, что по де-Бройлю в квантовой механике свободной частице, движущейся со скоростью v_0 , соответствует Ψ — волна, фазовая скорость которой определяется энергией и импульсом частицы. Вычислите фазовую и групповую скорости Ψ — волны.

Лекция 7

Введение в теорию устойчивости и неустойчивости волновых систем

Общие замечания. Примеры неустойчивостей: неустойчивость Джинса; неустойчивость Тьюринга. Усиление в лампе с бегущей волной. Условия самовозбуждения в лампе с обратной волной. Абсолютная и конвективная неустойчивости (метод характеристик). Волновые неустойчивости двух взаимодействующих электронных потоков. Неустойчивость Гельмгольца. Усиление и непропускание. Критерии разделения. Еще примеры неустойчивостей (акустический усилитель Ч. Белла; неустойчивость полых и ленточных электронных потоков).

7.1 Общие замечания

М.А. Миллер в своей лекции “Раздумья про раздумья” [61] так пишет об устойчивости и неустойчивости.

“Всякое движение или состояние может быть устойчивым или неустойчивым. Устойчивость, то есть долговременное пребывание, несмотря на разные помехи и попытки вышибания, в неизменном режиме (на свете все приблизительно и не бесконечно длительно). одно из самых необходимых свойств любого “законопослужного” мира, т.е. любой природы (выдуманной или естественной), где существуют хоть какие-нибудь “правила движения”. Не приходит ли вам в голову гипотеза, что только в таком в меру дисциплинированном мире могло возникнуть то, что мы называем жизнью... Думаю, простейшей иллюстрацией понятий устойчивости и неустойчивости является так называемая задача (взаимодействия) двух тел. Для простоты можно представлять себе Землю в качестве одного тела и притягивающийся к нему объект (от Ньютоновского яблочка до космического корабля) в качестве другого. В зависимости от приданной скорости, объект может либо плюхнуться обратно на Землю (раз) либо устойчиво начать вращаться вокруг нее в спутниковом режиме (два), либо удалиться за пределы воздействия поля притяжения (три). Три режима: слияние (раз), устойчивое

раздельно - совместное существование (два), независимость и возможность переприсоединения к другому объекту (три). Не кажется ли Вам (подумайте подтошнее!), что именно такой набор возможностей (подчинение, сосуществование и развод) обеспечивает все композиционное разнообразие любого большого сообщества объектов (полей, частиц, веществ и даже людей в конце концов). Удивительная по своей неожиданной постановке теорема (Эренфест) утверждает, что только в нашем трехмерном пространстве такой набор режимов осуществим.”

Термины “устойчивость” и “неустойчивость” сейчас имеют столь широкое хождение, что без дополнительных пояснений не всегда можно понять, о чем идет речь. Действительно, говорят об устойчивости системы вообще, об устойчивости ее вполне определенного движения (траектории или решения), об устойчивости равновесия и т. д. Да и сама устойчивость или неустойчивость может быть разной. Может быть устойчивость “в большом” — по отношению к произвольным возмущениям, “в малом” — определяемая свойствами линеаризованной задачи. Прилагательные при слове “неустойчивость” обычно характеризуют уже не столько математические ее особенности, сколько физические механизмы возникновения колебаний или волн — диссипативная неустойчивость, параметрическая, излучательная и т. д.

Будем заниматься механизмами неустойчивостей и исследованием устойчивости движения “в малом”, т.е. в рамках уравнений, полученных из исходных с помощью разложения в ряд вблизи интересующего нас решения всех нелинейных зависимостей и оставления лишь линейных членов (уже неоднократно обсуждавшаяся процедура линеаризации). Наиболее важным является исследование устойчивости, во-первых, статического положения системы, т.е. состояния равновесия линеаризованной системы с постоянными коэффициентами, во-вторых, периодических движений системы, малые отклонения от которых описываются линеаризованными уравнениями с периодическими коэффициентами.

В общем случае под неустойчивостью понимают изменение во времени величины, характеризующей процесс, такое, что эта величина со временем нарастает.

Для сосредоточенной системы с постоянными параметрами отклонение переменных от состояния равновесия удовлетворяет уравнению

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0, \quad (7.1)$$

где все a_n действительные и $a_0 > 0$. Нужно исследовать на устойчивость решение $x = 0$ уравнения (7.1). Состояние равновесия исходной системы устойчиво, если $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Будем искать решение (7.1) в виде $x \sim \exp(pt)$ (p —

комплексный параметр). Подставляя его в (7.1), получаем характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (7.2)$$

корни которого определяют характер решения.

Уравнение (7.2) имеет n корней $p_m = \operatorname{Re} p_m + i \operatorname{Im} p_m$. Задача об устойчивости сводится, таким образом, к оценке расположения корней на комплексной плоскости p . Если все корни расположены в левой полуплоскости (слева от мнимой оси), то с ростом t отклонение x будет уменьшаться как $\exp(-\operatorname{Re} p_m t)$, и, следовательно, состояние равновесия экспоненциально устойчиво. Если имеется хотя один корень в правой полуплоскости, то равновесие неустойчиво. Важно, что оценку расположения корней можно сделать, не решая уравнения (7.2). Связь месторасположения корней с коэффициентами уравнения — это чисто алгебраическая проблема, и известно довольно много способов оценки действительной части корней характеристического уравнения по коэффициентам полинома [17, 62]. Наиболее распространенными и удобными среди них являются критерий Рауса — Гурвица и метод D-разбиений.

Критерий устойчивости Рауса — Гурвица заключается в следующем. Для того чтобы все корни уравнения (7.2) имели отрицательные действительные части $\operatorname{Re} p_m < 0$, т.е. все корни многочлена $\Delta(p)$ лежали слева от мнимой оси, необходима и достаточна положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$D_n \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

Структура матрицы Гурвица такова: по главной диагонали расположены коэффициенты (от a_1 до a_n) уравнения (7.2); столбцы содержат поочередно коэффициенты только с нечетными или только с четными индексами (включая a_0); все недостающие элементы (коэффициенты с индексами, меньшими нуля или большими n) заменяются нулями. Главные диагональные миноры матрицы

Гурвица имеют вид

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Следовательно, критерий устойчивости Рауса — Гурвица сводится к следующему требованию:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0. \quad (7.4)$$

Применим этот критерий к исследованию корней характеристического уравнения линейного осциллятора $p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0$. Условия (7.4) сводятся к условию положительности коэффициентов $\gamma > 0$ и $\omega_0^2 > 0$.

Для характеристического уравнения третьего порядка

$$p^2 + ap^2 + bp + c = 0 \quad (7.5)$$

одной положительности коэффициентов для устойчивости равновесия уже недостаточно. Действительно, записав определитель Гурвица, найдем главные миноры: $\Delta_1 = a$, $\Delta_2 = ab - c$, $\Delta_3 = c(ab - c)$. Все миноры будут положительными, если $ab > c$. При невыполнении одного из указанных условий (положительность коэффициентов, или $ab > c$) состояние равновесия неустойчиво. Характер возникающей неустойчивости существенно зависит от параметров (см., например, таблицу 6.1 из книги [53, с. 134]).

Число “устойчивых” (“неустойчивых”) корней определяет размерность так называемого устойчивого W^s (неустойчивого W^u) многообразия, на котором вблизи состояния равновесия расположены приближающиеся к нему (уходящие от него) траектории. Когда эти многообразия двумерны, мы видим на них привычные нам устойчивые (неустойчивые) узлы или фокусы. Будут ли на этих многообразиях узлы или фокусы, зависит от знака дискриминанта

$$\Delta(a, b, c) = -a^2b^2 + 4b^3 + 4a^3c - 18abc + 27c^3.$$

При $\Delta < 0$ будут узлы; при $\Delta > 0$ — фокусы.

Критерий Рауса — Гурвица не всегда удобен для определения устойчивости. Так, для больших значений n приходится проделывать слишком громоздкие вычисления определителей и, следовательно, трудно записать условие устойчивости в общем виде. Кроме того, если система неустойчива, то трудно сказать, сколько имеется корней с положительной действительной частью, т.е. каков порядок неустойчивости. Хорошо бы иметь критерий, свободный от этих недостатков, который мог бы быть обобщен на распределенные системы (левая часть характеристического уравнения которых не полином, а квазиполином, т.е. полином по $\exp[\delta p]$). Для построения такого критерия удобен метод D -разбиений. Он заключается в следующем.

Пусть в характеристическое уравнение входит параметр λ , т.е. $\Delta(\lambda, p) = 0$. Нам надо знать, как при изменении λ меняется порядок неустойчивости, т.е. что происходит с корнями уравнения, как они передвигаются по плоскости p . Если при изменении λ корни не попадают на мнимую ось, то с точки зрения устойчивости вообще ничего не меняется; если же хотя бы один корень попал на мнимую ось, то данное значение параметра λ будет критическим, так как дальнейшее малое изменение λ может привести к изменению порядка неустойчивости на единицу. Нам надо связать изменение параметра λ , с фактом пересечения корнями мнимой оси. Так как корни характеристического уравнения комплексные, то удобно считать и λ комплексной величиной. Пусть на комплексной плоскости p корень пересекает мнимую ось, тогда на комплексной плоскости λ , это соответствует переходу параметра через некую границу, разделяющую области с различным порядком неустойчивости. Перебирая все значения p , лежащие на мнимой оси, и сопоставляя им значения λ , мы построим в плоскости λ границу D -разбиения, т.е. границу, разделяющую плоскость параметров на области с разным порядком неустойчивости.

Для построения этой границы поставим в соответствие точкам плоскости p точки плоскости λ , т.е. найдем из характеристического уравнения связь $\lambda = f(p)$. Если p меняется от $-\infty$ до ∞ , то и λ пробегает некую кривую на плоскости λ , причем в определенном направлении. Если заштриховать правую сторону мнимой оси, то и на этой кривой, лежащей на плоскости λ , следует заштриховать правую по направлению движения сторону. Тогда можно утверждать, что переход из незаштрихованной области в заштрихованную увеличивает порядок неустойчивости на единицу. Переход с плоскости p на плоскость λ соответствует конформному отображению. Для построения такого конформного отображения необходимо, чтобы можно было разрешить уравнение $\Delta(\lambda, p) = 0$ относительно λ , и, кроме того, необходима непрерывность и дифференцируемость $f(p)$, т.е.

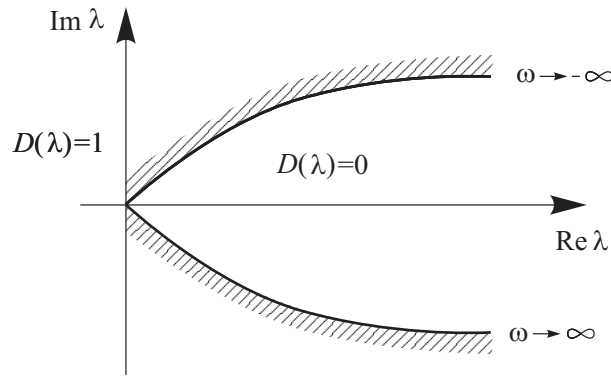


Рис. 7.1. Разбиение плоскости параметров λ на области с разным порядком неустойчивости для уравнения $p^2 + p + \lambda = 0$

функция должна быть голоморфной.

Рассмотрим простейший пример: $p^2 + p + \lambda = 0$. Разрешая это уравнение относительно λ , найдем $\lambda = -p^2 - p$, откуда при $p = i\omega$ находим $\lambda = \omega^2 - i\omega$. Следовательно, $\text{Re } \lambda = \omega^2$, а $\text{Im } \lambda = -\omega$. Таким образом, $\text{Re } \lambda = (\text{Im } \lambda)^2$. Граница области неустойчивости — это парабола (рис. 7.1). Внутри нее — область устойчивости. Вне — порядок неустойчивости $D(\lambda) = 1$.

Метод D -разбиений можно использовать и в случае, когда число корней характеристического уравнения счетно. Именно таким, как мы видели в гл. 3, оказывается спектр резонатора без излучения на границах. Если резонатор одномерный, то спектр волновых чисел всегда эквидистантный: $k = \pi n/l$ ($n = 1, 2, \dots$) для резонатора с идеальным отражением на концах и $k = 2\pi n/l$ для кольцевого резонатора. Поскольку в дисперсионном уравнении $D(\omega, k) = 0$ k — теперь фактически номер моды $k \sim n$, то из этого уравнения, перебирая n , нетрудно определить границу устойчивости распределенной системы с дискретным спектром.

Приведем простой пример. Будем считать, что резонатор кольцевой и рассмотрим его устойчивость только по отношению к волновым возмущениям, распространяющимся вправо. Если в среде нет дисперсии и потерь, то из волнового уравнения $u_t + v_0 u_x = 0$ сразу получаем значения частот $\omega_n = 2\pi n v_0 / l$. Все частоты действительны, так как все счетное множество корней характеристического уравнения $D(p, n) = 0$ лежит на мнимой оси плоскости $p = i\omega$. Таким образом, система устойчива. Если в той же среде учесть высокочастотные потери, например вязкость, то уравнение бегущей волны примет вид $u_t + v_0 u_x - \nu u_{xx} = 0$, а решения характеристического уравнения запишутся в виде $\omega_n = (2\pi/l)(v_0 + i\nu n 2\pi/l)n$. Теперь все корни лежат в верхней полуплоскости ω плоскости со (или в левой

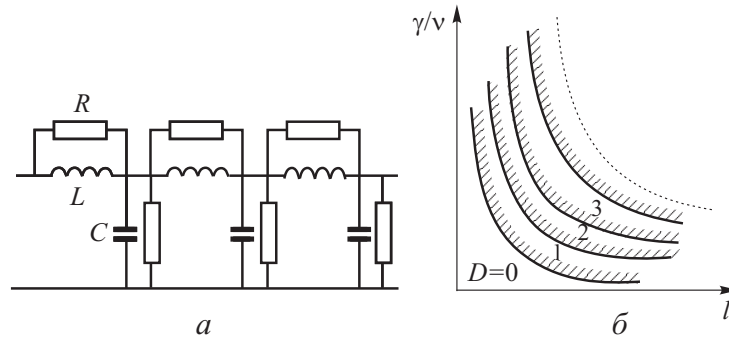


Рис. 7.2. Схема цепочки, соответствующей уравнению (7.6) (а) и разбиение плоскости параметров $\lambda/\nu, l$ на области с различным порядком неустойчивости (б)

полуплоскости плоскости p), т.е. устойчивость лишь усилилась и стала экспоненциальной.

Введем в среду отрицательную диссипацию, проявляющуюся независимо от масштабов возмущения. Для определенности будем считать, что такая неравновесная среда моделируется цепочкой, изображенной на рис. 7.2,а. Уравнение бегущей волны в такой среде запишем в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma u = 0. \quad (7.6)$$

Отыскивая решения $u(x, t) = v \exp[i(\omega t - kx)]$ для кольцевого резонатора, получаем характеристическое уравнение:

$$\omega_n = \frac{2\pi n v_0}{l} + i\nu \left[\left(\frac{2\pi n}{l} \right)^2 - \frac{\gamma}{\nu} \right].$$

На рис. 7.2,б приведено разбиение плоскости параметров $\gamma/\nu, l$ на области с различным порядком неустойчивости. В коротком резонаторе $l < l_{кр} = 2\pi/\sqrt{\gamma/\nu}$ возможна лишь статическая неустойчивость, так как в правой полуплоскости плоскости p расположен только один корень — с $\text{Im } p = 0$ (т.е. $\text{Re } \omega = 0$), соответствующий экспоненциальному росту пространственно однородного поля. При увеличении $l > l_{кр}$ порядок неустойчивости растет, однако при любом конечном l число корней в правой полуплоскости p всегда конечно.

Итак, когда речь идет об исследовании устойчивости ограниченных распределенных систем (резонаторов), задача по сравнению с соответствующей сосредоточенной усложняется лишь тем, что спектр комплексных собственных частот оказывается счетным. При этом, перебирая все возможные пространственные

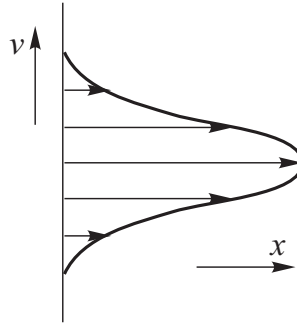


Рис. 7.3. Профиль скорости в затопленной струе

возмущения, т. е. все допустимые граничными условиями значения волновых чисел k_n , мы, определив корни характеристического уравнения $D(\omega, k)$, полностью решаем задачу об устойчивости. Здесь, конечно, могут встретиться трудности, но трудности технические.

Если же система полуограничена или безгранична, то сама постановка задачи об устойчивости, вообще говоря, не очевидна и требует дополнительных размышлений. Действительно, теперь, рассматривая устойчивость возмущений в интересующей нас области пространства, мы должны решить задачу об эволюции пространственно-локализованного возмущения — задачу с начальными условиями

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \sum_s \int_{-\infty}^{\infty} u_s(k, 0) e^{i[\omega_s(k)t - kx]} dk, \quad (7.7)$$

где $u_s(k, 0)$ — пространственный спектр начального возмущения, а суммирование проводится по всем нормальным волнам. Как поведет себя возмущение в заданной точке или локализованной области? Ведь экспоненциальный рост во времени отдельных k -компонент пространственного спектра отнюдь не гарантирует временного роста возмущения в этой точке или области. Действительно, возмущение может, нарастая во времени, просто покинуть рассматриваемую область, убегая из нее. Именно такая “сносовая”, или конвективная, неустойчивость наблюдается, например, в некоторых сдвиговых гидродинамических течениях (в частности, затопленных струях (см. рис. 7.3), а также в различных электронных системах — лампе бегущей волны (ЛБВ), плазме, пронизываемой электронным пучком, и т. д.

Если же среди нарастающих возмущений находятся такие, которые не покидают заданной области, т.е. в каждой точке этой области возмущение растет, то это уже истинная (см. общее определение, данное выше) неустойчивость. Такую

неустойчивость называют абсолютной¹). Формальные определения, следовательно, должны быть такими: если

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \rightarrow \infty \quad x \in (x_1, x_2), \quad (7.8)$$

где $u(x, t)$ — возмущение (x_1, x_2 — границы интересующей нас области, в которой имеется неустойчивость), то неустойчивость — абсолютная; если же

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) \rightarrow 0 \quad x \in (x_1, x_2), \quad (7.9)$$

то неустойчивость конвективная.

Естественно, что вид неустойчивости зависит от выбора системы координат. Если мы движемся вместе с убегающим, растущим во времени возмущением, то в новой системе координат неустойчивость будет уже не конвективной, а абсолютной. И наоборот, если в системе с абсолютной неустойчивостью перейти к новым переменным $t' = t$, $x' = x - v_0 t$, где v_0 превышает максимальную скорость распространения возмущений (такой переход, конечно, (возможен не всегда; например, не имеет смысла переходить в систему координат, движущуюся со скоростью, большей скорости света), то неустойчивость из абсолютной превратится в конвективную.

С проблемой разделения абсолютной и конвективной неустойчивости тесно связана другая, может быть, даже более важная для приложений проблема о распознавании усиления и непропускания в полуограниченных системах, возбуждаемых сосредоточенным источником. Поясим эту проблему подробнее.

Пусть на границу $x = 0$ среды, описываемой дисперсионным уравнением $D(\omega, k) = 0$, подается сигнал. Для простоты будем считать его радиоимпульсом с частотой заполнения ω_0 . Предположим далее, что корни уравнения $D(\omega_0, k) = 0$ не действительные, и пусть есть корни и с $\text{Im } k < 0$, и с $\text{Im } k > 0$. Что будет происходить с сигналом по мере распространения его в среде вдоль оси x ? Казалось бы, поскольку решение имеет вид

$$e^{\text{Im } k x} e^{i \omega_0 t} e^{-i \text{Re } k x},$$

при $\text{Im } k > 0$ сигнал должен нарастать вдоль x . Утверждение, вообще говоря, неверно. Например, когда мы пытаемся возбудить колебания на частоте $\omega < \omega_0$ в цепочке связанных маятников (рис. 7.4, а; дисперсионная характеристика этой системы приведена на рис. 7.4, б), мы получим не усиление колебаний вдоль оси

¹Впервые проблема разделения абсолютной и конвективной неустойчивостей была поставлена Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем [27] в связи с анализом гидродинамической неустойчивости.

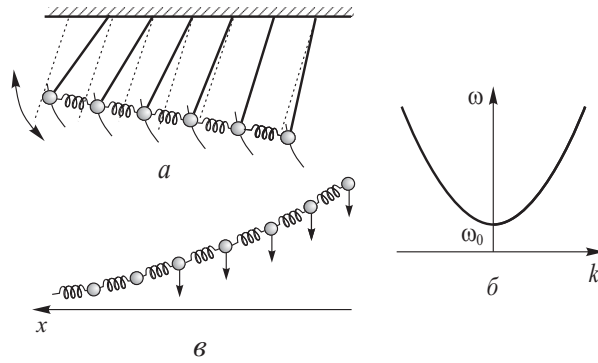


Рис. 7.4. Колебания (в плоскости, перпендикулярной рисунку) в цепочке связанных маятников (*a*); дисперсионная характеристика этой колебательной системы (*б*) и затухание колебаний вдоль направления их распространения (*в*) [63]

x , а экспоненциальное затухание (рис. 7.4, *в*). Колебание не возникает; в среде на закритической частоте имеет место непропускание, хотя и в этом случае при $\omega < \omega_0$ имеется корень уравнения $D(\omega, k) = 0$ с $\text{Im } k > 0$. В чем же дело? Ответ заключается в следующем: существование корня уравнения $D(\omega, k) = 0$, лежащего в верхней полуплоскости комплексной плоскости k , само по себе еще не означает усиления. Волна, соответствующая этому корню, может распространяться влево ($\text{Re } k < 0$), и тогда она будет затухать в направлении своего распространения (рис. 7.4, *в*). В отличие от аналогичной задачи о неустойчивости синусоидального решения во времени (в которой t всегда растет), здесь оба направления изменения переменной x имеют смысл.

В этой лекции мы обсудим различные примеры неустойчивых а усиливающих сред и сравнительно простые критерии, позволяющие отделить усиление от непропускания и определить, какая неустойчивость реализуется в системе — абсолютная или конвективная.

7.2 Примеры волновых неустойчивостей

7.2.1 Неустойчивость Джинса

Неустойчивость Джинса — основная неустойчивость гравитирующих систем.

Гравифизикой называют область науки, изучающую физическую эволюцию астрономических объектов под действием гравитационных сил. Эволюция “классических” астрономических объектов² определяется Ньютоновыми силами тяго-

²К ним можно отнести планеты, звезды, звездные скопления, галактики, их группы и скопления.

тения, рассматривается в рамках нерелятивистской, или классической, гравифизики.

Джинс рассмотрел в рамках уравнений гидродинамики устойчивость самой простой, по его мнению, гравитирующей системы — бесконечно протяженного по всем направлениям покоящегося в пространстве однородного распределения гравитирующего газа (см., например, [64]). Исходя из однородности и изотропии такого равномерно заполненного Ньютоновского мира, Джинс принял, что гравитационная сила в любой точке равна нулю и стационарна.

Гидродинамические уравнения для такой системы имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \rho &= -\rho \nabla \mathbf{v}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \Phi, \\ \Delta \Phi &= 4\pi G \rho,\end{aligned}\tag{7.10}$$

где ρ — плотность, \mathbf{v} — скорость, p — давление, Φ — потенциал гравитационного поля, G — гравитационная постоянная. Стационарные величины будем отмечать индексом “0”, а малые отклонения от стационарных величин — значком “ \sim ”. Будем считать, что до момента времени $t = 0$ (т.е. при $t < 0$) система стационарна, причем $v_0 = 0$, а при $t \geq 0$ массовая плотность $\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \tilde{\rho}(\mathbf{r}, t)$, гравитационный потенциал $\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 + \tilde{\Phi}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$. Используя введенные величины, запишем с учетом системы уравнений (7.10) линеаризованные уравнения непрерывности, движения, Пуассона и состояния:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_0 \tilde{\mathbf{v}}) = 0,\tag{7.11}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{r}},\tag{7.12}$$

$$\Delta \tilde{\Phi} = 4\pi G \tilde{\rho},\tag{7.13}$$

$$\tilde{p} = c_0^2 \tilde{\rho}.\tag{7.14}$$

При выводе уравнения состояния (7.14) использовано баротропное уравнение состояния $p = p(\rho)$; $c_0^2 = \partial p / \partial \rho$ — квадрат изотермической скорости звука.

Действуя оператором div на уравнение (7.12) и используя уравнения (7.11) (при условии $\rho_0 = \operatorname{const}$), (7.13) и (7.14), получаем следующее волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - (\omega_0^2 + c_0^2 \Delta) \tilde{\rho} = 0,\tag{7.15}$$

где $\omega_0^2 = 4\pi G \rho_0$. Коэффициенты уравнения (7.15) не зависят от координат и

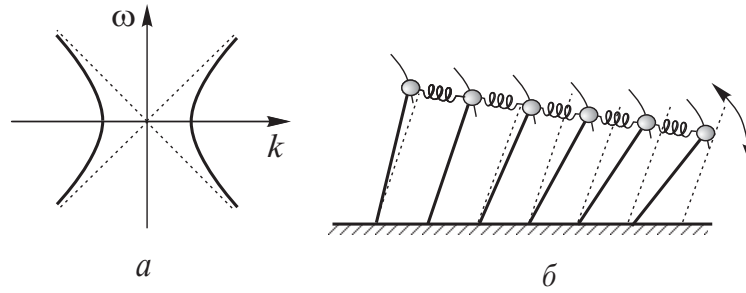


Рис. 7.5. Дисперсионные кривые уравнения (7.17) (а) и описываемые этим уравнением колебания (в плоскости перпендикулярной к рисунку) в системе связанных маятников (б)

времени, поэтому общее решение можно искать в виде:

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \omega_{\mathbf{k}}} \rho(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega_{\mathbf{k}} t - \mathbf{k} \mathbf{r})}. \quad (7.16)$$

Исходные уравнения (7.11)-(7.14) линейны т.е. справедлив принцип суперпозиции, и, следовательно, достаточно рассмотреть эволюцию произвольно выбранной гармоники. В результате подстановки ее в уравнение (7.15) находим дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = c_0^2 k^2 - \omega_0^2. \quad (7.17)$$

Отсюда сразу видно, что при $k^2 < 4\pi G \rho_0 / c_0^2$ однородное распределение плотности неустойчиво: $\omega^2 < 0$. На нелинейной стадии процесса это приводит к возникновению гравитационных “капель” с пространственным масштабом $\lambda > \lambda_{кр} = \sqrt{\pi c_0^2 / G \rho_0}$. Вид дисперсионных кривых уравнения (7.17) приведен на рис. 7.5, а. Заметим, что закон дисперсии (7.17) одновременно описывает и волновые возмущения в уже упоминавшейся системе связанных маятников (в длинноволновом приближении), только в отличие от рис. 7.4, в этом случае речь идет об устойчивости стационарного состояния, в котором все маятники “стоят вверх ногами” (рис. 7.5, б).

Таким образом, в рассматриваемой системе (7.10) имеется неустойчивость. Физический смысл условия $\lambda > \lambda_{кр}$ весьма прост: с увеличением размера области возмущения гравитационная сила растет, а градиент давления падает. При $\lambda = \lambda_{кр}$ обе силы уравновешивают друг друга, а при $\lambda > \lambda_{кр}$ гравитационная сила оказывается преобладающей.

Сделаем еще одно замечание. Запишем стационарные уравнения:

$$\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 + \nabla \Phi_0 = 0, \quad (7.18)$$

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (7.19)$$

$$p_0 = p(\rho_0). \quad (7.20)$$

Из принятого Джинсом условия $\rho_0 = \text{const}$ и уравнения (7.20) следует, что первое слагаемое в уравнении (7.18) обращается в нуль и значит $\Phi_0 = \text{const}$. Подстановка последнего решения в уравнение (7.19) приводит к абсурду: $\rho_0 = 0$; откуда следует вывод об исследовании Джинсом устойчивости несуществующего стационарного состояния бесконечно протяженной однородной среды. Как указано в [64], при анализе устойчивости стационарного решения с $\Phi_0 = \varphi(\mathbf{r})$ вблизи центра ограниченной области $\Phi_0 = \text{const}$ считается хорошим приближением.

7.2.2 Неустойчивость Тьюринга — пример диффузионной неустойчивости

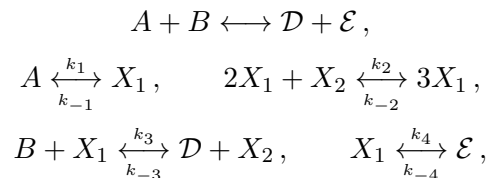
В 1952 году Тьюринг рассмотрел модель кинетики химических реакций с учетом диффузии.

В рамках этой модели обнаружилась неустойчивость, приводящая к возникновению пространственных структур. По этой причине модель Тьюринга и сходные с ней модели вызвали чрезвычайный интерес как модели возникновения структур в биологических системах [64–68]. Мы сейчас рассмотрим устойчивость стационарного состояния в рамках простейшей модели Тьюринга, описывающей взаимодействие всего лишь двух веществ с концентрациями X_1 и X_2 в одномерном реакторе:

$$\frac{\partial X_1}{\partial t} = f_1(X_1, X_2) + D_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial X_2}{\partial t} = f_2(X_1, X_2) + D_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}. \quad (7.21)$$

Здесь D_1 и D_2 — коэффициенты одномерной диффузии, происходящей вдоль координаты x .

Свяжем систему уравнений (7.21) с конкретной системой химических уравнений:



Для простоты будем считать, что кинетические коэффициенты $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, а $k_{-1} = k_{-2} = k_{-3} = k_{-4} = 0$. Тогда система соответствующих кинетических уравнений, дополненная слагаемыми, учитывающими одномерную диффузию вдоль координаты x , имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial X_1}{\partial t} &= A + X_1^2 X_2 - B X_1 - X_1 + D_1 \frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} &= B X_1 - X_1^2 X_2 + D_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (7.22)$$

Модель, описываемая уравнениями (7.22), была предложена Пригожиным и Лефевром [68] и носит название тримолекулярной модели или брюсселятора. Это — основная элементарная модель, используемая для описания процессов в химической кинетике.

Однородное по пространству и стационарное во времени состояние системы уравнений (7.22) (т.е. когда $\partial/\partial t = \partial/\partial x = 0$) имеет вид

$$X_1^0 = A, \quad X_2^0 = B. \quad (7.23)$$

Для исследования данного состояния на устойчивость найдем уравнение для малых отклонений x'_1 и x'_2 от (7.23). Полагая $X_1 = X_1^0 + x'_1$ и $X_2 = X_2^0 + x'_2$ и линеаризуя получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial x'_1}{\partial t} - (B - 1)x'_1 - A^2 x'_2 &= D_1 \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial x'_2}{\partial t} + A^2 x'_2 + B x'_1 &= D_2 \frac{\partial^2 x'_2}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (7.24)$$

Решение системы уравнений (7.24) будем искать в виде концентрационных волн

$$x'_1, x'_2 \sim e^{i(pt-kx)}, \quad (7.25)$$

где $p = \omega$ — неизвестная круговая частота, а k — неизвестное волновое число. Подставляя (7.25) в (7.24), находим характеристическое уравнение

$$p^2 - \theta p + \Delta = 0, \quad (7.26)$$

где

$$\begin{aligned}\theta &= -[A^2 + 1 - B + k^2(D_1 + D_2)], \\ \Delta &= A^2 - (B - 1)D_2 k^2 + A^2 D_1 k^2 + D_1 D_2 k^4.\end{aligned}\quad (7.27)$$

Пусть $D_1 = D_2 = 0$. Если речь идет об устойчивости стационарного состояния во времени, следует определить расположение корней уравнения $p^2 - \theta_1 p + \Delta_1 = 0$ с

$\theta_1 = -(A^2 + 1 - B)$ и $\Delta_1 = A^2$ на комплексной плоскости p . Система без диффузии устойчива, когда

$$\Delta_1 = A^2 > 0, \quad \theta_1 = -(A^2 + 1 - B) < 0. \quad (7.28)$$

Может ли диффузия превратить устойчивое в рамках гомогенной модели состояние (7.23) в неустойчивое?

Как следует из (7.26), система будет неустойчивой при $\Delta < 0$, откуда при учете (7.27), получается условие

$$\Delta = D_1 D_2 k^4 + [A^2 - (B - 1)D_2 + AD_1] k^2 + A^2 < 0. \quad (7.29)$$

Для выполнения этого неравенства k^2 должно находиться в интервале, границы которого k_1^2, k_2^2 определяются из равенства $\Delta = 0$; отсюда

$$k_{1,2}^2 = (2D_1 D_2)^{-1} \left\{ -[A^2 D_1 - (B - 1)D_2] \pm \sqrt{[A^2 D_1 - (B - 1)D_2]^2 - 4D_1 D_2} \right\}. \quad (7.30)$$

Напомним, что $D_1 D_2 \neq 0$.

Мы получили, следовательно, положительный ответ на наш вопрос: появление в реакторе диффузии действительно приводит к неустойчивости. Замечательно, что эта неустойчивость весьма избирательна — нарастают периодические в пространстве возмущения с пространственным периодом, лежащем в ограниченном интервале³.

7.2.3 Усиление в лампе с бегущей волной. Самовозбуждение в лампе с обратной волной

Приведем здесь еще два примера, иллюстрирующих работу распределенных СВЧ — усилителя (лампа бегущей волны — ЛБВ) и генератора (лампа обратной волны — ЛОВ). В гл. 3 мы обсудили в связи с объяснением пространственного резонанса распределенный усилитель — лампу бегущей волны (см. рис. 3.10). Там же говорилось, что для правильного описания процесса усиления к уравнению возбуждения волноведущей системы без потерь током электронного пучка

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} E = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 KI \quad (7.31)$$

³Здесь следует учесть ограниченность размеров системы [68].

(в обозначениях лекции 3) нужно добавить уравнение $\hat{M}I = \text{const} \cdot E$ (\hat{M} — оператор), учитывающее обратное влияние волноведущей системы на пучок и описывающее группирование электронов и сгустки. Уравнение (7.31) получено в предположении, что все переменные величины изменяются во времени как $\exp(i\omega t)$, при чем ω — действительная величина, поскольку лампа бегущей волны — усилитель, в котором вдоль длины лампы происходит экспоненциальное нарастание сигнала вполне определенной частоты, задаваемой внешним сигналом - генератором.

Пусть электронный поток описывается гидродинамическими уравнениями. Будем считать, что этот поток заполняет все пространство, но движение его одномерно, т. е. в направлениях, перпендикулярных направлению движения, ничего не меняется (в СВЧ - электронике эта модель называется моделью бесконечно широкого пучка). Тогда для описания такой заряженной жидкости (столкновением частиц, т. е. вязкостью, пренебрегаем) достаточно уравнения Эйлера для скорости

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{e}{m}(E + E_{np.з}), \quad (7.32)$$

уравнения непрерывности

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.33)$$

и обобщенного уравнения Пуассона, связывающего градиент электрического поля объемного заряда с плотностью объемного заряда электронной жидкости:

$$\frac{\partial E_{np.з}}{\partial x} = 4\pi\rho. \quad (7.34)$$

Электронный поток предполагается ионно-скомпенсированным т.е. в целом среда из заряженных частиц электрически нейтральна.

Так как нас интересует вопрос об устойчивости, то достаточно рассмотреть линеаризованные уравнения, полагая $v = v_0 + v'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$ и плотность тока $\rho v = j_0 + j'$ ($j_0 = \rho_0 v_0$), где v_0 , ρ_0 , j_0 — постоянные составляющие соответствующих величин, а v' , ρ' , j' — малые возмущения этих величин (любое возмущение много меньше соответствующей постоянной величины). Линеаризованные уравнения (7.32)–(7.34) имеют вид

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{e}{m}(E + E_{nz}), \quad \frac{\partial j'}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t}, \quad (7.35)$$

или, поскольку $j' = v_0 \rho' + \rho_0 v'$,

$$\frac{\partial j'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial j'}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial t}, \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial E'_{nz}}{\partial x} = 4\pi\rho'. \quad (7.37)$$

Полагая, что все переменные величины изменяются во времени по закону $\exp(i\omega t)$, и вводя оператор $\hat{\mathcal{L}} = i\omega + v_0\partial/\partial x$, перепишем (7.32)–(7.34) следующим образом:

$$\hat{\mathcal{L}}v' = \frac{e}{m}E + \frac{e}{m}E'_{nz}, \quad \hat{\mathcal{L}}j' = i\omega\rho_0v', \quad E'_{nz} = -\frac{4\pi}{i\omega}j'. \quad (7.38)$$

Исключая в системе уравнений (7.38) v' и E'_{nz} , получаем

$$\hat{\mathcal{L}}^2j' + \omega_p^2j' = (i\omega\rho_0e/m)E. \quad (7.39)$$

Простейший способ перехода от бесконечного широкого электронного потока к пучку с конечным поперечным геометрическим сечением S состоит во введении вместо плазменной частоты $\omega_p = \sqrt{4\pi e\rho_0/m}$ редуцированной плазменной частоты $\omega_q = R\omega_p$, где R — коэффициент редукиции ($0 < R \leq 1$), который учитывает влияние на пучок окружающих стенок [69].

Тогда для тока $i' = j'S$, группированного в пучке под действием поля волноведущей системы, из (7.39) имеем

$$\frac{\partial^2 i'}{\partial x^2} + 2i\frac{\omega}{v_0}\frac{\partial i'}{\partial x} - \left(\frac{\omega^2}{v_0^2} - \frac{\omega_q^2}{v_0^2}\right)i' = i\frac{\omega}{v_0}\frac{I_0}{2V_0}E, \quad (7.40)$$

где $I_0 = \rho_0v_0S$ — постоянный ток пучка, $V_0 = \sqrt{v_0^2m/2e}$ — ускоряющее напряжение пучка. Условие совместности самосогласованной системы уравнений (7.31) и (7.40) в предположении, что i' и E изменяются в пространстве, как $\exp(-ikx)$, где k — волновое число, приводит к дисперсионному уравнению

$$(\omega - kv_\phi)(\omega - kv_0 - \omega_q)(\omega - kv_0 + \omega_q) = \omega^3C^3, \quad (7.41)$$

$C^3 = (I_0K/4V_0)(v_0/v_\phi)^2$, C — известный в теории ЛБВ параметр усиления [25]. Нетрудно видеть из уравнения (7.41), что во взаимодействии участвуют одна волна волноведущей системы $k = \omega/v_\phi$ и две волны пучка — быстрая волна пространственного заряда ($k = (\omega - \omega_q)/v_0$) и медленная волна пространственного заряда ($k = (\omega + \omega_q)/v_0$). Необходимым условием усиления в пространстве является комплексность волнового числа при действительной частоте и, поскольку $E \sim \exp(-ikx)$ для волн, бегущих вправо, то неустойчивость в пространстве будет лишь тогда, когда $\text{Im } k > 0$.

На рис. 7.6 решение уравнения (7.41) при $\omega_q = 0$ показано в виде зависимостей $\alpha = \text{Im } k/(k_e C)$ и $\beta = (k_e - \text{Re } k)/(k_e C)$ ($k_e = \omega/v_0$) от параметра рассинхронизма $b = (k_0 - k_e)/(k_e C)$ ($k_0 = \omega/v_\phi$) между пучком и "холодной" волной. Предполагается, что влиянием затухания и сил пространственного заряда на взаимодействие

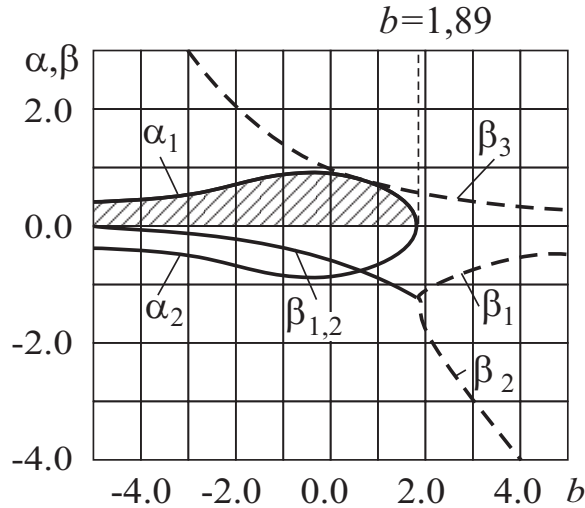


Рис. 7.6. Зависимость α и β от параметра рассинхронизма b между пучком и “холодной” волной; α_1 соответствует волне, растущей с расстоянием [70]

можно пренебречь. Легко видеть, что при $b = 0$ ($v_0 = v_\phi$) достигается максимальное значение инкремента $(\text{Im } k)_{max} = (\sqrt{3}/2)k_e C$ и что область неустойчивости ограничена значением $b = 3\sqrt{2}/2 \approx 1,89$.

Во второй половине 50 - х годов разразилась дискуссия, начатая Пиддингтоном в работе [71], в которой отвергалась существовавшая тогда теория ЛБВ и двухлучевой лампы (о ней речь в этой лекции пойдет дальше). Он считал, что пространственное нарастание волны предсказано теорией неверно и что ошибка состоит в неправильном толковании дисперсионного уравнения. Пиддингтон показал, что иногда экспоненциально затухающие вдоль оси x волны можно по ошибке принять за усиливаемые, но и сам ошибся в окончательном выводе, решив, что случай комплексных k при действительных ω всегда соответствует непропусканию.

Остановимся еще на одном примере — ЛОВ. В ЛОВ электронный пучок движется через искусственную среду, в которой могут распространяться волны с продольным электрическим полем; дисперсия этой среды такова, что фазовая скорость волны на некоторой частоте Ω равна скорости электронов, а групповая скорость отрицательна, т. е.

$$v_\phi(\Omega) = v_0, \quad v_{gp}(\Omega) < 0. \quad (7.42)$$

В реальных приборах искусственной средой с нужными свойствами служит периодическая электродинамическая структура — замедляющая система. Благодаря

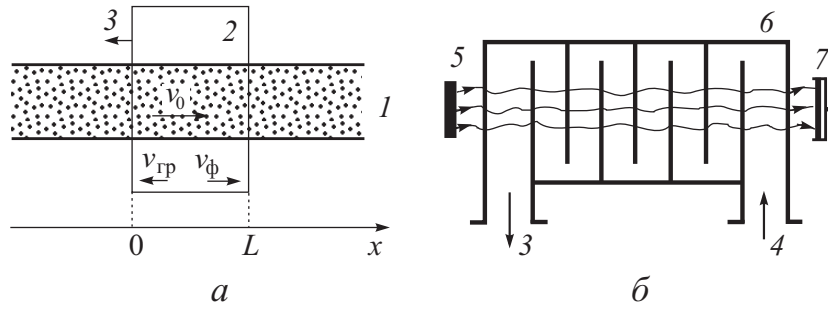


Рис. 7.7. Схематическое изображение генератора обратной волны (б) и анализируемая модель (а): 1 — электронный пучок; 2 — среда; 3 — выходное устройство; 4 — входное устройство в случае ЛОВ — усилителя; для генератора заменяется согласованной нагрузкой; 5 — электронная пушка; 6 — замедляющая система; 7 — коллектор

условиям (7.42) при взаимодействии потока электронов с волной в системе реализуется распределенная обратная связь — малые волновые возмущения, распространяющиеся со скоростью $v_{гр}$, бегут навстречу потоку и тем самым связывают выход системы с ее входом. При этом возможно либо усиление (регенеративное), либо самовозбуждение лампы. В электронике ЛОВ используется, главным образом, для генерации монохроматических колебаний СВЧ-диапазона (схематическое изображение ЛОВ приведено на рис. 7.7 [72, 73].

Легко показать, что дисперсионное уравнение системы электронный пучок — обратная электромагнитная волна имеет вид

$$(\omega - kv_{ф})(\omega - kv_0 - \omega_q)(\omega - kv_0 + \omega_q) = -\omega^3 C^3, \quad (7.43)$$

т. е. отличается от уравнения (7.41) только знаком в правой части. Если речь идет о самовозбуждении системы, то неизвестны ни ω , ни k . Каково условие неустойчивости? Поскольку нас интересует генерация, то следует интересоваться неустойчивостью во времени. Тогда возникает вопрос: какой смысл в данном случае имеют комплексные значения k ? Обычно ответы на эти вопросы находятся совместным решением уравнений типа (7.31) (для ЛОВ в этом уравнении нужно изменить знак в правой части) и (7.40) при начальных или граничных условиях, соответствующих физике задачи.

Так, из уравнения (7.41) следует, что поле E и сгруппированный ток i' можно описать тремя волнами:

$$E = \sum_{i=1}^3 E_i(0)e^{-ik_i x}, \quad i' = \sum_{i=1}^3 i'_i(0)e^{-ik_i x}.$$

Неизвестные амплитуды $E_i(0)$ и $i'_i(0)$ определяются для ЛБВ из начальных условий ($x = 0$)

$$\sum_{i=1}^3 E_i(0) = E(0), \quad \sum_{i=1}^3 i'_i(0) = 0, \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial i'_i(0)}{\partial x} = 0, \quad (7.44)$$

где $E(0)$ — амплитуда входного сигнала, второе условие означает, что пучок не сгруппирован на входе, а третье условие — что пучок на входе не модулирован по скорости. Тогда можно найти распределение поля вдоль длины пространства взаимодействия. Из решения следует, что на достаточно большой длине доминирует волна с $\text{Im } k > 0$, которая и определяет коэффициент усиления ЛБВ. Например, при $b = 0$ коэффициент усиления равен

$$G = \frac{E(l)}{E(0)} \sim \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} 2\pi C \frac{l}{\lambda}\right) \sim \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} 2\pi CN\right),$$

где $\lambda = 2\pi/k_e$, $N = l/\lambda$ — число длин волн, укладывающихся по пространству взаимодействия.

В случае ЛОВ генератора для определения условий возникновения колебаний ($\text{Im } \omega = 0$) следует решать краевую задачу, полагая $i'(0) = \partial i'(0)/\partial x = 0$ и $E(l) = 0$ (входной сигнал отсутствует). Тогда получаются следующие значения пусковых параметров, при которых возникают колебания: $b_n = 1,522$, $(CN)_n = 0,314$. При значении v_0 , мало отличающемся от v_ϕ , и $C \ll 1$ решения (7.43) можно искать в виде $k = (\omega/v_0)(1 + iC\delta)$, что приводит к уравнению $\delta^2(\delta + ib) = -i$. При $b = b_n$ корни этого уравнения $\delta_1 = 0,725 + i \cdot 0,151$, $\delta_2 = -0,725 + i \cdot 0,151$, $\delta_3 = -i \cdot 1,822$ [73]. Очевидно, что волна с $\text{Im } k_1 > 0$ не играет той роли, какую она играла в ЛБВ, а поле определяется суперпозицией всех трех волн, поскольку иначе не выполнить граничного условия $E(l) = 0$. При подобном подходе, однако, возникают очевидные трудности, связанные с необходимостью решения краевой задачи. В то же время было бы желательно не решать задачу с начальными и тем более краевыми условиями, а ограничиться рассмотрением лишь безграничных систем, т. е. анализом дисперсионного уравнения, и с его помощью отвечать на все вопросы об устойчивости.

7.3 Абсолютная и конвективная неустойчивости (метод характеристик)

Определить характер поведения произвольного возмущения (сносится ли возмущение в каком-то направлении по x либо расширяется, захватывая новые области в $+x$ - и $-x$ -направлениях), не анализируя конкретных решения типа (7.7), а

используя лишь дисперсионное уравнение системы — в общем случае задача весьма трудная. Однако для широкого класса распределенных систем, а именно систем, описываемых уравнениями в частных производных гиперболического типа, это можно сделать сравнительно просто (заметим, что гиперболическими уравнениями описываются и колебания в системе связанных маятников (см. рис. 7.4 и 7.5, и невязкий гравитирующий газ, и многие другие очень важные системы). Для таких систем поставленная задача решается просто — нужно лишь определить на плоскости xt границы области распространения возмущения (рис. 7.8), совпадающие с характеристиками системы, которые имеют максимальный и минимальный наклоны. Простейший пример гиперболического уравнения мы уже хорошо знаем — это обычное волновое уравнение $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$. Здесь два семейства характеристик: $x - at = C_1$ и $x + at = C_2$. Первое семейство соответствует возмущениям, распространяющимся вправо, а второе — возмущениям,двигающимся влево. Поскольку в данном случае система линейна, произвольное возмущение (являющееся их суперпозицией) будет расширяться и в $+x$ - и в $-x$ -направлениях. Таким образом, если мы "организуем" в подобной системе неустойчивость (формально это можно сделать, добавив в левую часть уравнения слагаемое $-b^2 u_t$), то эта неустойчивость будет абсолютной — область распространения захватывает оба полупространства (и левее, и правее начальной области на оси x (рис. 7.8). Таким образом, неустойчивость однородного гравитирующего газа (неустойчивость Джинса) и неустойчивость в генераторе обратной волны — это абсолютные неустойчивости.

Характеристики гиперболических систем оказываются связанными с асимптотами дисперсионных кривых соответствующей линеаризованной задачи. Характеристики и асимптоты одинаково наклонены соответственно на плоскостях xt и ωk . Благодаря этому для гиперболических систем, для которых число асимптот с конечным наклоном совпадает с числом нормальных волн, можно уже по виду дисперсионных кривых сказать, будет ли неустойчивость абсолютной или конвективной. Если угловые коэффициенты асимптот дисперсионных кривых имеют противоположные знаки, то неустойчивость абсолютная (рис. 7.8), если они имеют одинаковые знаки, то неустойчивость конвективная (рис. 7.9).

В первом случае область распространения будет, как на рис. 7.8,а а во втором — как на рис. 7.9,а.

Приведем здесь элементарные сведения на теории характеристик [74, 75]. За-

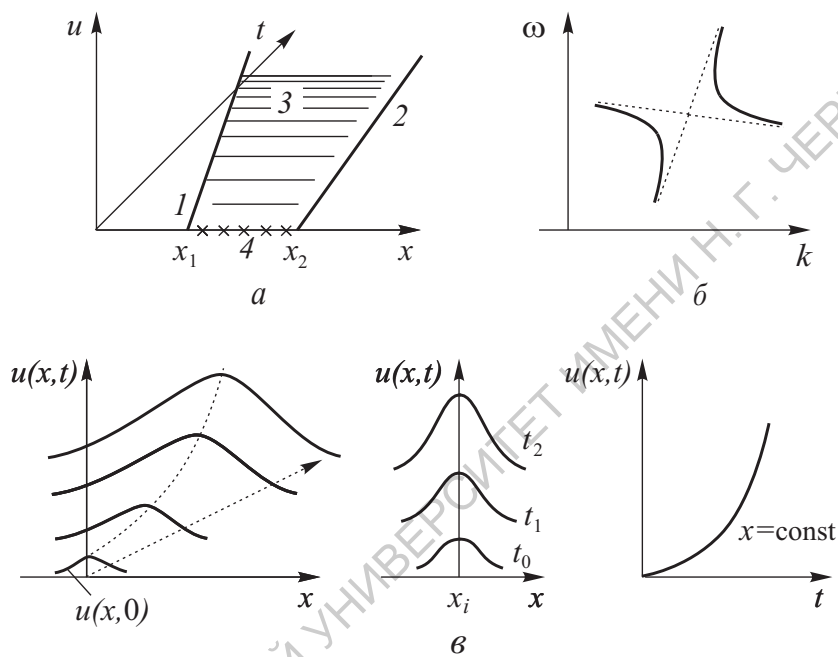


Рис. 7.8. Связь характеристик гиперболических систем (плоскость xt) с асимптотами соответствующих дисперсионных уравнений (плоскость ωk) в случае абсолютной неустойчивости для двухволновых систем (1,2 — характеристика различных семейств; 3 — область распространения возмущения; 4 — область начального возмущения ($a, б$); рисунки, поясняющие развитие в системе абсолютной неустойчивости (в, г))

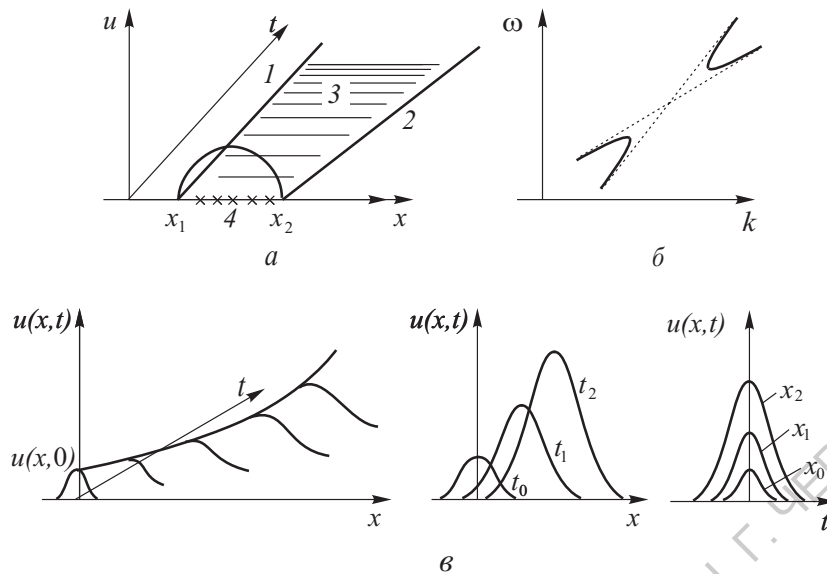


Рис. 7.9. Связь характеристик гиперболических систем (плоскость xt) с асимптотами соответствующих дисперсионных уравнений (плоскость ωk) в случае конвективной неустойчивости для двухволновых систем (1–4 имеют тот же смысл, что и на рис. 7.8 (а,б); рисунки, поясняющие развитие в системе конвективной неустойчивости (в).

пишем систему исходных уравнений в виде

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_{ik}(u) \frac{\partial u_k}{\partial x} + b_i(u) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7.45)$$

где u_i — переменные, описывающие нашу систему, а a_{ik} , b_i — нелинейные функции от u_1, \dots, u_n . Уравнения типа (7.45) обычно называют квазилинейными. Они не содержат нелинейных функций относительно производных. Будем называть характеристиками линии на плоскости xt , ограничивающие так называемую область влияния. Если возмущение задано на некоторой дуге AB в плоскости xt , то оно влияет на решение $u_i(x, t)$ системы (7.45) лишь в области, ограниченной характеристиками, проходящими через точки A и B . Поскольку характеристика отделяет возмущенную область от невозмущенной, то, задав все величины u_i вдоль характеристик (т. е. известны лишь $\partial u_i / \partial s$), невозможно с помощью уравнений (7.45) однозначно определить нормальные к характеристикам производные $\partial u_i / \partial n$. Исходя из этого будем искать уравнение характеристик. Обозначая тангенс угла наклона характеристик к оси t через V , выразим $\partial u_i / \partial t$ и $\partial u_i / \partial x$

через $\partial u_i/\partial s$ и $\partial u_i/\partial n$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} &= \frac{1}{V^2 + 1} \frac{\partial u_i}{\partial s} - \frac{V}{V^2 - 1} \frac{\partial u_i}{\partial n}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x} &= \frac{V}{V^2 + 1} \frac{\partial u_i}{\partial s} + \frac{1}{V^2 + 1} \frac{\partial u_i}{\partial n}.\end{aligned}$$

После подстановки этих производных в (7.45) имеем

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} - V\delta_{ik}) \frac{\partial u_k}{\partial n} = - \sum_{k=1}^n (Va_{ik} + \delta_{ik}) \frac{\partial u_k}{\partial s} - b_i(u). \quad (7.46)$$

Это линейная неоднородная система относительно $\partial u_k/\partial n$ с известной правой частью. Чтобы из этих уравнений нельзя было определить $\partial u_k/\partial n$, необходимо, чтобы определитель ее равнялся нулю:

$$\text{Det}(a_{ik} - V\delta_{ik}) = 0 \quad (7.47)$$

(δ_{ik} — символ Кронекера). Это и есть искомое уравнение для характеристик. Поскольку это многочлен n -го порядка относительно V , найдем наклон n семейств характеристик. Если система линейна и a_{ik} не зависят от u , то характеристики — это прямые линии на плоскости xt , наклон которых равен V_l , где V_l , ($l = 1, 2, \dots, n$) — корни уравнения (7.47).

Линеаризованная система (7.45) описывается дисперсионным уравнением

$$\text{Det} \left(a_{ik} - \frac{\omega}{k} \delta_{ik} - \frac{1}{k} b_{ik} \right) = 0, \quad b_{ik} = \left. \frac{\partial b_i}{\partial u_k} \right|_{u=u_0}. \quad (7.48)$$

Легко заметить, сравнивая (7.48) с (7.47), что в асимптотике при $k \rightarrow \infty$ наклон дисперсионных кривых совпадает с наклоном характеристик.

Определим с помощью критерия, основанного на оценке расположения асимптот, вид неустойчивости в системе из двух взаимопроникающих двигающихся вдоль x электронных потоков.

Пусть есть две взаимопроникающие заряженные жидкости (в частности, это могут быть два электронных или ионных потока), взаимодействие которых определяется общим продольным электрическим полем пространственного заряда $E_{пр.з}$. Подобно тому как мы поступили при анализе ЛБВ, будем считать среды консервативными, пренебрегая силами трения (вязкостью). Потоки, бесконечно широкие, движутся либо в одном по x направлении (попутные пучки), либо навстречу друг другу (встречные пучки) с разными по модулю постоянными скоростями $|v_{01}|$ и $|v_{02}|$.

7.4 Волновые неустойчивости двух взаимодействующих электронных потоков

Описанная выше теоретическая модель соответствует довольно хорошо исследованной в СВЧ-электронике двухлучевой лампе [25, 70, 76]. В экспериментальных макетах использовались два катода, разность потенциалов между которыми обеспечивала различие в скоростях электронных потоков. Конструкция катодов выбиралась такой, чтобы обеспечить хорошее взаимопроникновение потоков (например, в одной из конструкций катод был выполнен в виде двух плоских спиралей, размещенных одна перед другой, так что электроны, эмиттируемые первым катодом, проходят между витками другого катода, чем и обеспечивается хорошее смешивание потоков).

Для введения усиливаемого сигнала в один или оба пучка обычно используется отрезок спирали, высокочастотное электрическое поле которого модулирует электроны. Скорость одного из потоков подбирается близкой к фазовой скорости волны v_ϕ в спирали для того, чтобы модуляция потока входным сигналом была эффективной. В результате экспоненциального нарастания с координатой переменного тока лучей в выходной спирали возбуждается сигнал гораздо большей амплитуды, чем поданный на вход лампы (рис.7.10). Поначалу двухлучевая лампа казалась весьма перспективной, особенно в диапазоне миллиметровых длин волн, поскольку сочетала длительное взаимодействие с отсутствием замедляющих систем. Однако, как оказалось, переход к высоким частотам требует уменьшения разности скоростей потоков и увеличения плотности тока к ним. Сближение скоростей потоков ограничено разбросом электронов по скоростям, который характеризуется функцией распределения электронов по скоростям. Понятно, что при значении $|v_{01}| - |v_{02}|$, сравнимом с разбросом по скоростям, два луча практически неразличимы. Двухлучевой усилитель как прибор не используется в СВЧ-электронике. Тем не менее он стал стандартным примером в теории волновых неустойчивостей [63, 77–79].

Рассмотрим далее для определенности два ионно-скомпенсированных электронных потока, описываемых линеаризованными гидродинамическими уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= \frac{e}{m} E'_{np.з}, & \frac{\partial v'_2}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial v'_2}{\partial x} &= \frac{e}{m} E'_{np.з}, \\ \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} + \rho_{01} \frac{\partial v'_1}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} + v_{02} \frac{\partial \rho'_2}{\partial x} + \rho_{02} \frac{\partial v'_2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial E'_{np.з}}{\partial x} &= 4\pi(\rho'_1 + \rho'_2). \end{aligned} \quad (7.49)$$

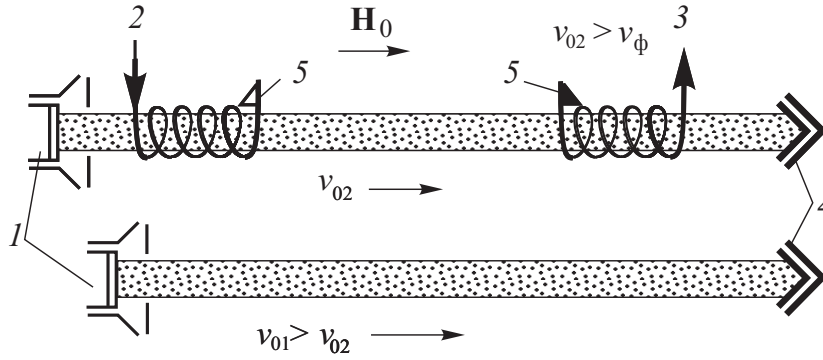


Рис. 7.10. Схема двухлучевого усилителя: 1 — электронные пушки; 2,3 — входное и выходное устройства; 4 — коллекторы; 5 — согласованные нагрузки; \mathbf{H}_0 — фокусирующее магнитное поле. Пучки показаны разнесенными друг от друга

В предположении, что все переменные величины изменяются во времени по закону $\exp(i\omega t)$, преобразуем систему (7.49) к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 E_{np.z} &= -\frac{4\pi}{i\omega}(j'_1 + j'_2), \\
 \frac{\partial^2 j'_1}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{01}} \frac{\partial j'_1}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_{01}}\right)^2 j'_1 &= i\omega \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p1}^2}{v_{01}^2} E'_{np.z}, \\
 \frac{\partial^2 j'_2}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{02}} \frac{\partial j'_2}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_{02}}\right)^2 j'_2 &= i\omega \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_{p2}^2}{v_{02}^2} E'_{np.z}, \\
 \omega_{p1}^2 &= \frac{4\pi e}{m} \rho_{01}, \quad \omega_{p2}^2 = \frac{4\pi e}{m} \rho_{02}.
 \end{aligned} \tag{7.50}$$

Система уравнений (7.50) соответствует самосогласованной модели возбуждения электронного волновода электронными потоками. Первое уравнение системы описывает возбуждение электронного волновода заданными потоками, два других описывают группирование электронных потоков под действием их суммарного поля пространственного заряда.

Такой подход позволяет объяснить физический механизм двухлучевого усилителя с попутными потоками, основываясь на аналогии с уже известной нам ЛБВ.

Входное устройство модулирует медленный электронный поток по скорости и по плотности, что приводит к образованию в пространстве дрейфа электронной периодической структуры чередующихся уплотнений и разрежений электронов. Такая ситуация, как показано в гл. 5, соответствует распространению в пучке двух волн пространственного заряда — быстрой и медленной, фазовые скорости

которых $v_{фб,м} = v_{02}/(1 \mp \omega_q/\omega)$. Таким образом, роль модулированного потока в двухлучевой системе аналогична роли замедляющей системы в ЛБВ. Второй быстрый поток ($v_{02} < v_{01}$) взаимодействует с продольной составляющей замедленной волны в первом потоке. Тогда, как в ЛБВ, при соответствующем выборе скорости v_{01} второго потока последний будет отдавать энергию высокочастотному полю; в результате возможно усиление входного сигнала. Исключая в (7.50) $E'_{np,з}$ окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 j'_1}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{01}} \frac{\partial j'_1}{\partial x} - \left[\left(\frac{\omega}{v_{01}} \right)^2 - \left(\frac{\omega_{p1}}{v_{01}} \right)^2 \right] j'_1 &= - \left(\frac{\omega_{p1}}{v_{01}} \right)^2 j'_2, \\ \frac{\partial^2 j'_2}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_{02}} \frac{\partial j'_2}{\partial x} - \left[\left(\frac{\omega}{v_{02}} \right)^2 - \left(\frac{\omega_{p2}}{v_{02}} \right)^2 \right] j'_2 &= - \left(\frac{\omega_{p2}}{v_{02}} \right)^2 j'_1. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Система уравнений (7.51) допускает решение $j'_1 = j'_2 = 0$, когда потоки движутся, не взаимодействуя друг с другом. Будет ли такое движение устойчивым? Будем искать решение (7.51) в виде $j'_{1,2} = \Psi_{1,2} \exp(-ikx)$.

Подставляя его в (7.51), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов распределения $\Psi_{1,2}$ (вектор $\Psi(\Psi_1, \Psi_2)$ называют также поляризационным вектором). Равенство нулю определителя этой системы дает дисперсионное уравнение задачи

$$D(\omega, k) = \omega_{p1}^2(\omega - kv_{02})^2 + \omega_{p2}^2(\omega - kv_{01})^2 - (\omega - kv_{01})^2(\omega - kv_{02})^2 = 0, \quad (7.52)$$

или

$$\frac{\omega_{p1}^2}{(\omega - kv_{01})^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{(\omega - kv_{02})^2} = 1. \quad (7.53)$$

Задача 7.1. Используя представления гидродинамической теории горячей плазмы, введенные в лекции 5, покажите, что дисперсионное уравнение для горячей плазмы, пронизываемой холодным электронным пучком, имеет вид:

$$\frac{\omega_{\omega n}^2}{(\omega - kv_{\omega n})^2} + \frac{\omega_{nl}^2}{(\omega - kv_T)^2} = 1,$$

где $\omega_{\omega n}$ — ленгмюровская частота пучка, ω_{nl} — ленгмюровская частота плазмы, $v_{\omega n}$ — постоянная скорость электронного пучка, v_T — тепловая скорость электронов плазмы. Напомним, что в гидродинамическом приближении в обозначениях лекции 5 $p_e = k_B T_e$.

Заметим, что коэффициенты уравнений — действительные величины, в то время как корни его (ω или k) могут быть комплексными. Рассмотрим теперь детально различные частные случаи.

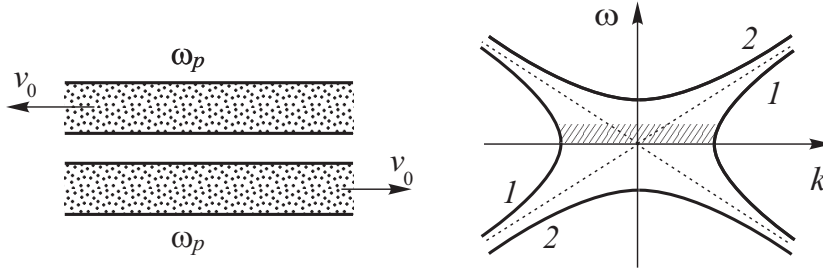


Рис. 7.11. Модель двух идентичных встречных пучков и дисперсионные характеристики, определяемые уравнением (7.55). При $\omega = 0$ имеем $k = \pm\sqrt{2}\omega_p/v_0$; если же $k = 0$, то $\omega = \pm\sqrt{2}\omega_p$; в случае больших k и малых ω_p $\omega \approx \pm v_0 k$; заштрихована полоса действительных значений k , при которых имеют место комплексные значения ω

Пусть пучки совершенно одинаковые, но встречные, т. е.

$$\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0, \quad \omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p, \quad v_{01} = -v_{02} = v_0. \quad (7.54)$$

С учетом (7.54) дисперсионное уравнение (7.52) принимает вид

$$D(\omega, k) = (\omega - kv_0)^2(\omega + kv_0)^2 - \omega_p^2(\omega - kv_0)^2 - \omega_p^2(\omega + kv_0)^2 = 0$$

или

$$\omega^2 = (k^2 v_0^2 + \omega_p^2) \pm \sqrt{4\omega_p^2 k^2 v_0^2 + \omega_p^4}. \quad (7.55)$$

Из (7.55) видно, что ω могут быть комплексными, если

$$k^2 v_0^2 + \omega_p^2 < \omega_p \sqrt{4k^2 v_0^2 + \omega_p^2},$$

т. е. при условии, когда

$$k < \sqrt{2}\omega_p/v_0. \quad (7.56)$$

Из (7.56) следует, что $\lambda_p < \sqrt{2}\lambda$ ($k = 2\pi/\lambda$, $\omega_p/v_0 = 2\pi/\lambda_p$), т.е. неустойчивы лишь длинноволновые возмущения. Подчеркнем, что k здесь действительные. Дисперсионные характеристики, определяемые формулой (7.55), приведены на рис. 7.11.

Для понимания рис. 7.11 проследим за цепочкой переходов: один пучок — два невзаимодействующих пучка — два взаимодействующих пучка (рис. 7.12). Как следует из (7.52) (это известно нам и из гл. 5), в одном возмущенном электронном потоке существуют две волны пространственного заряда — медленная и быстрая. Если $v_{02} = -v_0 = 0$, $\omega_{p2} = 0$, $\omega_{p1} = \omega_p$, то из (7.52) имеем $(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2$, $\omega = kv_0 \pm \omega_p$, а в случае $v_{01} = v_0 = 0$, $\omega_{p1} = 0$, $\omega_{p2} = \omega_p$ имеем $(\omega + kv_0)^2 = \omega_p^2$,

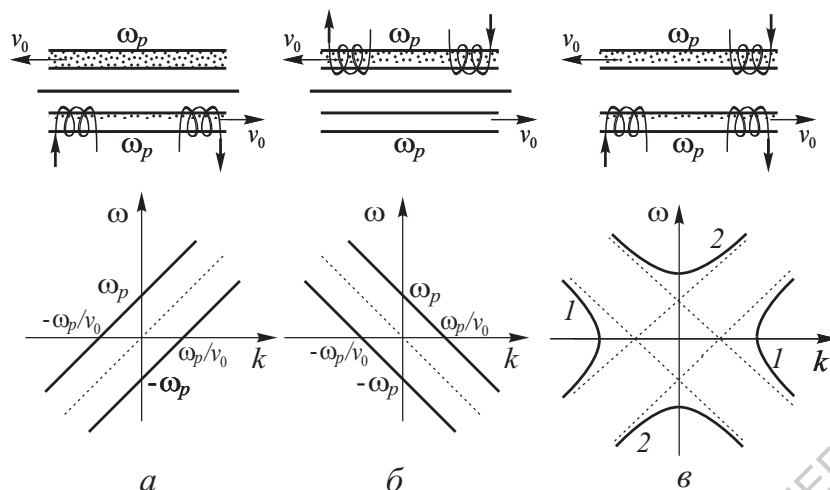


Рис. 7.12. Модели двух пучков и дисперсионные характеристики одного модулированного во входном устройстве пучка (другой отделен от него экраном A ($a, б$)); модель двух взаимодействующих пучков и их дисперсионные характеристики ($в$). Штриховыми линиями показаны дисперсионные характеристики невзаимодействующих потоков.

$\omega = -kv_0 \pm \omega_p$. Из анализа рис. 7.12, $в$ и его сравнения с рис. (7.12), $a, б$ следует, что ветви 1 дисперсионной характеристики взаимодействующих пучков соответствуют медленным волнам, а ветви 2 — быстрым волнам. Из рис. 7.11 видно, что для быстрых волн неустойчивости быть не может: любым действительным значениям волнового числа k для них соответствуют действительные значения частоты ω .

Для медленных волн в области значений волновых чисел $|k| < \sqrt{2}\omega_p/v_0$, (на рис. 7.11 эта область выделена штриховкой) частота ω будет комплексной величиной и при $\text{Im } \omega < 0$ возмущения будут нарастать во времени.

Таким образом, в анализируемой консервативной системе существует неустойчивость. Это само по себе замечательный факт. Энергия, необходимая для поддержания этой неустойчивости, черпается из “неволнового” движения равномерно движущихся потоков.

Исследуем теперь одинаковые попутные пучки, т. е. случай, когда $\rho_{01} = \rho_{02} = \rho_0$ ($\omega_{p1} = \omega_{p2} = \omega_p$), $v_{01}v_{02} > 0$. При этих условиях из (7.52) получаем

$$\omega_p^2 \left[\frac{1}{(\omega - kv_{01})^2} + \frac{1}{(\omega - kv_{02})^2} \right] = 1. \quad (7.57)$$

Дисперсионная характеристика этой системы изображена на рис. 7.13, $в$. Качественный вид ее ветвей легко получить, переходя от случая невзаимодействующих пучков, один из которых неподвижен ($v_{02} = 0$, $v_{01} > 0$), к случаю их

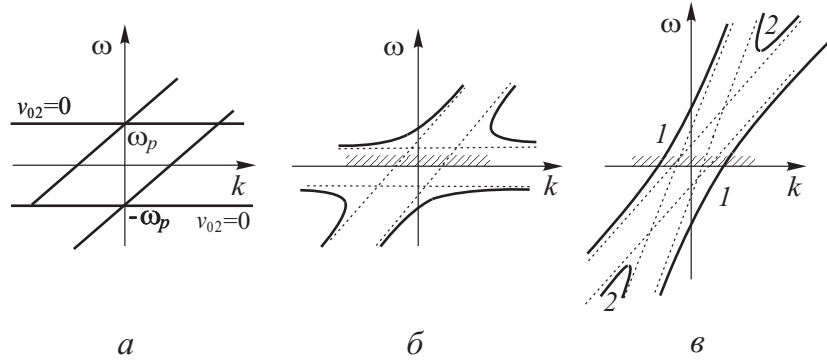


Рис. 7.13. Дисперсионные характеристики двух не взаимодействующих (а) и взаимодействующих (б) электронных пучков, один из которых неподвижен ($v_{02} = 0$) и двух взаимодействующих попутных пучков (в); заштрихована область действительных значений k , при которых имеют место комплексные значения ω

взаимодействия, а затем и к случаю взаимодействия попутных пучков, когда $v_{01} > 0$, $v_{02} > 0$. Дисперсионное уравнение (7.57) по-прежнему имеет четыре корня, и каждое возмущение будет содержать четыре слагаемых, например $v'_{1,2} = \sum_{k=1}^4 \Psi_{1,2m} \exp[i(\omega_m t - k_m x)]$. Два из них (ветви 1 дисперсионной характеристики на рис. 7.13 в) не нарастают во времени, а два других (ветви 2) могут нарастать, поскольку действительным k в заштрихованной области соответствуют комплексные значения ω . Но неустойчивость здесь другого типа, чем в задаче о встречных пучках. Поскольку пучки движутся в одну сторону, возмущение будет сноситься вместе с пучком, т. е. в данной точке пространства возмущение может затухать.

Разрешим уравнение (7.57) относительно $k = k(\omega)$, полагая ω действительной величиной. Вводя величины [25] полуразности скоростей $\delta = (v_{01} - v_{02})/2$, средней скорости $v_{cp} = (v_{01} + v_{02})/2$ и волнового числа $k = \omega/v_{cp} + i\gamma$, можно переписать (7.57) в виде

$$\left(i \frac{\gamma v_{01}}{\omega_p} + \frac{\omega \delta}{v_{cp} \omega_p} \right)^{-2} + \left(i \frac{\gamma v_{02}}{\omega_p} - \frac{\omega \delta}{v_{cp} \omega_p} \right)^{-2} = 1. \quad (7.58)$$

Если δ мало по сравнению с v_{01} и v_{02} , то можно считать, что $\gamma v_{01}/\omega_p \approx \gamma v_{02}/\omega_p \approx \gamma v_{cp}/\omega_p$. Тогда из (7.58) находим

$$\left(i \frac{\gamma v_{cp}}{\omega_p} \right)_{1-4} = \pm \left\{ \left(\frac{\omega \delta}{v_{cp} \omega_p} \right)^2 + 1 \pm \left[\left(\frac{\omega \delta}{\omega_p v_{cp}} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad (7.59)$$

Из анализа (7.59) следует, что максимальное значение инкремента нарастания волны составляет $\text{Im } k = \gamma_{max} = \omega_p / (2v_{cp})$ и достигается при $\omega\delta / \omega_p v_{cp} = \sqrt{3}/2$; при $\omega\delta / \omega_p v_{cp} \geq \sqrt{2}$ значения $\gamma v_{cp} / \omega_p$ становятся чисто мнимыми и все четыре волны имеют постоянные амплитуды. Итак, гармоническое возмущение возрастает вдоль x .

Задача 7.2. Пусть плотность одного из потоков мала по сравнению с плотностью другого: $\rho_{02} \ll \rho_{01}$. Покажите, что такая двухпотоковая система неустойчива. Для простоты предположите, что $v_{01} = 0$, т.е. более плотный поток неподвижен. Дисперсионное уравнение в этом случае удобно записать в виде:

$$\frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \frac{\alpha\omega_p^2}{(\omega - kv_{02})^2} = 1.$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 / m\rho_{01}$, $\alpha = \rho_{02} / \rho_{01} \ll 1$. Используйте малость параметра α и рассмотрите случаи,

1. когда kv_{02} не близка к ω_p ;
2. $kv_{02} \approx \omega_p$.

Определите характер неустойчивости.

Задача 7.3. Предположим, что электронная компонента плазмы движется относительно неподвижной ионной со скоростью v_{0e} . В этом случае дисперсионное уравнение выглядит так:

$$\frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_{0e})^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 1,$$

где ω_{pe} , ω_{pi} — ленгмюровские частоты электронной и ионной компонент. Докажите, что имеет место неустойчивость (неустойчивость Бунемана). Используйте, что $m_e \ll m_i$.

7.5 Неустойчивость Гельмгольца.

Проанализируем теперь неустойчивость Гельмгольца⁴ [27]. При рассмотрении взаимодействия течений жидкости обычно приходится решать двумерную задачу: скорость потоков должна зависеть не только от продольной координаты x , но и от поперечной координаты y (рис. 7.14,а). Однако в частном случае, когда границу, через которую взаимодействуют потоки, можно считать неразмытой, задачу удается свести к одномерной.

Предположим, что два слоя жидкости скользят друг относительно друга с постоянными скоростями \mathbf{v}_{01} и \mathbf{v}_{02} , участок поверхности разрыва скорости плоский, плотности жидкостей постоянны и равны ρ_{01} и ρ_{02} , поскольку жидкости не смешиваются (рис. (7.14),а). Пусть на границе раздела возникло слабое возмущение y' самой границы, скорости \mathbf{v}' и давления p жидкости. Причем y' , \mathbf{v}' и

⁴Неустойчивость границы раздела движущихся жидкостей при $\rho_{01} \neq \rho_{02}$ называют иногда неустойчивостью Кельвина — Гельмгольца.

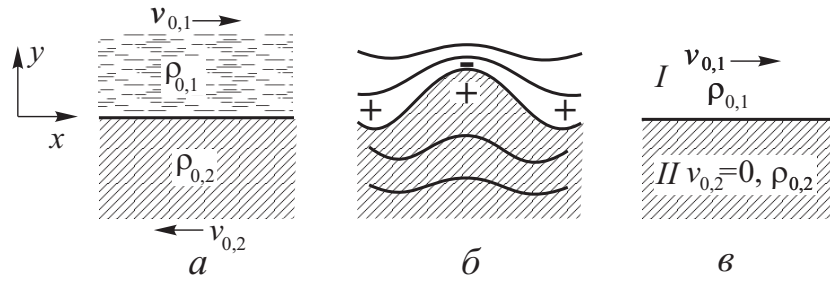


Рис. 7.14. Неустойчивость Гельмгольца [27]: *a* — возмущения границы раздела нет — два слоя жидкости скользят по границе раздела навстречу друг другу; *б* — граница раздела возмущена — схематическое изображение формы линий тока и распределение давления вблизи возмущенной поверхности тангенциального разрыва скорости; *в* — исходная модель для анализа системы поверхностный ветер (I) — неподвижная вода (II).

p' пропорциональны $\exp[i(\omega t - kx)]$. Для несжимаемой жидкости с одной стороны от поверхности разрыва из уравнений Эйлера и непрерывности (см. гл. 4) в линейном приближении имеем

$$\frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial t} + v_{01} \frac{\partial \mathbf{v}'_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_{01}} \text{grad } p'_1, \quad \text{div } \mathbf{v}'_1 = 0 \quad (7.60)$$

(в первом уравнении учтено, что постоянная скорость направлена вдоль оси x).

Применяя к обеим частям (7.60) операцию div и используя условие несжимаемости жидкости, получаем

$$\frac{\partial^2 p'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'_1}{\partial y^2} = 0. \quad (7.61)$$

Решение (7.61) естественно искать в виде

$$p'_1 = p'_1(y) e^{i(\omega t - kx)}. \quad (7.62)$$

Тогда для жидкости, занимающей пространство над разрывом $y > 0$, из (7.61) и (7.62) находим

$$p'_1(y) = A e^{-ky} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (7.63)$$

Обозначим смещение границы через $y' = y'(x, t)$. Тогда для поперечной составляющей скорости v'_{y1} на самой границе справедливо соотношение

$$v'_{y1} = dy'_1/dt = i(\omega - kv_{01})y'_1. \quad (7.64)$$

Из уравнения Эйлера для v'_{y1} -компоненты скорости с учетом (7.64) находим связь между давлением p'_1 и смещением границы y'_1 :

$$p'_1 = -(\omega - kv_{01})^2 \rho_{01} y'_1 / k. \quad (7.65)$$

Очевидно, что давление p'_2 в области по другую сторону границы разрыва, для которой $y < 0$, выразится соотношением, аналогичным (7.65), но с противоположным знаком:

$$p'_2 = (\omega + kv_{02})^2 \rho_{02} y'_2 / k. \quad (7.66)$$

В (7.66) учтено, что $v_{02} < 0$. Давления на границе раздела должны быть равны; поэтому дисперсионное уравнение задачи имеет следующий вид:

$$(\omega - kv_{01})^2 = -(\rho_{02}/\rho_{01})(\omega + kv_{02})^2, \quad (7.67)$$

$$\omega_{1,2} = \frac{k}{\rho_{01} + \rho_{02}} [(\rho_{01}v_{01} - \rho_{02}v_{02}) \pm i(v_{01} + v_{02})\sqrt{\rho_{01}\rho_{02}}]. \quad (7.68)$$

Из (7.68) следует, что частота оказывается комплексной величиной, причем всегда есть корень дисперсионного уравнения, для которого выполняется условие $\text{Im } \omega < 0$ при действительных k . Это и есть неустойчивость Гельмгольца, т. е. абсолютная неустойчивость. Механизм неустойчивости объяснить довольно просто, исходя из закона Бернулли $v^2 + 2p/\rho = \text{const}$. Если на границе раздела возникло возмущение, скажем жидкость снизу границы приподнялась, то линии тока искажутся. В местах сгущения линий тока возникают поперечные градиенты давления, приводящие к усилению возмущений (см. рис. 7.14, б и формулы (7.65), (7.66)). Интересно, что Рэлей приводил этот механизм как объяснение полоскания парусов и флагов под действием ветра; однако в действительности в этом явлении проявляется механизм, связанный с возникновением и отрывом вихрей.

7.6 Усиление и непропускание. Критерий разделения

С физической точки зрения кажется очевидным, что систему, в которой реализуется конвективная неустойчивость, можно использовать для усиления сигналов. Таким образом, если дисперсионное уравнение $D(\omega, k) = 0$ при действительном ω имеет комплексные решения для k и асимптоты дисперсионных кривых имеют наклоны одного знака (см. рис. 7.8, б и 7.8, в), то в системе есть усиление. На языке характеристик это означает, что область распространения лежит по ту сторону от границы $x = 0$, на которую подается сигнал. Обратный случай — когда асимптоты имеют наклоны разных знаков — соответствует непропусканию.

Столь простой критерий разделения усиления и непропускания применим лишь к системам гиперболического типа. Для систем более общего вида существует несколько более сложных критериев [48, 57, 63, 77–82] один из которых — критерий Бриггса [79] — мы здесь приведем. При решении дисперсионного уравнения $D(\omega, k) = 0$ будем считать ω комплексным с $\text{Im } \omega < 0$. Узнать, будет ли

комплексное решение для k соответствовать усилению или непропусанию, можно следующим образом: если при $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$ знак $\text{Im } k$ изменяется, то имеет место усиление, если же знак не меняется, то — непропускание.

Иными словами, в системе будет усиление, если она чувствительна к спаду сигнала во времени, и непропускание, если система не чувствует этого спада (волна просто не проникает в среду, как, например, в случае бесстолкновительной плазмы, когда $kc = \pm i\sqrt{\omega_p^2 - \omega}$ при $\omega < \omega_p$); физически данный критерий связан с принципом причинности. Если предположить, что система возбуждается источником, сигнал которого меняется во времени по закону $\exp(i \text{Re } \omega t) \exp(-\text{Im } \omega t)$ и $\text{Im } \omega \rightarrow -\infty$, то все волны должны затухать с удалением от источника из-за конечной скорости распространения возмущения. Следовательно, когда волна усиливается при действительных ω , то знак $\text{Im } k$ должен измениться при изменении $\text{Im } \omega$ от 0 до $-\infty$, т. е. при нарастании во времени волна должна затухать в том направлении, в каком усиливалась при $\text{Im } \omega = 0$.

7.7 Еще примеры неустойчивостей

Заканчивая эту лекцию, приведем еще два примера распределенных усилителей. Один из них (см. [83]) — это акустический усилитель, созданный Ч. Беллом. В этом усилителе тонкая струя воды направлялась на маленькую резиновую диафрагму, связанную с индикатором звука — рупором. Волны, распространяющиеся в потоке воды, вызывали колебания в диафрагме, преобразуемые в звуковые на выходе из рупора. Существование растущих с координатой волн доказывалось следующим образом. Около сопла, из которого вырывалась струя воды, размещался камертон или музыкальный ящик (см. [83]), которые на современном языке следует назвать входным устройством. Тогда на выходе из рупора снимался усиленный звуковой сигнал, достаточный для того, чтобы его было слышно в лекционном зале.

В работе [83] предложена простая теория усилителя, близкая по форме построения к теории неустойчивости Гельмгольца. Суть ее в следующем. Рассматривается односкоростной цилиндрический ламинарный поток несжимаемой жидкости с плотностью ρ_0 , который описывается гидродинамическими уравнениями Эйлера для радиальной (v_r) и продольной (v_z) компонент скорости. Возмущениями по азимутальной координате φ пренебрегают. В предположении, что под действием начального возмущения возникающие переменные величины изменяются по закону $\exp[i(\omega t - kz)]$, где ω — действительная величина, линеаризованные

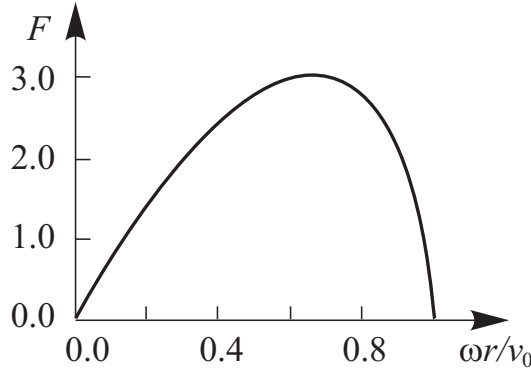


Рис. 7.15. График функции $F(\omega r/v_0)$. Для низких частот эта функция (а значит, и максимальный коэффициент усиления на единицу длины) пропорциональна частоте, достигает максимума при $\omega r/v_0 = 0,7$ и обращается в нуль на частоте $f_{\max} = v_0/(2\pi r)$ [83]

уравнения движения имеют вид

$$(\omega - kv_0)v'_z = kp'/\rho_0, \quad (7.69)$$

$$(\omega - kv_0)v'_r = -(i/\rho_0)\partial p'/\partial r, \quad (7.70)$$

где v_0 — постоянная скорость жидкости в z -направлении. Из условия несжимаемости жидкости $\text{div } \mathbf{v}' = 0$ и уравнений (7.69) и (7.70) получается дифференциальное уравнение для p' , которое имеет решение

$$p' = AI_0(kr)e^{i(\omega t - kz)}, \quad (7.71)$$

где A — постоянная, $I_0(kr)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Под действием возмущений граница жидкости искривляется, что, как показано в [83], приводит к следующему выражению для переменного давления на границе:

$$P' = \sigma(k^2 - r^{-2})r' = \frac{[\sigma/(\rho_0 r^2)](k^2 r^2 - 1)}{(\omega - kv_0)^2} \frac{\partial p'}{\partial r}, \quad (7.72)$$

где σ — поверхностное натяжение, $v'_r = i(\omega - kv_0)r'$. Используя (7.71) и (7.72), приходим к дисперсионному уравнению

$$(\omega - kv_0)^2 = \frac{\sigma}{\rho_0 r^2} (k^2 r^2 - 1) k \frac{I_1(kr)}{I_0(kr)}. \quad (7.73)$$

Если считать, что $k = \omega/v_0 + \delta$ ($|\delta| \ll \omega/v_0$), и в правой части (7.73) заменить k на ω/v_0 , то

$$k = \frac{\omega}{v_0} \pm i \left(\frac{\sigma}{\rho_0 r^3 v_0^2} \right)^{1/2} \frac{1}{20 \lg e} F \left(\frac{\omega r}{v_0} \right) \quad (7.74)$$

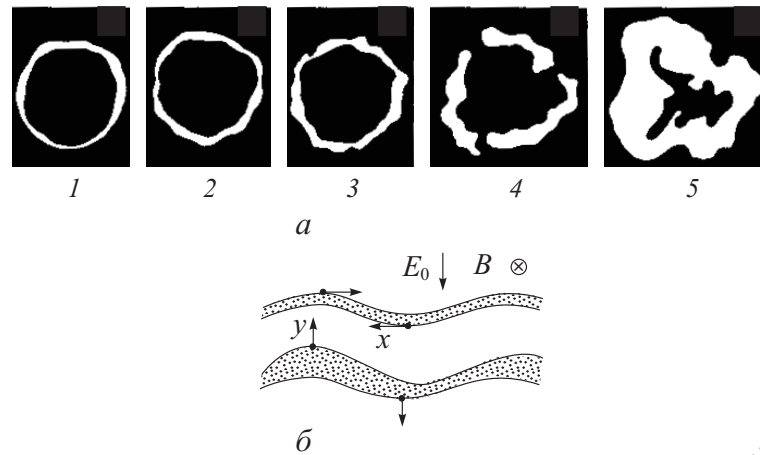


Рис. 7.16. Эволюция неустойчивости дрейфующего цилиндрического электронного потока в продольном магнитном поле; на фотографиях из работы [84] показано сечение пучка при перемещении экрана вдоль пространства дрейфа; увеличение номера кадра соответствует увеличению длины дрейфа (а); иллюстрация фотографий на примере тонкого ленточного слоя в скрещенных полях; локальное увеличение плотности заряда приводит к изгибу слоя, он становится неустойчивым и начальное возмущение растет (б) [25, гл. 5]

Вид функции $F(\omega r/v_0)$ показан на рис. 7.15. Для нарастающей волны максимальный коэффициент усиления (в децибелах на единицу длины)

$$G_{\max} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 r^3 v_0^2}} F\left(\frac{\omega r}{v_0}\right). \quad (7.75)$$

Следуя [83], оценим величину G_{\max} , полагая, что диаметр потока равен 0,1 см, а частота, соответствующая условию $\omega r/v_0 = 1$ (рис. 7.15), равна 5000 Гц. Из этих данных находим, что скорость потока должна быть равна 1570 см/с (это равносильно напору 1260 см вод. ст.). Тогда, используя график рис. 7.15 для частоты около 3500 Гц получаем $G_{\max} \approx 1,43$ дБ/см ($\sigma \approx 73$ дин/см, $\rho_0 \approx 1$ г/см³).

В электронике подобная неустойчивость характерна для трубчатых пучков в продольном магнитном поле; последнее компенсирует кулоновы силы расталкивания в объемном заряде [84].

На рис. 7.16 приведены фотографии из работы [84], иллюстрирующие эволюцию этой неустойчивости в пространстве дрейфа. Неустойчивость полых пучков близка к неустойчивости тонких заряженных слоев в скрещенных электро- и магнитостатических полях, для которых возможно простое качественное объяснение неустойчивости [25]. Действительно, если в задаче с трубчатым пучком перей-

ти в систему координат, движущуюся вдоль магнитного поля со статической скоростью электронного потока, то движение электронов будет таким же, как и в пучке в скрещенных полях,— перпендикулярным и электрическому, и магнитному полям. Интересно, что для электронных потоков в скрещенных полях с произвольным распределением плотности по сечению справедлив ряд известных гидродинамических теорем об устойчивости различных плоскопараллельных течений (в частности, существует аналог теоремы Рэлея о необходимости для неустойчивости электронного потока точки перегиба в профиле скорости).

Лекция 8

Энергия и импульс волн

Уравнение переноса усредненной плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде на примере уравнения Клейна-Гордона. Вариационный принцип Уизема. О различных способах вывода выражений для плотности энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией. Что же такое волновая энергия для линейных волн? Импульс волнового пакета.

8.1 Уравнение переноса плотности энергии для волнового пакета в диспергирующей среде

Волны, как и всякий движущийся объект, переносят энергию в процессе своего распространения. Энергия эта самая разная в зависимости от природы волн: весьма значительная - у морских волн, перемещающих при шторме огромные каменные глыбы, сравнительно небольшая - у электромагнитных световых волн, доходящих до Земли от Солнца (мощность на 1 м^2 поверхности около 1 кВт) и т. п. Подобно движущимся частицам, волны обладают импульсом. Хотя существование импульса у волны не может вызвать сомнений, проявляется он менее заметно, чем энергия волны; например, световое давление потока излучения Солнца на орбите Земли составляет очень малую величину - всего $p = 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ Па}$. [2,8] (см. также лекцию 2 этого учебника).

Мы в этой лекции получим уравнения, описывающие перенос энергии и импульса волн в диспергирующих средах [7, 53, 85, 86].

При выводе уравнения переноса энергии поступим, как и при выводе уравнения эволюции волнового вектора (см. гл. 6): откажемся от использования интеграла Фурье. Будем исходить из уравнения Клейна - Гордона с постоянными коэффициентами [7]:

$$u_{tt} - V^2 u_{xx} + \beta^2 U = 0. \quad (8.1)$$

Умножая обе части (8.1) на u_t , получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \right) - V^2 u_t u_{xx} = 0. \quad (8.2)$$

Прибавим к левой части получившегося уравнения (8.2) слагаемое $V^2 u_x u_{xt} = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} u_x^2)$ и отнимем в точности такое же. Легко видеть, что

$$-V^2 u_t u_{xx} - V^2 u_x u_{xt} = -V^2 \frac{\partial}{\partial x} (u_t u_x).$$

С учетом сделанных преобразований получаем уравнение, выражающее закон сохранения энергии, в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-V^2 u_x u_t) = 0. \quad (8.3)$$

где сумма $\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2$ имеет смысл плотности энергии, а $-V^2 u_x u_t$ — потока энергии.

Рассмотрим теперь группу волн (или, как часто говорят, волновой пакет), медленно изменяющуюся в пространстве и во времени. Для такой группы волн

$$u \sim \operatorname{Re} (A e^{i\theta}) = a \cos(\theta + \eta) \quad (8.4)$$

где $a = |A|$, $\eta = \operatorname{Arg} A$. Используя (8.4), вычисляем плотность энергии и плотность потока энергии. Очевидно, что

$$u_t \sim -i\omega a \sin(\theta + \eta) + a_t \cos(\theta + \eta) - \eta_t a \sin(\theta + \eta).$$

тогда $u_t^2 \sim \omega^2 a^2 \sin^2(\theta + \eta)$, поскольку из-за медленности изменения a и η слагаемыми, содержащими a_t и η_t , можно пренебречь. В тех же приближениях легко вычислить остальные слагаемые, входящие в плотность энергии, что окончательно дает

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{2} V^2 u_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 u^2 \sim \frac{1}{2} (\omega^2 + V^2 k^2) a^2 \sin^2(\theta + \eta) + \\ + \frac{1}{2} \beta^2 a^2 \cos^2(\theta + \eta), \end{aligned} \quad (8.5)$$

где учтено, что $\partial\theta/\partial t = \omega$, а $\partial\theta/\partial x = -k$. Аналогично для плотности потока энергии

$$V^2 u_x u_t \sim V^2 \omega k a^2 \sin^2(\theta + \eta). \quad (8.6)$$

Если вместо (8.1) взять уравнение, которое содержит производные более высокого порядка, то очевидно, что при их вычислении с учетом (8.4) появятся дополнительные слагаемые, содержащие производные ω и k . Однако, поскольку мы рассматриваем медленно изменяющийся волновой пакет, ω и k тоже медленно изменяются, и этими слагаемыми можно пренебречь. Рассмотрим средние

за период значения выражений (8.5) и (8.6). Это оправданно: интересны заметные (средние) изменения ω , k и a , а не мелкие осцилляции и их детали. Итак, для средних значений плотности энергии и плотности потока энергии в рамках сделанных допущений получаем

$$\mathcal{E} = (\omega^2 + V^2 k^2) \frac{a^2}{4} + \frac{\beta^2 a^2}{4}, \quad (8.7)$$

$$S = V^2 \omega k \frac{a^2}{2}. \quad (8.8)$$

Из (8.1) следует дисперсионное уравнение задачи

$$\omega^2 = \beta^2 + V^2 k^2. \quad (8.9)$$

С учетом (8.9) соотношения (8.7) и (8.8) принимают следующий окончательный вид:

$$\mathcal{E} = (\beta^2 + V^2 k^2) \frac{a^2}{2}, \quad (8.10)$$

$$S = V^2 \omega k \frac{a^2}{2}. \quad (8.11)$$

По определению $v_{zp} = d\omega/dk$, поэтому из (8.9) получаем

$$v_{zp} = \frac{V^2 k}{\sqrt{V^2 k^2 + \beta^2}}. \quad (8.12)$$

Из соотношений (8.10)–(8.12), используя (8.9), находим, что

$$v_{zp} = \mathcal{E}/S. \quad (8.13)$$

Общность этого выражения уже отмечалась в гл. 6. Возвращаясь к (8.3) и основываясь на (8.13), можно предположить, что закон сохранения средней плотности энергии выражается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{zp} \mathcal{E}) = 0. \quad (8.14)$$

В монографии [7] показано, что это уравнение соответствует ситуации, когда полная энергия между двумя прямыми $x - v_{zp} t = \text{const}$ на плоскости xt остается постоянной. Для доказательства рассмотрим выражение для энергии

$$\bar{\mathcal{E}}(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \mathcal{E} dx, \quad (8.15)$$

где x_1 и x_2 — точки, которые движутся со скоростями $v_{zp}(k_1)$ и $v_{zp}(k_2)$. Очевидно, что

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}(t)}{dt} = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dx + v_{zp}(k_2)\mathcal{E}_2 - v_{zp}(k_1)\mathcal{E}_1, \quad (8.16)$$

причем эта величина, как следует из (8.14), равна нулю. Не менее очевидно, что (8.16) в пределе при $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ превращается в (8.14).

Выражение для усредненной плотности энергии можно представить в виде $\mathcal{E} = F(k)a^2$. Подставим это выражение в (8.14); тогда

$$F(k) \left[\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{zp} a^2) \right] + \frac{\partial F}{\partial k} a^2 \left(\frac{\partial k}{\partial t} + v_{zp} \frac{\partial k}{\partial x} \right) = 0.$$

Но, как показано в гл. 6, $\partial k / \partial t + v_{zp} \partial k / \partial x = 0$, поэтому

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_{zp} a^2) = 0. \quad (8.17)$$

Полученные соотношения типа (8.14) и (8.17) легко распространить на многомерные задачи. Такое обобщение для уравнения Клейна-Гордона и уравнения

$$u_{tt} - V^2 \nabla^2 u = \beta^2 \nabla^2 u_{tt}$$

приведено в [7]. Уравнение, характеризующее перенос усредненной плотности энергии волновым пакетом в средах с заданной дисперсией, имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{zp,j} \mathcal{E}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{zp,j} a^2) = 0. \quad (8.18)$$

Изложенные результаты оставляют чувство неудовлетворенности оттого, что они получены для конкретного уравнения. Дж. Уизем показал [7] справедливость “усредненного вариационного принципа” непосредственно для функций $a(\mathbf{r}, t)$ и $\theta(\mathbf{r}, t)$, результатом применения которого является уравнение (8.18).

8.2 Вариационный принцип Уизема [7].

Начнем с напоминаний необходимых для дальнейшего изложения некоторых сведений о вариационном исчислении. Вариационный принцип

$$\delta I = \delta \iint_R L \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}, \varphi \right) dt d\mathbf{x} = 0 \quad (8.19)$$

утверждает, что интеграл $I[\varphi]$ по конечной области R должен быть стационарным при малых изменениях функции φ . Как это понимать?

Рассмотрим две близкие функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x}, t)$, где $h(\mathbf{x}, t)$ мало; обе функции считаются непрерывно дифференцируемыми, поскольку в выражение (8.19) входят первые производные $\partial\varphi/\partial t = \varphi_t$ и $\partial\varphi/\partial\mathbf{x} = \varphi_{\mathbf{x}}$. В монографии [7] малость функции $h(\mathbf{x}, t)$ измеряется нормой

$$\|h\| = \max |h| + \max |h_t| + \max |h_{\mathbf{x}}|,$$

где $\partial h/\partial t = h_t$ и $\partial h/\partial\mathbf{x} = h_{\mathbf{x}}$.

Обычно функция L довольно проста, и можно считать, что она имеет ограниченные вторые производные. Разложим функцию L в ряд Тэйлора. Тогда

$$I[\varphi + h] - I[\varphi] = \iint_R (L_{\varphi_t} h_t + L_{\varphi_{x_j}} h_{x_j} + L_{\varphi} h) dt d\mathbf{x} + O(\|h\|^2), \quad (8.20)$$

где φ, j означает $\partial\varphi/\partial x_j$. Вариационный принцип требует, чтобы первая вариация $\delta I[\varphi, h]$ (линейное по h выражение) была равна нулю для всех допустимых функций h . Ограничимся функциям h , обращающимися в нуль на границе R . После интегрирования по частям и использования теоремы о дивергенции получим

$$\delta I[\varphi, h] = \iint_R \left(-\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} + L_{\varphi} \right) h dt d\mathbf{x}. \quad (8.21)$$

Потребуем, чтобы выражение (8.21) обращалось в нуль для всех таких h . Из соображений непрерывности имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} - L_{\varphi} = 0. \quad (8.22)$$

Когда L содержит производные функции φ второго или более высокого порядка, то уравнение, которое называют уравнением Эйлера имеет вид:

$$L_{\varphi} - \frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_{\varphi_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} L_{\varphi_{t,x_j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L_{\varphi_{x_j x_k}} - \dots = 0. \quad (8.23)$$

Уравнение (8.23) является результатом повторного интегрирования по частям.

Уравнения (8.22) и (8.23) — уравнения в частных производных для $\varphi(\mathbf{x}, t)$, причем уравнениям такого вида можно дать эквивалентную вариационную формулировку.

В качестве типичного примера для дальнейшего построения теории вновь используем уравнение Клейна-Гордона в виде:

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi + \beta^2 \varphi = 0. \quad (8.24)$$

Сравнивая уравнения (8.24) и (8.22), находим выражение для лагранжиана

$$L = \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\nabla \varphi)^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \varphi^2. \quad (8.25)$$

Как уже использовалось для медленно меняющихся волновых пакетов

$$\varphi \sim \operatorname{Re}[A \exp(i\theta)] \quad \text{или} \quad \varphi \sim a \cos(\theta + \eta), \quad (8.26)$$

где $a = |A|$, $\eta = \operatorname{Arg} A$, $\omega = \partial\theta/\partial t$, $k_j = -\partial\theta/\partial x_j$. Подставим (8.26) в лагранжиан, пренебрежем производными от a , η , ω и \mathbf{k} и проведем усреднение по периоду, т.е. перейдем к

$$\mathcal{L}(a, \omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta.$$

Тогда для уравнения Клейна-Гордона (8.24), используя соотношения (8.25) и (8.26), получим:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2) a^2. \quad (8.27)$$

Задача 8.1. Докажите, что для уравнений

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi &= \beta^2 \nabla^2 \varphi_{tt}, \\ \varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} &\equiv 0, \end{aligned}$$

с дисперсионными уравнениями $\omega = \pm i\alpha k / \sqrt{1 + \beta^2 k^2}$, и $\omega = \pm \gamma k^2$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} (\omega^2 - \alpha^2 k^2 + \beta^2 \omega^2 k^2) a^2, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{4} (\omega^2 - \gamma^2 k^4) a^2. \end{aligned}$$

Постулируем теперь *усредненный вариационный принцип*

$$\delta \iint \mathcal{L}(\theta_t, -\theta_{\mathbf{x}}, a) dt d\mathbf{x} = 0 \quad (8.28)$$

для функций $\theta(\mathbf{x}, t)$ и $a(\mathbf{x}, t)$.

Поскольку производные от a отсутствуют, уравнение Эйлера (8.23) для вариации функции a имеет вид

$$\delta a : \quad \mathcal{L}_a = 0.$$

Вариационное уравнение для функции θ таково:

$$\delta \theta : \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\theta_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{\theta_{,j}} = 0.$$

В эти соотношения входят только производные по θ , поэтому снова удобнее вернуться к ω , \mathbf{k} и a . Тогда условия совместности, необходимые для существования фазы, выглядят так:

$$\mathcal{L}_a = 0, \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{k_j} = 0, \quad (8.30)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0. \quad (8.31)$$

Уравнение (8.29) ничем, кроме дисперсионного уравнения быть не может, поскольку является функциональным соотношением между ω , \mathbf{k} и a , что легко проверить во всех примерах задачи 8.1.

Тогда очевиден следующий важный вывод. Для любой линейной задачи лагранжиан L есть квадратичная функция от φ и ее производных. Как следствие этого, выражение для \mathcal{L} имеет следующий вид:

$$\mathcal{L} = G(\omega, \mathbf{k}) a^2. \quad (8.32)$$

Тогда, согласно соотношению (8.29) дисперсионное уравнение должно иметь вид

$$G(\omega, \mathbf{k}) \equiv 0, \quad (8.33)$$

и функция $G(\omega, \mathbf{k})$ в \mathcal{L} — не что иное, как дисперсионная функция (см. (8.27) и формулы для \mathcal{L} в задаче 8.1. Таким образом, в каждом случае не нужно даже вычислять \mathcal{L} : ее структура ясна.

Перепишем амплитудное уравнение (8.30), используя соотношение (8.32), так:

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_\omega a^2) - \frac{\partial}{\partial x_j} (G_{k_j} a^2) = 0. \quad (8.34)$$

Из уравнения (8.33) следует, что $\omega = W(\mathbf{k})$, поэтому равенство $G[W(\mathbf{k}), \mathbf{k}] = 0$ выполняется тождественно. Следовательно

$$G_\omega \frac{\partial W}{\partial k_j} + G_{k_j} = 0$$

и групповая скорость

$$v_{gpj} = \frac{\partial W}{\partial k_j} = \frac{G_{k_j}}{G_\omega}. \quad (8.35)$$

Пусть $G_\omega(W, \mathbf{k}) = g(\mathbf{k})$. Тогда уравнение (8.34) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} [g(\mathbf{k}) a^2] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g(\mathbf{k}) v_{gpj} a^2] = 0. \quad (8.36)$$

Из соотношений (8.31) следует, что

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + v_{zpj} \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0.$$

Используя последние соотношения, исключим из уравнения (8.36) функцию $g(\mathbf{k})$, что дает

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_{zpj} a^2) = 0.$$

Ранее мы получили аналогичное уравнение (второе из (8.18)), где усредненная плотность энергии представлялась в виде $\mathcal{E} = F(\mathbf{k})a^2$. Однако, функции $F(\mathbf{k})$ и $g(\mathbf{k})$ не совпадают, поэтому нельзя считать, что соотношение (8.36) представляет собой усредненное энергетическое уравнение — первое уравнение из (8.18).

Для дальнейших рассуждений Уизем [7] привлекает теорему Нетер, которая утверждает, что каждой группе преобразований, относительно которой лагранжиан инвариантен, соответствует свое уравнение сохранения. Если лагранжиан инвариантен относительно сдвига по t , это утверждение к нему применимо, и соответствующее энергетическое уравнение оказывается таким:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\omega \mathcal{L}_{k_j}) = 0. \quad (8.37)$$

Лагранжиан в (8.28) удовлетворяет указанному требованию инвариантности. Вслед за Уиземом не будем проследивать во всех деталях применение теоремы Нетер, а лишь укажем, что соотношение (8.37) получается из системы уравнений (8.29)-(8.31) (предоставляем читателю убедиться в этом самому).

Как показано выше, в линейном случае стационарное значение $\mathcal{L} = 0$, поэтому для плотности энергии имеем

$$\mathcal{E} = \omega \mathcal{L}_\omega, \quad (8.38)$$

а для плотности потока энергии

$$F_j = -\omega \mathcal{L}_{k_j}. \quad (8.39)$$

Следовательно, $\mathcal{L}_\omega = \mathcal{E}/\omega$, и уравнения (8.30) или (8.37) можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathcal{E}}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_{zpj} \mathcal{E}}{\omega} \right) = 0, \quad (8.40)$$

а из формул (8.32), (8.38) и (8.39) имеем $\mathcal{E} = \omega G_\omega a^2$ и $F_j = v_{zpj} \mathcal{E} = -\omega G_{k_j} a^2$. Напомним, что величина \mathcal{E}/ω уже встречалась нам в [1][лекция 7] где она интерпретировалась как адиабатический инвариант для осциллятора с медленно изменяющимися параметрами.

Задача 8.2. Известно, что усредненный гамильтониан, т.е. плотность энергии волны, выражается как

$$\bar{H} = \overline{p\dot{q}} - \bar{L},$$

где $p = L + \varphi_t$, $\dot{q} = \varphi_t$, а плотность потока энергии как

$$S = \dot{q}_{x_j} \overline{\frac{\partial L}{\partial q_{x_j}}}$$

(черта означает усреднение за период).

Полагая для простоты, что $\varphi(x, t) = a(x, t) \cos \theta(x, t)$, докажите следующие соотношения:

$$\bar{H} = \omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}, \quad S = -\omega \mathcal{L}_k.$$

8.3 Плотность энергии электромагнитного поля в среде с дисперсией

8.3.1 Метод М.Л.Левина

Начнем с примера изящного вывода выражения для средней плотности электромагнитной энергии в непоглощающей диспергирующей среде, принадлежащего М.Л. Левину, следуя книге [85].

Предположим, что вещество с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega)$ и магнитной проницаемостью $\mu(\omega)$ заполняет плоский конденсатор с емкостью $C = \varepsilon(\omega)C_0$ и тонкий соленоид с индуктивностью $L = \mu(\omega)L_0$ (рис. 8.1). Конденсатор и соленоид соединены в колебательный контур, в котором при отсутствии потерь могут возникнуть свободные гармонические колебания с частотой $\omega_0 = 1/\sqrt{L(\omega)C(\omega)}$. Введем теперь в контур в некоторый момент времени сопротивление R . Понятно, что, начиная с этого момента, колебания начнут затухать, а первоначально запасенная электромагнитная энергия будет переходить в джоулево тепло, которое выделяется на сопротивлении R . Поэтому полное количество тепла, выделившееся в сопротивлении R за время, когда колебания прекратятся, будет равно электромагнитной энергии, запасенной в контуре до введения сопротивления. Таким образом, решение поставленной задачи сводится к вычислению джоулева тепла.

Допустим, что при $t < 0$ в контуре имеют место свободные колебания, так что сила тока в контуре $I = I_0 e^{i\omega t}$, а напряжение на обкладках конденсатора $V = V_0 e^{i\omega t}$. Ток и напряжение связаны уравнением

$$L \frac{dI}{dt} + V = 0 \quad \text{или} \quad i\omega LI + V = 0,$$

Начиная с момента $t = 0$, когда в контур введено сопротивление R , колебания

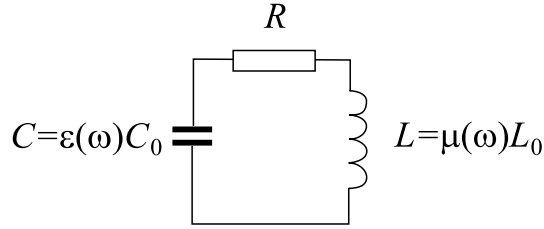


Рис. 8.1. Колебательный контур LRC . C_0 и L_0 — значения емкости и индуктивности, когда в пространстве между обкладками конденсатора и внутри соленоида вакуум; если $R = 0$, то $\omega_0 = 1/\sqrt{L(\omega)C(\omega)}$ — частота свободных гармонических колебаний.

будут описываться уравнением

$$L(\tilde{\omega}) \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C(\tilde{\omega})} = 0,$$

решение которого для $t > 0$ есть $I = I_0 \exp(i\tilde{\omega}t)$, где $\tilde{\omega}$ — комплексная частота, определяемая характеристическим уравнением

$$\tilde{\omega}L(\tilde{\omega}) - \frac{1}{\tilde{\omega}C(\tilde{\omega})} = iR. \quad (8.41)$$

Если $R \rightarrow 0$, то $\tilde{\omega} \rightarrow \omega$, а ω удовлетворяет характеристическому уравнению

$$\omega L(\omega) - \frac{1}{\omega C(\omega)} = 0. \quad (8.42)$$

Вычтем из уравнения (8.41) уравнение (8.42) и после простых преобразований заменим все разности дифференциалами. Тогда

$$\begin{aligned} & \tilde{\omega}L(\tilde{\omega}) - \omega L(\omega) - \left[\frac{1}{\tilde{\omega}C(\tilde{\omega})} - \frac{1}{\omega C(\omega)} \right] = iR \rightarrow \\ \rightarrow & \left[\frac{\tilde{\omega}L(\tilde{\omega}) - \omega L(\omega)}{\tilde{\omega} - \omega} + \frac{\tilde{\omega}C(\tilde{\omega}) - \omega C(\omega)}{\tilde{\omega} - \omega} \cdot \frac{1}{\tilde{\omega}\omega C(\tilde{\omega})C(\omega)} \right] = iR \rightarrow \\ \rightarrow & \left[\frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{1}{\omega^2 C^2} \frac{d(\omega C)}{d\omega} \right] (\tilde{\omega} - \omega) = iR. \end{aligned}$$

Полагая $\tilde{\omega} = \omega + i\delta$, находим

$$\frac{R}{\delta} = \frac{d(\omega L)}{d\omega} + \frac{L}{C} \frac{d(\omega C)}{d\omega}. \quad (8.43)$$

Чтобы найти джоулево тепло, надо проинтегрировать выражение $R^2 I$ по времени, учитывая, что

$$I \rightarrow \text{Re } I = \frac{1}{2}(I + I^*).$$

Энергия, первоначально запасенная в колебательном контуре, равна

$$W = \int_0^{\infty} R \left(\frac{I + I^*}{2} \right)^2 dt = \frac{R|I_0|^2}{4} \left[\frac{\delta}{\omega^2 + \delta^2} + \frac{1}{\delta} \right] \quad (8.44)$$

или в пределе при $\delta \rightarrow 0$

$$W = \frac{R|I_0|^2}{4} \frac{R}{\delta}. \quad (8.45)$$

Задача 8.3. Докажите соотношение (8.44), используя, что $I = I_0 \exp(i\omega t)$ и $V = V_0 \exp(i\omega t)$.

Подставляя в формулу (8.45) выражение (8.43) и пользуясь соотношением $\omega L|I_0| = |V_0|$, находим

$$W = \frac{L_0|I_0|^2}{4} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} + \frac{C_0|V_0|^2}{4} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega}. \quad (8.46)$$

В случае, когда между обкладками конденсатора и внутри соленоида был вакуум, для средних по времени значений магнитной и электрической энергий справедливы соотношения:

$$\frac{L_0|I_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{H}^2 \rangle v_m, \quad \frac{C_0|V_0|^2}{4} = \frac{1}{8\pi} \langle \mathbf{E}^2 \rangle v_e, \quad (8.47)$$

где v_m и v_e — объемы соленоида и конденсатора, а \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы напряженности электрического и магнитного полей, когда амплитуды напряжения на конденсаторе и тока в соленоиде равны V_0 и I_0 , знак $\langle \rangle$ означает усреднение по времени.

Поскольку при заданных V_0 и I_0 поля \mathbf{E} и \mathbf{H} не зависят от среды, заполняющей конденсатор и соленоид, соотношения (8.47) остаются справедливыми и в том случае, когда конденсатор и соленоид заполнены веществом. Используя выражения (8.46) и (8.47), получаем следующие формулы для средних по времени значений плотностей электрической и магнитной энергий:

$$\langle w_e \rangle = \frac{\langle W_e \rangle}{v_e} = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle \mathbf{E}^2 \rangle \quad (8.48)$$

$$\langle w_m \rangle = \frac{\langle W_m \rangle}{v_m} = \frac{1}{8\pi} \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle \mathbf{H}^2 \rangle. \quad (8.49)$$

Как подчеркивается в [85], недостаток приведенного выше вывода состоит в том, что дифференцирование функций ωL и ωC производится вдоль мнимой оси, так как $\tilde{\omega} - \omega = i\delta$ — величина чисто мнимая, а в окончательных выражениях (8.48) и (8.49) производится подмена дифференцированием по вещественной переменной ω . Так можно делать, если функции ωL и ωC аналитические. В общей теории дисперсии, впрочем, аналитичность функций $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ доказывается.

Задача 8.4. Получить выражения для плотности электрической и магнитной энергии на примере газа невзаимодействующих гармонических осцилляторов — атомов, в каждом из которых всего один электрон, в электрическом поле с частотой ω [53, гл. 3]. Вдали от собственной частоты ω_0 осциллятора затуханием можно пренебречь и для смещения \mathbf{r} осциллятора от положения равновесия пользоваться уравнением

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{e}{m} \mathbf{E},$$

где e и m — заряд и масса электрона.

Указание. В анализируемом случае энергия складывается из энергии самого электрического поля (т. е. поля в вакууме) и из энергии частиц, находящихся в поле (из кинетической и потенциальной энергии колеблющихся осцилляторов). Следует также использовать формулу Зельмейера (см., например, гл. 3 в [53]).

Задача 8.5. [85] Покажите, что, если $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$ положительны, то фазовая и групповая скорости в электромагнитной волне направлены в одну сторону.

8.3.2 Общий способ вывода формулы для плотности энергии

Рассмотрим теперь более общий способ вывода соотношений для плотности электромагнитного поля в среде с дисперсией.

Известное выражение $\mathbf{S} = (c/4\pi)[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ для плотности потока электромагнитной энергии справедливо и в среде с дисперсией [86, 87]. Из уравнений Максвелла следует не менее известное уравнение

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad (8.50)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{D} — напряженность и смещение электрического поля, \mathbf{H} и \mathbf{B} — напряженность и индукция магнитного поля.

Если дисперсии нет, т. е. проницаемости ε и μ , — действительные постоянные величины, то уравнение (8.50) выражает изменение плотности электромагнитной энергии $\mathcal{E} = (1/8\pi)(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2)$ в единице объема, т. е. $d\mathcal{E}/dt + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0$. При наличии диссипации плотность энергии тепловых потерь определяется мнимыми частями ε и μ :

$$Q = \frac{\omega}{4\pi} (\operatorname{Im} \varepsilon \langle \mathbf{E}^2 \rangle + \operatorname{Im} \mu \langle \mathbf{H}^2 \rangle), \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + Q = 0.$$

Найдем \mathcal{E} , следуя [86]. Рассмотрим узкий волновой пакет, состоящий из монохроматических компонент с частотами вблизи некоторой ω_0 , т. е. узкий пакет с шириной спектра $\Delta\omega \ll \omega_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0(t) e^{i\omega_0 t} \operatorname{Re} \mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0(t) e^{i\omega_0 t} + \mathbf{E}_0^*(t) e^{-i\omega_0 t}], \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_0(t) e^{i\omega_0 t} \operatorname{Re} \mathbf{H} = \frac{1}{2} [\mathbf{H}_0(t) e^{i\omega_0 t} + \mathbf{H}_0^*(t) e^{-i\omega_0 t}] \end{aligned}$$

(для \mathbf{D} и \mathbf{B} имеют место аналогичные выражения), где $\mathbf{E}_0(t)$ и $\mathbf{H}_0(t)$ — медленно изменяющиеся по сравнению с $\exp(i\omega_0 t)$ функции времени. Подставим выражение для действительных частей напряженностей \mathbf{E} , \mathbf{H} , а также для \mathbf{D} и \mathbf{B} в (8.50) после чего усредним получившееся по периоду $2\pi/\omega_0$. Очевидно, что быстро меняющиеся слагаемые типа $\mathbf{E}_0(\partial\mathbf{D}_0/\partial t) \exp(2i\omega_0 t)$ и $\mathbf{E}_0^*(\partial\mathbf{D}_0^*/\partial t) \exp(-2i\omega_0 t)$ при усреднении исчезнут, а останутся лишь слагаемые типа

$$M = \frac{1}{16\pi} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]$$

(мы делаем все преобразования только с первым слагаемым в правой части (8.50)). Представим производную $\partial\mathbf{D}/\partial t$ в виде $\hat{f}\mathbf{E}$, где оператор $\hat{f} = (\partial/\partial t)\varepsilon$. Что получится, если подействовать этим оператором на $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i\omega_0 t$? Очевидно, что если $\mathbf{E}_0 = \text{const}$ (поле чисто гармоническое), то $\hat{f}\mathbf{E} = i\omega_0 \varepsilon(\omega_0)\mathbf{E}$ или $\hat{f}\mathbf{E} = f(\omega_0)\mathbf{E}$, где $f(\omega) = i\omega\varepsilon(\omega)$. Разложим функцию $\mathbf{E}_0(t)$ в интеграл Фурье, что соответствует представлению ее группой монохроматических составляющих $\mathbf{E}_{0\omega} \exp[i(\omega - \omega_0)t]$ с $\mathbf{E}_{0\omega} = \text{const}$:

$$\mathbf{E}_0(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega - \omega_0)t} d(\omega - \omega_0).$$

Поскольку $\mathbf{E}_0(t)$ — медленно изменяющаяся функция времени, то в интеграл войдут лишь те составляющие, для которых $\Delta\omega = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. Это позволяет написать следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \hat{f}\mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t} &= f(\omega_0 + \Delta\omega)\mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t} \approx \\ &\approx f(\omega_0)\mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t} + \Delta\omega \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i(\omega_0 + \Delta\omega)t}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \sim \int_{-\infty}^{\infty} i\Delta\omega \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega). \quad (8.52)$$

Проинтегрируем (8.51) по $\Delta\omega$ в пределах от $-\infty$ до ∞ , что соответствует обрат-

ному преобразованию Фурье. Используя (8.52), находим

$$\begin{aligned} \hat{f} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) &= \\ &= f(\omega_0) e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) - i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} i\Delta\omega \mathbf{E}_{0\omega} e^{i\Delta\omega t} d(\Delta\omega) = \\ &= f(\omega_0) \mathbf{E}_0 e^{i\omega_0 t} - i \frac{df(\omega_0)}{d\omega_0} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Опуская далее индекс 0 у ω_0 , получаем

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = i\omega \varepsilon(\omega) \mathbf{E} + \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} e^{i\omega t}. \quad (8.53)$$

Напомним, что $\varepsilon(\omega) = \text{Re } \varepsilon(\omega) + i \text{Im } \varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\omega''(\omega)$. Те области частот, в которых $\varepsilon''(\omega)$ малы по сравнению с $\varepsilon'(\omega)$, называются областями “прозрачности” среды (аналогично для магнитной проницаемости). В этих областях можно положить $\varepsilon''(\omega) = 0$, так что $Q = 0$. Учитывая, что теперь $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) = \varepsilon^*(\omega)$, имеем следующее соотношение для M :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \left(\mathbf{E}_0^* \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} + \mathbf{E}_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0^*}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{E}_0^* \mathbf{E}_0) = \frac{1}{16\pi} \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \frac{d}{dt} (\mathbf{E}^* \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Поскольку для магнитного поля все выкладки аналогичны, можем написать выражение для усредненной плотности энергии

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \langle \mathcal{E}_{эл} \rangle + \langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle |E|^2 \rangle + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle |H|^2 \rangle \right]. \quad (8.54)$$

8.3.3 Метод, основанный на дисперсионном уравнении

Укажем еще на один простой способ получения энергетических соотношений в средах с временной и пространственной дисперсией, который основан на использовании дисперсионного уравнения системы [88, 89]. Рассмотрим одномерную волну $v' = \text{Re}\{v \exp[i(\omega t - kx)]\}$, где v' , например, — скорость возмущения в потоке электронов. Пусть волна скорости возбуждается внешней волной $F' = \text{Re}\{F \exp[i(\omega t - kx)]\}$ (например, продольной электрической компонентой бегущей электромагнитной волны), которая и определяет значения ω и k . Амплитуды v и F определены так, чтобы средняя за период мощность взаимодействия возбужденной и внешней волн была пропорциональна $(F'v'^*)$. Если v и F связаны

линейным соотношением $D(\omega, k)v = -iF$, где $D(\omega, k)$ — аналитическая функция ω и k , то имеют место формулы: для усредненной по периоду энергии на единицу длины

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\partial D}{\partial \omega} \frac{vv^*}{4} \quad (8.55)$$

и для усредненного по периоду потока энергии на единицу длины

$$\langle S \rangle = \frac{\partial D}{\partial k} \frac{vv^*}{4}. \quad (8.56)$$

В отсутствие внешнего воздействия $D(\omega, k) = 0$ и

$$v_{zp} = d\omega/dk = (\partial D/\partial k)(\partial D/\partial \omega)^{-1} = \langle S \rangle/\langle \mathcal{E} \rangle,$$

где полная производная берется вдоль всей дисперсионной характеристики.

Предоставляем читателю самому доказать весьма полезные формулы (8.55) и (8.56). В качестве примера их применения рассмотрим волны пространственного заряда в электронном потоке, исходя из уравнения для плотности сгруппированного тока j' при воздействии на поток внешней бегущей электромагнитной волны с продольной компонентой электрического поля E' (см. гл.7. В предположении, что все переменные величины изменяются во времени по закону $\exp(i\omega t)$, это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 j'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial j'}{\partial x} - \left[\left(\frac{\omega}{v_0} \right)^2 - \left(\frac{\omega_q}{v_0} \right)^2 \right] j' = \frac{i\omega\omega_p^2}{4\pi v_0^2} E' \quad (8.57)$$

v_0 — постоянная скорость пучка, $\omega_q = R(\omega, k)\omega_p$. Если $E' \sim \exp[i(\omega t - kx)]$, то из (8.57) имеем

$$\frac{4\pi}{\omega S} \left[(\omega - kv_0)^2 / \omega_p^2 - R^2(\omega, k) \right] j' S = -iE', \quad (8.58)$$

т. е.

$$D(\omega, k) = \left[\frac{(\omega - kv_0)^2}{\omega_p^2} - R^2(\omega, k) \right] \frac{4\pi}{\omega S}. \quad (8.59)$$

где S — поперечное сечение пучка. Вид $D(\omega, k)$ определяется тем, что средняя за период мощность взаимодействия электронного пучка с внешней бегущей волной равна $(1/2) \operatorname{Re}(E' j'^* S)$. При “снятии” внешнего воздействия $D(\omega, k) = 0$ и $(\omega - kv_0)^2 = R^2(\omega, k)\omega_p^2$, т. е. имеем две волны пространственного заряда в дрейфующем пучке — быструю $\omega - kv_0 = R(\omega, k)\omega_p$ и медленную $\omega - kv_0 = -R(\omega, k)\omega_p$. Из формул (8.55), (8.56) и (8.59) находим

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{2\pi j' j'^* S}{\omega\omega_p} \left(\frac{\omega - kv_0}{\omega_p} - R\omega_p \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \quad (8.60)$$

$$\langle S \rangle = \frac{2\pi j' j'^* S v_0}{\omega\omega_p} \left(\frac{\omega - kv_0}{\omega_p} + R \frac{\omega_p}{v_0} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right), \quad (8.61)$$

Если пучок бесконечно широкий и $R = 1$, то $v_{zp} = \langle S \rangle / \langle \mathcal{E} \rangle$, и перенос энергии связан лишь с кинематическим движением пучка. Однако для пучка конечной толщины

$$v_{zp} = v_0 \left(\frac{\omega - kv_0}{\omega_p} + R \frac{\omega_p}{v_0} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\omega - kv_0}{\omega_p} - R \omega_p \frac{\partial R}{\partial \omega} \right)^{-1},$$

т. е. распространение энергии определяется не только кинематикой пучка, но и вторыми членами в круглых скобках, имеющими электромагнитное происхождение. Полученные выражения (8.60) и (8.61) верны и в релятивистском случае, если в определении ω_p использовать продольную релятивистскую массу; они представляются полезными в теории шумов в электронных потоках. Интересно, что при $\partial R / \partial \omega = \partial R / \partial k = 0$ для быстрой (индекс “б”) и медленной (индекс “м”) волн пространственного заряда (8.60) и (8.61) имеем

$$\langle \mathcal{E}_{б,м} \rangle = \pm \frac{2\pi S}{\omega \omega_p} j' j'^*, \quad \langle S_{б,м} \rangle = \pm v_0 \langle \mathcal{E}_{б,м} \rangle, \quad (8.62)$$

т. е. быстрая волна потока имеет положительную энергию, а медленная — отрицательную. Волнам с отрицательной энергией мы посвятим следующую лекцию.

8.4 Что же такое волновая энергия для линейных волн?

Для вычисления волновой энергии линейных волн исходят из линеаризованных уравнений анализируемой системы, умножая их на комплексно сопряженные величины и приводя к дивергентной форме:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_l}{\partial t} + \text{div } S_l = 0.$$

Например, для звуковых волн в жидкости $\mathcal{E}_l = \rho_0 v^2 / 2 + p / (2\rho_0 c_{зв}^2)$, $S_l = pv$, где ρ_0 — постоянная составляющая плотности жидкости, v и p — малые возмущения скорости и давления, $c_{зв}$ — скорость звука. Именно так получается равенство $\mathcal{E} = \omega \mathcal{L}_\omega$, поскольку в нем использовано соотношение $\mathcal{L} = 0$, которое выполняется лишь при учете дисперсионного уравнения $G(\omega, \mathbf{k}) = 0$, следующего из линеаризованных уравнений задачи. В физическом отношении такой подход некорректен: \mathcal{E}_l не есть вся энергия, связанная с волной.

Действительно, энергетические величины имеют второй порядок по амплитуде волны, и отброшенные при линеаризации квадратичные члены (при наличии течений или потоков) могут дать квадратичных же вклад в энергию, импульс и т.д.

Приведем элементарное пояснение сказанного на примере жидкости, в которой существует некоторое периодическое волновое движение, распространяющееся вдоль оси x в присутствии постоянного сдвигового течения $u(z)$ (z — поперечная координата). Если амплитуда волны достаточно мала, то общее поле скоростей u можно представить в виде ряда

$$u = U(z) + A \left[f_1(z) e^{i(\omega t - kx)} + \text{к.с.} \right] + A^2 \left[f_0(z) + f_2(z) e^{2i(\omega t - kx)} + \text{к.с.} \right],$$

где A — амплитуда волны, $A^2 f_0(z)$ описывает квадратичную поправку к средней скорости течения, к.с. означает комплексно сопряженную величину. По определению средняя плотность кинетической энергии, связанной с волной, может быть представлена в виде:

$$E_k = \frac{\rho}{2} \left[\overline{u^2} - U^2(z) \right] = \rho |A^2| (|f_1|^2 + u f_0),$$

черта, как обычно, означает усреднение по времени; считается, что в окрестности данной точки $\rho = \text{const}$.

Таким образом, плотность энергии состоит из двух слагаемых: $\mathcal{E}_l \sim f_1^2$ и $\mathcal{E}_{nl} \sim U f_0$, имеющих один и тот же порядок $|A^2|$. Очевидно, что \mathcal{E}_{nl} “не содержится” в предварительно линеаризованных уравнениях. Окончательный вывод: для вычисления “истинной” энергии нелинейной волны необходимо знать нелинейное решение с точностью до членов второго порядка включительно.

8.5 Импульс волнового пакета

Пусть в среде, которая движется относительно наблюдателя со скоростью $|V| \ll c$ (c — скорость света), распространяется волновой пакет. Его энергия в системе координат, движущейся со скоростью \mathbf{V} , равна \mathcal{E}_V , в то время как в неподвижной системе координат энергия равна $\mathcal{E}_V^0 \neq \mathcal{E}_V$. Для дальнейших рассуждений [58] воспользуемся тем, что при $|V| \ll c$ имеет место галилеева инвариантность физических процессов: законы изменения состояний физических систем не зависят от того, в какой из инерциальных систем отсчета они происходят (для механики это означает, что уравнения Ньютона инвариантны относительно преобразования Галилея). Ответим сначала на вопрос: как связаны \mathcal{E}_V^0 и \mathcal{E}_V ? Для этого кроме волнового пакета рассмотрим частицу массы m , которая движется относительно наблюдателя со скоростью $\mathbf{v}_0 = \mathbf{V} + \mathbf{v}$. Величина \mathbf{v} — относительная скорость движения. Кинетическая энергия дополнительно введенной частицы

$$\mathcal{E}^0 = \frac{m \mathbf{v}_0^2}{2} = \frac{m \mathbf{V}^2}{2} + m \mathbf{v} \mathbf{V} + \frac{m \mathbf{v}^2}{2}. \quad (8.63)$$

Поскольку импульс частиц $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, а $\mathcal{E} = m\mathbf{v}^2/2$ — энергия в системе координат, движущейся со скоростью \mathbf{V} , то $\mathcal{E}^0 = \mathcal{E} + \mathbf{p}\mathbf{V}$ с точностью до постоянной величины $m\mathbf{V}^2/2$. Предположим далее, что частица и волновой пакет обмениваются энергией и импульсом. Следствием галилеевой инвариантности является следующее соотношение, связывающее энергию и импульс в движущейся среде:

$$\mathcal{E}_V^0 = \mathcal{E}_V + \mathbf{P}\mathbf{V}. \quad (8.64)$$

Структура соотношения (8.64) определяется тем, что оно должно быть в точности совпадающим с написанным выше для частицы. Когда волна и свободная частица взаимодействуют эффективно? При выполнении условий пространственного резонанса, т. е. когда скорость частицы \mathbf{v} равна фазовой скорости волны \mathbf{v}_ϕ , это условие удобно записать в виде условия черенковского излучения $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$. Из-за взаимодействия с волной имеет место изменение (уменьшение) энергии частицы $\Delta\mathcal{E} = \Delta(m\mathbf{v}^2/2) = m\mathbf{v}\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}\Delta\mathbf{p}$, связанное с изменением ее импульса. Такое же соотношение вследствие галилеевой инвариантности мы обязаны написать для волнового пакета. Если учесть, что получающиеся изменения энергии $\Delta\mathcal{E}_V$ и импульса $\Delta\mathbf{P}$ волнового пакета пропорциональны квадрату амплитуды, то $\Delta\mathcal{E}_V$ и $\Delta\mathbf{P}$ пропорциональны друг другу, т. е. при пространственном резонансе $\mathcal{E}_V = \mathbf{v}\mathbf{P}$. Импульс \mathbf{P} направлен вдоль вектора \mathbf{k} , поскольку составляющая скорости частицы, поперечная по отношению к \mathbf{k} , может быть произвольной. Поэтому из условия $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ следует, что $\mathbf{P} = (\mathbf{k}/\omega)\mathcal{E}_V$, откуда, в свою очередь, видно, что $(\mathbf{v}_\phi\mathbf{P}) = \mathcal{E}_V$ (фазовая скорость волны есть отношение энергии волны к ее импульсу). Если ввести амплитуду волны соотношением $\mathcal{E}_V = \omega|a^2| = \omega N$, где N — число волн в пакете с данным волновым числом \mathbf{k} [58], то $\mathbf{P} = \mathbf{k}N$. Используя два последних выражения для \mathcal{E}_V и \mathbf{P} в (8.64), находим $\mathcal{E}_V^0 = \omega N + \mathbf{k}\mathbf{V}N = \omega_0 N$, где $\omega_0 = \omega + \mathbf{k}\mathbf{V}$ — доплеровская частота.

Заметим, что Уизем указывает [7] на существование уравнения сохранения “волнового импульса”

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_i \mathcal{L}_\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-k_i \mathcal{L}_{k_j} + \mathcal{L}\delta_{ij}) = 0, \quad (8.65)$$

δ_{ij} — символ Кронекера. Из уравнения (8.65) находим плотность импульса

$$k_i \mathcal{L}_\omega = \frac{k_i}{\omega} \mathcal{E}_V$$

— вектор, направленный вдоль \mathbf{k} и имеющий длину \mathcal{E}_V/v_ϕ .

Задача 8.6. Проверьте справедливость уравнения сохранения (8.65) исходя из уравнений (8.29)-(8.31).

Лекция 9

Волны с отрицательной энергией. Связанные волны

Общие замечания. Волны с положительной и отрицательной энергией. Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Доплера.

9.1 Общие замечания

В предыдущей лекции мы столкнулись с тем, что плотность энергии и плотность потока энергии медленной волны поперек направления заряда в электронном потоке отрицательны (см. (8.62)). Формально это можно понять, используя соотношения (8.38) и (8.39), которые удобно записать в виде

$$\mathcal{E} = \omega \frac{\partial G(\omega, k)}{\partial \omega} a^2, \quad (9.1)$$

$$\mathcal{F} = -\omega \frac{\partial G(\omega, k)}{\partial k} a^2. \quad (9.2)$$

Рассмотрим дисперсионное уравнение (8.33) в области действительных k и ω . Согласно формуле (9.1) знак изменится в тех точках оси k , где меняет знак либо ω либо $\partial G / \partial \omega$. Что это значит? Смена знака ω означает смену знака фазовой скорости относительно групповой: волна из “прямой” становится “обратной” и наоборот. Второе условие в общем случае соответствует обращению в бесконечность групповой скорости $v_{gp} = d\omega/dk = -\mathcal{L}_k / \mathcal{L}_\omega$ ($\mathcal{L} \neq 0$). Типичный участок дисперсионной характеристики $\omega = \omega(k)$, соответствующий волне с отрицательной энергией отмечен на рис. 9.1 штриховкой. Имеет место смыкание двух ветвей дисперсионной характеристики, одна из которых соответствует волне с отрицательной энергией (ВОЭ), а другая — волне с положительной энергией (ВПЭ). Связь этих волн приводит к неустойчивости: за точкой ветвления частота становится комплексной.

На первый взгляд существование волн с отрицательной энергией противоречит общим принципам.

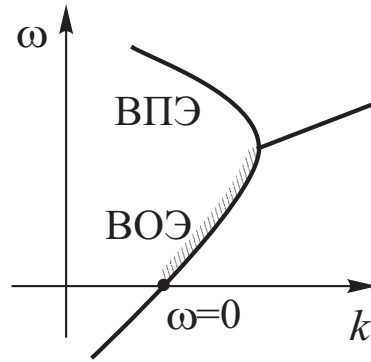


Рис. 9.1. Иллюстрация к объяснению существования ВОЭ

Действительно, например, на возбуждение электромагнитного волнового пакета в среде с дисперсией нужно затратить энергию; поэтому, когда подкачка энергии извне прекращается, существующая в диспергирующей среде диссипация (хотя бы и малая) заставит перейти всю энергию

$$\langle \mathcal{E}(t) \rangle = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} \langle |E|^2 \rangle + \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} \langle |H|^2 \rangle \right]$$

(см (8.54) в тепло. Поскольку согласно принципу возрастания энтропии тепло должно выделяться, а не поглощаться, получаем (см. [86])

$$\langle W(t) \rangle > 0, \quad \frac{d(\omega\varepsilon)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d(\omega\mu)}{d\omega} > 0. \quad (9.3)$$

Однако сказанное верно лишь для равновесных сред. Для неравновесных же сред соотношения (9.3) могут и не выполняться — в таких средах действительно возможно возбуждение и распространение волн с отрицательной энергией. Физический смысл этого будет ясен из дальнейшего.

Причины неравновесности могут быть самыми разнообразными [90], в частности нескомпенсированные направленные движения, внешние поля, градиент плотности, температуры и т. д. Примеры неравновесных сред хорошо известны: электронный пучок, взаимодействующий с полями замедляющей системы (ЛБВ, ЛОВ), плазма с многогорбой функцией распределения заряженных частиц по скоростям (частным случаем является взаимодействие электронного потока с плазмой), среды с отрицательной проводимостью или вязкостью (туннельные и ганновские полупроводники), пограничный слой и другого рода сдвиговые течения в гидродинамике. Почему в подобных средах возбуждаются волны с отрицательной энергией? Как возбудить волну с энергией определенного знака и каков результат взаимодействия связанных волн с энергиями разных знаков? Ответы на эти вопросы мы и постараемся здесь дать.

9.2 Волны с положительной и отрицательной энергией

Понятие о волнах с отрицательной энергией, впервые появилось в СВЧ – электронике в виде известной теоремы Чу о кинетической мощности [91]. Именно Чу показал, что с медленной волной пространственного заряда в электронном пучке связан поток “отрицательной кинетической мощности”. Следующий принципиально важный шаг в понимании волн с отрицательной энергией был сделан П.А. Стэрроком [92], который, не конкретизируя природы волн, показал, что в среде, движущейся со скоростью u , энергия быстрой и медленной волн, измеряемая неподвижным наблюдателем, выражается соотношениями

$$W_б = W_0(1 + u/v_ф), \quad W_м = W_0(1 - u/v_ф), \quad (9.4)$$

где $v_ф$ и $-v_ф$ – скорости воли в подвижной системе координат, а W_0 – энергия в этой системе. Из (9.4) видно, что при $v_ф < u$ величина $W_м$ отрицательна, в то время как групповая скорость обеих волн положительна. Более простой, но менее строгий, чем в [92], вывод формул (9.4) приведен в книге [2]. В дальнейшем волны с отрицательной энергией широко обсуждались как в периодической печати (см. обзор [93] и библиографию к нему), так и на страницах книг [58, 79, 88, 94].

По физическому смыслу волны с отрицательной энергией – это такие волны, с ростом амплитуды которых суммарная энергия системы “среда – волна” уменьшается. Помимо волн в неравновесных средах отрицательной энергией обладают также продольные электростатические волны, спектр которых расположен в области аномальной дисперсии среды $d\varepsilon/d\omega < 0$; для них средняя плотность энергии

$$\langle W_{эл} \rangle = \frac{\omega}{16\pi} \frac{d\varepsilon}{d\omega} \langle E \rangle^2 < 0.$$

Поясним смысл понятия “отрицательная энергия” на уже знакомом нам примере распространения волн пространственного заряда в дрейфующем электронном потоке. Линеаризованные уравнения задачи в использованных уже ранее обозначениях имеют вид

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{e}{m} E_{nz} = 0, \quad (9.5)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \rho'}{\partial t} = 0, \quad (9.6)$$

$$\frac{\partial E_{nz}}{\partial x} = 4\pi \rho'. \quad (9.7)$$

Пусть все переменные величины изменяются по закону $\exp[i(\omega t - kx)]$. Тогда из условия совместности уравнений (9.5)-(9.7) следует, что $(\omega - kv_0)^2 = \omega_p^2 =$

$4\pi\rho_0 e/m$ и $\omega - kv_0 = \omega_p$ соответствует быстрой волне пространственного заряда, а $\omega - kv_0 = -\omega_p$ относится к медленной волне. Из уравнений (9.5) и (9.7) находим $v' = (e/m)E_{nz}/[i(\omega - kv_0)]$, $E_{nz} = -4\pi\rho'/(ik)$, откуда имеем $v' = (4\pi e/m)\rho'/[k(\omega - kv_0)]$ или

$$\frac{v'}{v_0} = \frac{\omega_p^2}{kv_0(\omega - kv_0)} \frac{\rho'}{\rho}. \quad (9.8)$$

С учетом того, что $\omega - kv_0 = \pm\omega_p$ и $kv_0 = \omega \mp \omega_p$, из соотношения (9.8) получаем формулы, связывающие переменные составляющие скорости и плотности объемного заряда для медленной и быстрой волн соответственно:

$$\frac{v'_m}{v_0} = -\frac{\omega_p}{\omega + \omega_p} \frac{\rho'_m}{\rho_0}, \quad \frac{v'_b}{v_0} = \frac{\omega_p}{\omega - \omega_p} \frac{\rho'_b}{\rho_0}, \quad (9.9)$$

Из соотношений (9.9) видно, что в медленной волне возмущения скорости находятся в противофазе с возмущениями плотности (знак “-” в первой из формул (9.9)), а в быстрой — в фазе (знак “+” во второй из формул (9.9)). Соотношения (9.9) можно еще более упростить, если считать $\omega_p \ll \omega$ (что характерно, например, для вакуумной СВЧ-электроники [95]). В этом предположении

$$\frac{v'_m}{v_0} = -\frac{\omega_p}{\omega} \frac{\rho'_m}{\rho_0}, \quad \frac{v'_b}{v_0} = \frac{\omega_p}{\omega} \frac{\rho'_b}{\rho_0}, \quad (9.10)$$

Полученные выражения (9.9) (или (9.10)) сразу проясняют, почему у быстрой волны энергия положительна, а у медленной отрицательна. Действительно, например, из (9.10) следует, что для быстрой волны в области, где возмущение приводит к увеличению плотности ρ'_b , скорость движения частиц больше v_0 , а на участках, где плотность уменьшилась, скорость электронов меньше v_0 . Поэтому при возбуждении быстрой волны в потоке преобладают ускоренные по сравнению с v_0 электроны и результирующая кинетическая энергия, переносимая пучком, больше энергии невозмущенного пучка. Если же возбуждена медленная волна, то в тех областях, где образуется сгущение (увеличение ρ'_m , скорость электронов, наоборот, меньше v_0 и больше v_0 там, где возникает разрежение (уменьшение ρ'_m). В результате при возбуждении в электронном потоке медленной волны в нем преобладают замедленные по сравнению с v_0 электроны, и энергия, переносимая таким пучком, меньше, чем энергия пучка без волны.

Поскольку для анализируемой системы дисперсионное уравнение имеет вид

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \omega_p^2/(\omega - kv_0)^2 = 0. \quad (9.11)$$

то видно, что на ветви $\omega - kv_0 = -\omega_p$, соответствующей медленной волне,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} = 2\omega_p^2/(\omega - kv_0)^2 = -2/\omega_p < 0, \quad (9.12)$$

т. е. энергия этой волны отрицательна. В то же время для быстрой волны получаем $\partial\varepsilon/\partial\omega > 0$ и энергия этой волны положительна.

Очевидно, что в противоположность медленной волне волнам с положительной энергией соответствуют те, с ростом амплитуды которых полная энергия системы “среда – волна” увеличивается.

Попробуем получить выражения для плотности потока энергии в электронном пучке, исходя непосредственно из одномерного уравнения движения пучка в продольном электрическом поле $\partial v/\partial t + v\partial v/\partial x = (e/m)E_x$ выражения $j = \rho v$ для плотности тока и одномерного уравнения непрерывности $\partial j/\partial x + \partial\rho/\partial t = 0$. Рассмотрим, следуя [96], произведение $E_x j$; используя уравнение движения и формулу для j , находим

$$E_x j = (m/e) (\partial v/\partial t + v\partial v/\partial x) \rho v. \quad (9.13)$$

Уравнение (9.13) с учетом уравнения непрерывности принимает вид

$$\frac{\partial W_n}{\partial t} + \frac{\partial S_n}{\partial x} - E_x j = 0. \quad (9.14)$$

где плотность кинетической энергии электронного пучка

$$W_n = \frac{m\rho v^2}{2e} \quad (9.15)$$

и плотность потока кинетической энергии

$$S_n = \frac{m\rho v^3}{2e}, \quad (9.16)$$

причем отношение $S_n/W_n = v$, т. е. полной скорости пучка.

При выводе (9.14)-(9.16) мы не делали допущения о малости возмущений. Если же предположить, что $v = v_0 + v'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $j = j_0 + j' = j_0 + v_0\rho' + \rho_0v'$ (возмущения много меньше соответствующих постоянных величин), то, сохраняя в (9.15) члены второго порядка малости, получаем

$$W_n = \frac{m}{2e} \left[\rho_0 (v_0^2 + 2v_0v' + v'^2) + (v_0^2 + 2v_0v') \rho' \right]. \quad (9.17)$$

Рассчитаем среднюю за период плотность кинетической энергии для дрейфующего пучка, положив, что $E_x = E_{nз}$, и пучок локального возмущен на входе высокочастотным сигналом частоты ω , а далее предоставлен самому себе, т. е. в нем распространяются волны пространственного заряда, в частности волны вида

$$E_{nз} = E_{nз}^0 \exp\{i[\omega t - (k + v_0/\omega_p)x]\} + E_{nз}^0 \exp\{i[\omega t - (k - v_0/\omega_p)x]\},$$

где E_{nz}^0 определяется начальным возмущением.

С учетом (9.17) имеем

$$\begin{aligned} \langle W_n \rangle = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho_0 v_0^2 d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \frac{m}{e} \rho_0 v_0 v' d(\omega t) + \\ & + \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho_0 v'^2 d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \frac{m}{2e} \rho' v_0^2 d(\omega t) + \int_0^{2\pi} \frac{m}{e} \rho' v_0 v' d(\omega t). \end{aligned} \quad (9.18)$$

Первый интеграл — плотность энергии невозмущенного пучка, которую мы обозначим $\langle W_n^0 \rangle$. Поскольку v' и ρ' представляют собой суперпозицию гармонических слагаемых (волн пространственного заряда), то второй и четвертый интеграл равны нулю. Таким образом, нас интересует

$$\delta \langle W_n \rangle = \langle W_n \rangle - \langle W_n^0 \rangle = \frac{m\rho_0}{4\pi e} \int_0^{2\pi} v'^2 d(\omega t) + \frac{mv_0}{2\pi e} \int_0^{2\pi} \rho' v' d(\omega t). \quad (9.19)$$

Так как $v' = (e/m)E_{nz}/[i(\omega - kv_0)]$, а v' и ρ' для $\omega_p \ll \omega$ связаны соотношениями (9.10), то, вычисляя интегралы в (9.18), имеем для быстрой и медленной волн пространственного заряда

$$\delta \langle W_{np. \delta} \rangle \approx \frac{(E_{nz}^0)^2}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} > 0, \quad \delta \langle W_{np. m} \rangle \approx -\frac{(E_{nz}^0)^2}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} < 0. \quad (9.20)$$

Знак приближенного равенства появился потому, что в (9.20) мы пренебрегли слагаемым, получившимся от вычисления первого интеграла, что вполне оправдано при $\omega_p \ll \omega$: это слагаемое в ω/ω_p меньше второго.

Заметим, что если в (8.62) учесть, что $E_{nz} = -4\pi j'/(i\omega)$, и, следовательно, $j'j'^* = \omega^2 E_{nz}^2/16\pi^2$, то приходим к (9.20).

Разумеется, и формула $\delta \langle W_{эл} \rangle = (\omega/16\pi)(d\varepsilon/d\omega)|E_{nz}|^2$ с учетом того, что $d\varepsilon/d\omega = \pm 2/\omega_p$, приводит к тому же результату. При $\omega_p \ll \omega$ из общих формул (9.4) имеем

$$\frac{W_{\delta, m}}{W_0} = \pm \frac{\omega}{\omega_p}, \quad (9.21)$$

так как $u = v_0$, $v_{\phi} = \pm v_0 \omega_p / \omega$.

Итак, отрицательной энергией обладают волны, в которых возмущения скорости и плотности противофазны. По-видимому, такое объяснение возникновения воли с отрицательной энергией является достаточно общим; оно относится не только к электронике, но и ко многим гидродинамическим задачам, в которых

принципиальна сжимаемость. Для несжимаемой жидкости столь просто интерпретировать физический смысл волн с отрицательной энергией можно уже не всегда. В частности, если течение стратифицировано по плотности [97], то такое объяснение справедливо, при этом под возмущениями плотности следует понимать возмущения градиента плотности. В случаях течений без стратификации, например в пограничном слое, следует вести речь о волнах скорости и волнах давления [90, 98].

Какие условия должны быть выполнены, чтобы в среде возникла волна отрицательной энергии? Очевидно, для этого нужно, чтобы медленная волна имела возможность отдавать некоторую часть своей энергии среде или другим волнам.

Обратимся вновь к дисперсионному уравнению (8.33) в одномерном случае. Если ввести потери в среде, то в дисперсионном уравнении возникает малая мнимая часть, т. е. имеем

$$G(\omega, k) + i\nu(\omega, k) = 0$$

или

$$G(\omega', k) - i\omega'' G_\omega(\omega', k) + i\nu(\omega', k) = 0,$$

где $\omega = \omega' - i\omega''$. Из последнего уравнения сразу находим малую мнимую добавку к невозмущенной частоте:

$$\omega'' = \frac{\nu(\omega', k)}{G_\omega} = \frac{\omega' \nu a^2}{\mathcal{E}}. \quad (9.22)$$

Очевидно, что знак энергии волны зависит от системы отсчета. При преобразовании Галилея энергия волны преобразуется одновременно с доплеровским сдвигом ее частоты. Величина $\mathcal{L}_\omega = G_\omega a^2$ инвариантна относительно преобразования Галилея, поэтому сдвигается лишь одна граница волновых чисел, соответствующих ВОЭ, где $\omega = 0$, а граница $G_\omega = 0$ остается неизменной.

Сам факт устойчивости или неустойчивости остается неизменным, а соответствующий декремент или инкремент инвариантны. В соответствии с формулой (9.22) функция $\omega' \nu a^2$ меняет знак вместе с частотой волны.

Для неустойчивости ВОЭ нужна “истинная” диссипация, т. е. положительные потери в лабораторной для ВОЭ системе отсчета. При движении системы отсчета знаки энергии и потерь изменяются одновременно. Различие знаков энергии двух связанных волн также сохраняется в любой системе отсчета.

Заметим, что при иной постановке задачи гармонический источник, неподвижный относительно данной системы отсчета, возбуждает в среде волну с частотой ω , и, следовательно, речь должна идти о пространственном усилении

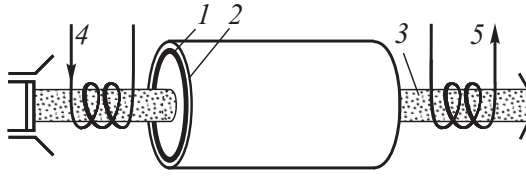


Рис. 9.2. Схема резистивного усилителя: 1 — резистивный слой; 2 — диэлектрическая трубка; 3 — электронный поток; 4 — входное и выходное устройства.

волны. Воспользуемся очевидным соотношением

$$G_{\omega}\omega'' + G_k k'' = 0,$$

из которого следует, что

$$k'' = -\omega'' \frac{G_{\omega}}{G_k} = \frac{\omega''}{v_{zp}},$$

т. е. пространственный инкремент k'' связан с временным ω'' через групповую скорость v_{zp} . Изменение знака k'' в области $\omega'' < 0$ не приводит к усилению, поскольку при этом одновременно с k'' меняется знак v_{zp} , т. е. направление потока энергии волны. Волна затухает в направлении распространения энергии. Пространственной неустойчивости соответствует изменение знака k'' одновременно с изменением знака ω'' при неизменном знаке v_{zp} . В окрестности точки, где $\mathcal{L}_k = 0$, нужно учесть следующий член разложения $G(\omega, k)$ по k . Тогда

$$G_{\omega}\omega'' + \frac{(k'')^2}{2} G_{kk} = 0$$

и

$$k'' = \left(-\frac{2G_{\omega}\omega''}{G_{kk}} \right)^{1/2}.$$

Таким образом, $k'' \sim (\omega'')^{1/2}$. Проиллюстрируем сказанное о пространственном усилении ВОЭ в среде с потерями на примере резистивного усилителя [95] (рис. 9.2): Предварительно модулированный во входном устройстве электронный пучок проходит через диэлектрическую трубку, внутренняя поверхность которой покрыта поглощающим слоем, и наводит в нем переменный заряд. Поля, создаваемые наведенными зарядами, в свою очередь, воздействуют на электронный пучок и изменяют переменную составляющую тока пучка. После прохождения трубки поток попадает в выходное устройство.

Входное воздействие возбуждает в пучке две волны пространственного заряда, поля которых вызывают в резистивных стенках движущиеся заряды; это

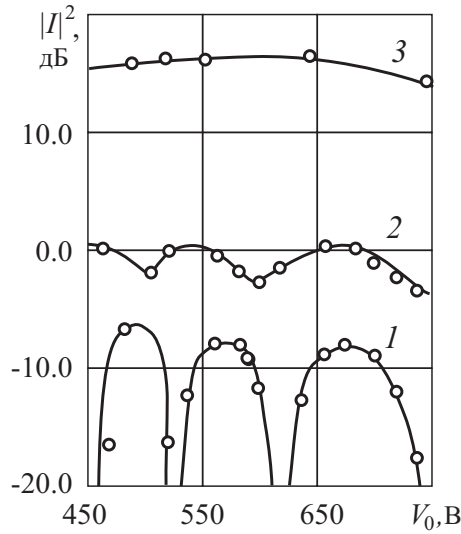


Рис. 9.3. Зависимость квадрата относительного сгруппированного тока от ускоряющего напряжения [99]: 1 — диэлектрическая среда заменена металлической поверхностью (возбуждены две волны пространственного заряда с постоянными амплитудами); 2 — пучок движется в резистивной среде, но ток пучка мал (возбуждены нарастающая и затухающая волны); 3 — ток большой (преобладает нарастающая медленная волна).

в свою очередь приводит к джоулевым потерям энергии волн. Но такие потери действуют по-разному на быструю и медленную волны. Быстрая волна затухает (волна с положительной энергией), а медленная нарастает; отдавая энергию среде, последняя увеличивает свою амплитуду. Экспериментальное доказательство нарастания медленной волны пространственного заряда в резистивном усилителе иллюстрирует рис. 9.3.

Сказанное легко подтвердить простой теорией, в основе которой лежат линеаризованные уравнения

$$\frac{\partial^2 j'}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial j'}{\partial x} - \left(\frac{\omega}{v_0} \right)^2 j' = \frac{i\omega\rho_0}{2V_0} E, \quad (9.23)$$

$$E = -\frac{4\pi(j' + j_{cm})}{i\omega} = -\frac{4\pi j'}{i\omega} - \frac{4\pi\sigma E}{i\omega}, \quad (9.24)$$

где j_{cm} - плотность стороннего тока в поглощающем покрытии, σ - проводимость покрытия. Предполагая волновой характер процессов ($j', E \sim \exp[i(\omega t - kx)]$), из условия совместности уравнений (9.23) и (9.24) приходим к дисперсионному

уравнению

$$\frac{\omega_p^2}{(\omega - kv_0)^2} + \frac{i4\pi\sigma}{\omega} = 1. \quad (9.25)$$

Перепишем (9.25) в виде

$$(\omega - kv_0 - \omega_p)(\omega - kv_0 + \omega_p) = i\frac{4\pi\sigma(\omega - kv_0)^2}{\omega}. \quad (9.26)$$

Предположим далее, что $\omega - kv_0 \approx -\omega_p$. Это соответствует возбуждению медленной волны пространственного заряда. Тогда $\omega - kv_0 - \omega_p \approx -2\omega_p$ и уравнение (9.26) становится таким: $\omega - kv_0 \approx -\omega_p - i2\pi\sigma\omega/\omega$. Поэтому

$$k \approx \frac{\omega + \omega_p}{v_0} + i\frac{2\pi\sigma\omega}{\omega_p v_0}, \quad (9.27)$$

т. е. $\text{Re } k$ равняется фазовой постоянной распространения медленной волны, а $\text{Im } k = 2\pi\sigma\omega/(\omega_p v_0) > 0$, и поэтому волна нарастает по мере распространения:

$$j', E \sim \exp \left[-i\frac{\omega + \omega_p}{v_0} x + \frac{2\pi\sigma\omega}{\omega_p v_0} x \right].$$

Аналогичные выкладки показывают, что быстрая волна пространственного заряда будет затухать (проделайте эти расчеты самостоятельно).

Для поперечных электромагнитных волн энергия может быть отрицательна, например, в среде из двухуровневых частиц. Действительно, в этом случае

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2 N_{12}}{\omega^2 - \omega_{12}^2 + 2i\gamma\omega_{12}}, \quad (9.28)$$

где ω_{12} — частота перехода, $\omega_0^2 = 4\pi Nd/m$ (d характеризует связь частицы с полем, N — концентрация частиц), $N_{12} = (n_1 - n_2)/n_2$, $n_{1,2}$ — заселенности нижнего и верхнего уровней [100]. Энергия волны на частоте ω где $\omega - \omega_{12} \gg \gamma$, приближенно пропорциональна

$$\frac{\partial(\omega^2\varepsilon)}{\partial\omega} = 2\omega \left(1 + \omega_{12}^2 N_{12} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (9.29)$$

и может быть отрицательной, если среда инвертирована — верхний уровень заселен больше, чем нижний. Согласно (9.29) отрицательной будет энергия волны при $\omega - \omega_{12} < \omega_0\sqrt{n_1 - n_2}/2$. Ясно, что взаимодействие волн с отрицательной энергией и волн с положительной энергией должно сопровождаться неустойчивостью — обе волны будут расти по амплитуде.

9.3 Связанные волны, синхронизм. Нормальный и аномальный эффект Допплера

Ограничимся случаем слабой связи, когда феноменологический вывод уравнений связанных волн элементарен. В отсутствие связи

$$\frac{da_1}{dx} = -ik_1 a_1, \quad \frac{da_2}{dx} = -ik_2 a_2, \quad (9.30)$$

где a_1 и a_2 нормированы так, что $|a_1|^2$ и $|a_2|^2$ — потоки мощности, переносимые волнами, k_1 и k_2 — постоянные распространения волн. Если теперь связать волны, но считать связь слабой (k_1 и k_2 остаются такими же, как и в отсутствие связи), то

$$\frac{da_1}{dx} = -ik_1 a_1 + c_{12} a_2, \quad \frac{da_2}{dx} = -ik_2 a_2 + c_{21} a_1, \quad (9.31)$$

где c_{12} и c_{21} — коэффициенты связи волн (c_{12} и c_{21} малы по сравнению с k_1 и k_2). Предположим далее, что затуханием волн можно пренебречь, т. е. в отсутствие связи $k_{1,2} = \omega/v_{1,2}$ — действительные величины, $v_{1,2}$ — фазовые скорости несвязанных волн. В случае слабой связи общая средняя мощность приблизительно равна сумме мощностей в несвязанных системах:

$$P = 2(\pm|a_1|^2 \pm |a_2|^2) \approx \text{const}, \quad \frac{dP}{dx} = 0. \quad (9.32)$$

Знаки “+” и “−” соответствуют волнам с положительной и отрицательной энергией.

В том случае, когда одна из волн — волна пространственного заряда в электронном потоке, а другая — электромагнитная волна в замедляющей системе, (9.32) как раз и есть математическое выражение теоремы Чу в теории электронных СВЧ-приборов с длительным взаимодействием в так называемом двухволновом приближении [25, 44]. В частности, для дрейфующего электронного пучка теорема Чу о кинетической мощности имеет вид $P = 2(|a_\delta|^2 - |a_m|^2) = \text{const}$.

Поскольку $|a|^2 = aa^*$, из второй формулы в (9.32) следует, что

$$\frac{dP}{dx} = \pm \left(a_1 \frac{da_1^*}{dx} + a_1^* \frac{da_1}{dx} \right) \pm \left(a_2 \frac{da_2^*}{dx} + a_2^* \frac{da_2}{dx} \right) = 0. \quad (9.33)$$

Подставляя (9.31) и комплексно-сопряженные им уравнения в (9.33) находим

$$(\pm c_{12}^* \pm c_{21}) a_1 a_2^* + (\pm c_{12} \pm c_{21}^*) a_1^* a_2 = 0. \quad (9.34)$$

Соотношения (9.34) справедливы для любых a_1 и a_2 , поэтому

$$c_{12} = \pm c_{12}^* \quad \text{при } P = \pm |a_1|^2 + |a_2|^2, \quad (9.35)$$

$$c_{12} = \mp c_{12}^* \quad \text{при } P = \pm |a_1|^2 - |a_2|^2, \quad (9.36)$$

$$(9.37)$$

Считая, что $a_1, a_2 \sim \exp[i(\omega t - kx)]$ и принимая во внимание формулы (9.35) и (9.36), из условия совместности уравнений (9.31) получаем следующие дисперсионные уравнения:

1. для одинаково направленных потоков мощности (одинаковые знаки перед $|a_1|^2$ и $|a_2|^2$ в первой из формул (9.32)):

$$(k - \omega/v_1)(k - \omega/v_2) = |c_{12}|^2. \quad (9.38)$$

2. для противоположно направленных потоков мощности (разные знаки перед $|a_1|^2$ и $|a_2|^2$):

$$(k - \omega/v_1)(k - \omega/v_2) = -|c_{12}|^2. \quad (9.39)$$

В системе без потерь возможны четыре варианта связи взаимодействующих волн (табл. 9.1, взятая из [101]). Дисперсионные характеристики несвязанных волн представлены штриховыми линиями, а сплошные линии соответствуют возможным вариантам связи.

Проиллюстрируем таблицу конкретными примерами из электроники СВЧ, основываясь на теории взаимодействия прямолинейного электронного потока с бегущей электромагнитной волной (см. гл. 7). Обратимся к уравнению возбуждения волноведущей системы током электронного пучка:

$$\frac{\partial E}{\partial x} + i \frac{\omega}{v_\phi} E = -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{v_\phi} \right)^2 K I \quad (9.40)$$

и к уравнению для тока, сгруппированного в пучке под действием поля волноведущей системы:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + 2i \frac{\omega}{v_0} \frac{\partial I}{\partial x} - \frac{\omega^2 - \omega_q^2}{v_0^2} I = i \frac{\omega}{v_0} \frac{I_0}{2V_0} E. \quad (9.41)$$

Если $I(0) = 0$ и $(\partial I / \partial x)_{x=0}$, то (9.41) можно переписать в виде

$$I(x) = \frac{I_0 k_e}{4V_0 k_q} \int_0^x E(\zeta) \exp[-i(k_e - k_q)(x - \zeta)] d\zeta - \frac{I_0 k_e}{4V_0 k_q} \int_0^x E(\zeta) \exp[-i(k_e + k_q)(x - \zeta)] d\zeta = I_m(x) + I_b(x), \quad (9.42)$$

Таб. 9.1

$\omega - k$ диаграмма	Свойства системы связанных волн	Примеры систем связанных волн
	k — действительная величина для всех ω и наоборот; неустойчивости нет	Связь двух волн с положительной энергией или двух волн с отрицательной энергией
	ω — действительная величина для всех k ; k — комплексная величина для действительных значений ω ; волны, затухающие в пространстве; неустойчивости нет	то же
	k — комплексная величина для действительных значений ω и наоборот; k имеет значение, соответствующее усилению, для действительных ω ; конвективная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией с волной с отрицательной энергией; групповые скорости волн имеют одно направление
	k — действительная величина для всех действительных ω ; ω — комплексная величина для действительных k ; абсолютная неустойчивость	Связь волны с положительной энергией с волной с отрицательной энергией; групповые скорости волн противоположны по направлению

где $k_e = \omega/v_0$, $k_q = \omega_q/v_0$, индексы “м” и “б” соответствуют интегралам, связанным с возбуждением медленной и быстрой волн пространственного заряда. Тогда вместо (9.41) или (9.42) можно написать два уравнения первого порядка:

$$\frac{\partial I_m}{\partial x} + i(k_e + k_q)I_m = -\frac{k_e I_0}{4V_0 k_q} E(x), \quad (9.43)$$

$$\frac{\partial I_b}{\partial x} + i(k_e - k_q)I_b = \frac{k_e I_0}{4V_0 k_q} E(x). \quad (9.44)$$

Условия для резонансного взаимодействия

$$k_e + k_q = k_0 = \omega/v_\phi \quad \text{или} \quad v_\phi = \frac{v_0}{1 + \omega_q/\omega} \quad (9.45)$$

соответствуют условиям синхронизма электромагнитной волны в замедляющей

системе и быстрой волны пространственного заряда в пучке, а условия

$$k_e - k_q = k_0 = \omega/v_\phi \quad \text{или} \quad v_\phi = \frac{v_0}{1 - \omega_q/\omega}, \quad (9.46)$$

соответствуют условиям синхронизма волны в замедляющей системе и медленной волны пространственного заряда. При выполнении условий (9.45) или (9.46) в системе уравнений (9.40), (9.43) и (9.44) можно вместо трех уравнений оставить только два. В этом случае возможны следующие взаимодействия (см. табл. 9.1) и соответствующие им приборы:

1. Взаимодействие быстрой волны пространственного заряда с прямой волной в волноведущей структуре (обе волны с положительной энергией); групповые скорости направлены в одну сторону; ЛБВ-подавитель; при определенных значениях постоянного тока пучка и ускоряющего напряжения для данной частоты имеет место полное подавление входного сигнала.
2. Взаимодействие быстрой волны пространственного заряда с обратной волной в волноведущей системе (обе волны с положительной энергией, но с противоположно направленными групповыми скоростями); ЛОВ-подавитель; полное подавление возможно лишь на бесконечной длине пространства взаимодействия.
3. Взаимодействие медленной волны пространственного заряда (волна с отрицательной энергией) с прямой волной в системе (волна с положительной энергией); групповые скорости направлены в одну сторону; ЛБВ-усилитель.
4. Взаимодействие медленной волны пространственного заряда с обратной волной в системе; групповые скорости противоположны; ЛОВ-генератор.

Рассмотрим в качестве примера случай 1, которому соответствует система уравнений

$$\frac{\partial E}{\partial x} + ik_0 E = -\frac{1}{2}k_0^2 K I_\phi, \quad \frac{\partial I_\phi}{\partial x} + i(k_e - k_q)I_\phi = \frac{k_e I_0}{4V_0 k_q} E$$

с дисперсионным уравнением

$$(k - k_0)(k - k_e + k_q) = (k_q C)^3 / (2k_q), \quad (9.47)$$

Из условия точного синхронизма волн ($k_0 = k_e - k_q$), находим

$$k_{1,2} = k_0 \pm k_e C / [2(QC)^{1/4}], \quad \text{где} \quad 2(QC)^{1/2} = k_q / (k_e C). \quad (9.48)$$

Начальные условия $E(0) = E_{ex}$, $I_\phi(0) = 0$ с учетом того, что $I_\phi \sim E / (k - k_e + k_q)$ (см. (9.44)) и $E(x) = \sum_{m=1}^2 E_m(0) \exp(-ik_m x)$, можно записать так:

$$E_1(0) + E_2(0) = E_{ex}, \quad \frac{E_1(0)}{k_1 - k_0} + \frac{E_2(0)}{k_2 - k_0} = 0. \quad (9.49)$$

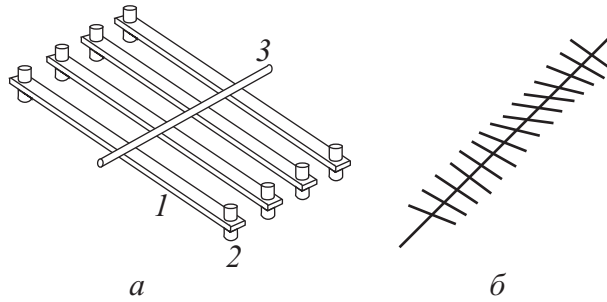


Рис. 9.4. Линия передачи, состоящая из набора тяжелых поперечных пластин 1 с небольшими стержневыми магнитами 2, прикрепленными к проволоке 3 [102] (а) и схема распространения круговой волны вдоль линии передачи [2] (б).

Отсюда с учетом (9.48) получаем

$$E(x) = E_{\text{вх}} e^{-i(k_e - k_q)x} \cos \frac{k_e C x}{2(QC)^{1/4}},$$

т. е. имеет место периодический обмен энергией между взаимодействующими волнами, и условие полного подавления входного сигнала есть $CN_{\text{нод}} = (2n + 1)(QC)^{1/4}/2$. Если ввести $a_1 = E/(k_0\sqrt{2K})$ и $a_2 = I_0/\sqrt{2Y_n}$, где $Y_n = I_0 k_e/(2V_0 k_q)$ — волновая проводимость пучка, то в (9.38) $|\epsilon_{12}|^2 = k_e^2 C^2/[4(QC)^{1/2}]$, и поскольку $\omega/v_1 = \omega/v_2 = k_0 = k_e - k_q$, то уравнения (9.47) и (9.38) совпадают [25]. Заметим, что рассмотренные выше двухволновые взаимодействия соответствуют в СВЧ-электронике так называемому случаю больших пространственных зарядов ($4QC \approx 1$), когда волна в линии передачи не может одновременно быть близка по скорости к обеим волнам пространственного заряда. Отметим также, что в рамках используемых приближений найденные условия полного подавления входного сигнала в ЛБВ совпадают с условиями возникновения колебаний в ЛОВ (случай 4).

Задача 9.1. Используя уравнение (9.44) и уравнение возбуждения обратной волны в волноведущей системе

$$\frac{\partial E}{\partial x} + ik_0 E = \frac{1}{2} k_0^2 K I_0$$

постройте теорию ЛОВ-подавителя (случай 2) с начальными условиями $E = E(0)$, $I_0 = 0$ при $x = 0$ ($E(0)$ — неизвестное значение поля на выходе устройства).

Задача 9.2. Используя уравнения (9.43) и (9.40) постройте теорию ЛБВ-усилителя (случай 3) с начальными условиями $E = E^0$, $I_m = 0$ при $x = 0$.

Красивый эксперимент, демонстрирующий нарастающие колебания в двух связанных волновых системах, был поставлен К. Катлером [102], который сконструировал механический генератор с бегущей волной. Передающая линия была

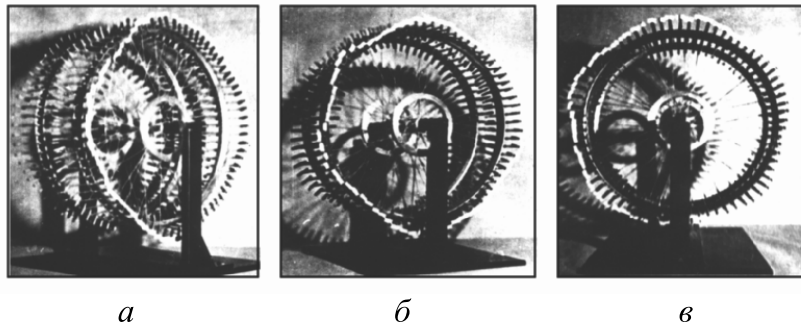


Рис. 9.5. Фотографии, демонстрирующие работу механического генератора бегущей волны [102]: скорости колес таковы, что на ободе укладывается четыре длины волн (а), пять длина волн (б) и шесть, семь длин волн (в).

сделана из набора поперечных тяжелых пластин, расположенных вдоль стальной проволоки (рис. 9.4). Когда одна из пластин повернута на небольшой угол, а потом отпущена, из-за скручивания проволоки вдоль линии распространяется медленная крутильная волна (ее скорость определяется сопротивлением проволоки к скручиванию и вращательной инерцией тяжелых поперечных пластин). Для того, чтобы волновые системы могли двигаться относительно друг друга (их было две), каждая передающая линия была натянута на обод велосипедного колеса и замкнута в кольцо (колеса могли вращаться на общей оси независимо одно от другого). На концах поперечных пластин были укреплены маленькие цилиндрические магниты (рис. 9.4, а). Они намагничивались так, чтобы вызвать притяжение между поперечными пластинами линий. Взаимодействие волн в системе лучше всего видно, когда колеса вращаются в разные стороны. Сначала они вращаются независимо, но при определенном значении скорости небольшое случайное возмущение приводит к возникновению колебаний и их нарастанию. Сначала по ободу укладывается две волны; при замедлении вращения эти колебания исчезают, но одновременно возникают колебания, имеющие на длине окружности обода три волны; характер колебаний меняется непрерывно с частотой (рис. 9.5). В эксперименте Катлера взаимодействие прекращалось, когда по окружности колеса укладывалось семь волн.

До сих пор при рассмотрении примеров мы касались главным образом волн пространственного заряда и их резонансного взаимодействия с электромагнитными волнами в волноведущих структурах. Имеется и другой класс собственных волн в электронных потоках, движущихся в продольном фокусирующем магнитном поле и скрещенных электро- и магнитостатических полях — циклотронные

волн [25, 44]. Эти волны распространяются в электронном потоке в виде высокочастотных возмущений поперечной скорости потока с фазовыми скоростями

$$v_{\phi_{м,б}} = \frac{v_0}{1 \pm \omega_c/\omega}, \quad (9.50)$$

где $\omega_c = eB/m$ — циклотронная частота (B — индукция магнитного поля), v_0 — постоянная составляющая скорости продольного движения электронов, индексы “м” и “б” (знаки “+” “-” в (9.50)) соответствуют медленной и быстрой циклотронным волнам электронного потока. Циклотронные волны поляризованы в плоскости, перпендикулярной направлению постоянного магнитного поля; быстрая циклотронная волна — волна с положительной энергией, медленная циклотронная волна — волна с отрицательной энергией [25, 44]. При синхронном взаимодействии волны в линии передачи с одной из циклотронных волн в пучке в СВЧ-приборах реализуется так называемый режим циклотронного резонанса [25].

Как мы видели на примере волн в линиях передачи и электронных потоках, энергообмен определяется свойствами взаимодействующих волн. Можно ли предугадать результат взаимодействия и выяснить характер энергообмена, скажем, не определяя знака энергии волн? Оказывается, что можно, если привлечь представления теории излучения при сверхсветовом движении в среде [103–105]¹.

Если излучатель (заряженная частица, электрический диполь и т.п.) движется в среде с показателем преломления n , то вследствие эффекта Доплера в системе координат, связанной с неподвижной средой, излучение имеет частоту (см. [103, 104])

$$\omega(\theta) = \frac{\omega_0}{1 - \beta n \cos \theta}, \quad (9.51)$$

где ω_0 — частота излучения в системе координат, в которой излучатель покоится; $\beta = v_0/c$ (v_0 — скорость излучателя, c — скорость света), θ — угол между скоростью и направлением наблюдения. При $\beta n < 1$ эффект Доплера называют нормальным, а при $\beta n > 1$ — аномальным [105] (эффект Доплера в преломляющей среде детально обсуждается в статье [106]). Особенно важным является то обстоятельство, что характер аномального эффекта Доплера не меняется и тогда, когда поле заключено в узких каналах или щелях в среде или сосредоточено вблизи границ [103–105]. Излучение, связанное с нормальным эффектом Доплера, приводит к затуханию поля, а с аномальным — к его усилению. В случае взаимодействия замедленной электромагнитной волны ($v_{\phi} = c/n$) с прямолинейно движущимся со скоростью v_0 потоком электронов-осцилляторов, которые

¹Применительно к режимам циклотронного резонанса в СВЧ-приборах со скрещенными полями эти вопросы обсуждены в [25, с.486-489], более широкий круг вопросов этого плана рассмотрен в [93, с.489-494] и [94].

колеблются с редуцированной плазменной частотой ω_0 , формула (9.51) принимает вид

$$\omega(\theta)|_{\theta=0} = \omega(0) = \omega = \frac{\omega_q}{|1 - v_0/v_\phi|}. \quad (9.52)$$

При $\beta n < 1$ (нормальный эффект Доплера, $v_0 < v_\phi$ из (9.52) имеем $\omega = \omega_q/(1 - v_0/v_\phi)$ или $v_\phi = v_0/(1 - \omega_q/\omega)$, что совпадает с условием (9.46) синхронизма волны в волноведущей системе с быстрой волной пространственного заряда. Имеет место затухание колебаний, что на языке электроники означает: электроны при выполнении условий синхронизма (9.46) группируются в ускоряющей фазе высокочастотного поля и забирают энергию у волны.

При $\beta n > 1$ ($v_0 > v_\phi$ имеем $v_\phi = v_0/(1 + \omega_q/\omega)$, что совпадает с (9.45) и соответствует синхронизму волны в линии передачи с медленной волной пространственного заряда. В этом случае электроны группируются в тормозящей фазе поля (излучение, связанное с аномальным эффектом Доплера, раскачивает колебания) и при выполнении (9.45) можно ожидать усиления или генерирования колебаний. Таким образом, существует физическая аналогия между индуцированным нормальным эффектом Доплера и синхронным взаимодействием электромагнитной волны и волны с отрицательной энергией (медленная волна). Следует подчеркнуть, что применительно к СВЧ-приборам аналогия справедлива лишь в двухволновом приближении (условия (9.45) или (9.46) — приближения больших пространственных зарядов; условие (9.50) — режимы циклотронного резонанса), когда электромагнитная волна взаимодействует с электронами-осцилляторами, собственная частота которых равна ω_q или ω_c (причем осцилляторные свойства проявляются при наличии высокочастотного поля). В синхронных режимах, типичных для электронных СВЧ-приборов с длительным взаимодействием, когда $v_0 \approx v_\phi$ “работают” обе электронные волны и имеет место так называемое индуцированное черенковское излучение.

Лекция 10

Волны в неоднородных средах

Приближение геометрической оптики. Уравнения эйконала и переноса энергии. Связь с ВКБ-приближением. Оптико-механическая аналогия. Образование каустик и рефракция. Распространение звука в атмосфере при наличии градиента температуры. Тропосферная рефракция радиоволн. Градиентный диэлектрический волновод. Условие поперечного резонанса. Электромагнитные волны в слоистой неоднородной среде. Поведение поля вблизи каустики. Функция Эйри. Взаимодействие линейных волн в неоднородных средах. Отражение от переходного слоя. Взаимодействие винтовых волн в скрученном волоконном световоде.

10.1 Приближение геометрической оптики

Довольно редко можно считать выполненными условие, что волны распространяются в однородной безграничной среде. В большинстве случаев свойства среды меняются в пространстве и это приводит к существенному изменению характера распространения волн. С математической точки зрения волны в неоднородных средах описываются уравнениями в частных производных с переменными коэффициентами, точное решение которых можно получить лишь в ограниченном числе случаев. С другой стороны, очень часто в конкретной задаче оказывается, что параметры среды меняются мало на расстояниях порядка длины волны, это позволяет применить чрезвычайно мощный метод приближенного решения волнового уравнения, называемый методом *геометрической оптики*.

Метод геометрической оптики отличается большой физической наглядностью и позволяет получать количественные результаты для описания волн самой разной физической природы: электромагнитных волн, упругих и акустических волн, волн в неоднородной плазме, квантовой механики, а также многих других систем. Прочитав введение одной из лучших на русском языке книг для физиков по геометрической оптике [107]: “Число прикладных исследований, опирающихся на метод геометрической оптики, огромно. Даже их краткий обзор занял бы слишком много места. Особенно широко этот метод применяется в оптике и радиофизике, в физике плазмы, в теории распространения радиоволн через атмосферу

Земли, солнечную корону и космическое пространство, а также в радиолокации, радионавигации и дистанционной диагностике. Круг приложений метода на самом деле еще шире, если учесть наличие “двойников” геометрической оптики в акустике (геометрическая акустика), в сейсмологии (геометрическая сейсмика) в квантовой механике (метод ВКБ или квазиклассическое приближение), в гидродинамике и др.”

Мы кратко остановимся на основах метода геометрической оптики в наиболее простом случае, когда рассматривается распространение волны с заданной частотой в неоднородной среде, для которой можно пренебречь пространственной дисперсией.

Рассмотрим, например, акустические волны, описываемые в линейном случае волновым уравнением (4.10) для потенциала скоростей $\varphi(\mathbf{r}, t)$, которое остается справедливым и для случая неоднородной среды, только теперь скорость звука $c(\mathbf{r})$ является функцией пространственных координат. Если частота волны задана, то, подставляя в (4.10) потенциал в виде $\varphi(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[u(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$, получим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(\mathbf{r}) + k^2 n^2(\mathbf{r})u(\mathbf{r}) = 0, \quad (10.1)$$

где $k = \omega/c_0$, $n(\mathbf{r}) = c_0/c(\mathbf{r})$, c_0 — некоторая характерная для данной среды скорость. Величина $n(\mathbf{r})$ аналогична показателю преломления для электромагнитных волн в диэлектрике, поэтому так и будем называть ее в дальнейшем.

В качестве второго примера рассмотрим нерелятивистское стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в потенциальном поле $U(\mathbf{r})$ [108]:

$$\Delta \Psi + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(\mathbf{r})] \Psi = 0, \quad (10.2)$$

где m — масса частицы, \hbar — постоянная Планка, E — энергия частицы. Положив $k^2 = 2mE/\hbar^2$ и $n^2(\mathbf{r}) = 1 - U(\mathbf{r})/E$, снова приходим к уравнению (10.1).

Распространение электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\mathbf{r})$ описывается уравнениями Максвелла, которые для процессов с заданной частотой ω и в отсутствие источников имеют вид [51]

$$\text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \quad (10.3a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = -ik\epsilon\mathbf{E}, \quad (10.3b)$$

$$\text{div } \epsilon\mathbf{E} = 0, \quad (10.3c)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (10.3d)$$

где $k = \omega/c$, c — скорость света в вакууме. Выразим \mathbf{H} из уравнения (10.3a), подставим в (10.3b), и используем векторное тождество $\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} -$

$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E}$. В результате этих преобразований получаем уравнение

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} + k^2 \varepsilon \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E}.$$

Представим $\text{div } \mathbf{E}$ в виде

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div} \left(\frac{1}{\varepsilon} \varepsilon \mathbf{E} \right) = \varepsilon \mathbf{E} \cdot \text{grad} \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \text{div } \varepsilon \mathbf{E} = -\mathbf{E} \cdot \text{grad} \ln \varepsilon.$$

Вводя показатель преломления $n^2(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})$, приходим к уравнению

$$\vec{\nabla}^2 \mathbf{E} + k^2 n^2 \mathbf{E} = -\text{grad} [\mathbf{E} \cdot \text{grad}(\ln n^2)]. \quad (10.4)$$

Если L — характерный масштаб изменения показателя преломления, а поле \mathbf{E} имеет вид квазиплоской волны с волновым числом nk , то порядок слагаемого в правой части (10.4) оценивается как $k|E|/L$, и оно в $kL \gg 1$ раз меньше, чем каждое из слагаемых слева. Кроме того, в декартовой системе координат векторный оператор $\vec{\nabla}^2$ совпадает со скалярным оператором ∇^2 , поэтому, пренебрегая членом в правой части уравнения (10.4), можно записать

$$\nabla^2 E + k^2 n^2 E = 0. \quad (10.5)$$

Здесь E — любая из декартовых компонент вектора электрического поля. Мы приходим к выводу, что в условиях плавно неоднородной среды и высоких частот распространение электромагнитных волн можно описывать скалярным уравнением точно такого же вида, что и уравнение акустики (10.1). В таком приближении связь между компонентами поля отсутствует, следовательно при этом не учитываются поляризационные эффекты¹.

Приближение геометрической оптики, или коротковолновая асимптотика для уравнения (10.1) справедливо, если выполняется условие $kL \gg 1$. Физически это значит, что свойства среды мало меняются на расстояниях порядка длины волны, так что можно считать, что в небольшой окрестности каждой точки возмущение приблизительно можно считать плоской волной, которая распространяется почти также, как в однородной среде. В частности, локальная скорость распространения волны равна $c(\mathbf{r})$ и направление вектора переноса энергии нормально поверхности постоянной фазы².

¹Более строгое рассмотрение позволяет в рамках геометрической оптики учесть и вращение плоскости поляризации [107].

²Напомним, что рассматривается случай изотропной среды. Для электромагнитных волн в анизотропной среде последнее утверждение не выполняется.

Решение уравнения (10.1) будем искать в виде разложения по обратным степеням волнового числа k . Представим функцию $u(\mathbf{r})$ в виде

$$u(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m(\mathbf{r})}{(-ik)^m} e^{-ik\psi(\mathbf{r})}, \quad (10.6)$$

где A_m и ψ — действительные функции. Такой вид разложения был впервые предложен П.Дебаем, поэтому формула (10.6) также часто называется *дебаевским разложением*. Функция $\psi(\mathbf{r})$ называется *эйконалом*, она с точностью до множителя k совпадает с фазой волны в нулевом приближении геометрической оптики. Большой множитель k в показателе экспоненты отвечает тому, что фаза волны быстро меняется в пространстве.

Подставив разложение (10.6) в уравнение (10.1) и приравняв суммы слагаемых при последовательно уменьшающихся степенях k нулю, получим следующую цепочку уравнений:

$$k^2 : \quad (\nabla\psi)^2 = n^2, \quad (10.7)$$

$$k^1 : \quad A_0 \nabla^2 \psi + 2\nabla\psi \nabla A_0 = 0, \quad (10.8)$$

$$k^0 : \quad 2\nabla\psi \nabla A_1 + A_1 \nabla^2 \psi + \nabla^2 A_0 = 0, \quad (10.9)$$

.....

Уравнение (10.7) называется уравнением эйконала, а уравнение (10.8) — уравнением переноса, и они являются основными уравнениями геометрической оптики. Обычно при решении конкретных задач ограничиваются только этими двумя уравнениями.

Прежде чем исследовать общий случай, рассмотрим одномерную систему, в которой показатель преломления зависит только от одной координаты, например z , и распространение волны происходит также вдоль оси z . Тогда уравнения (10.7)–(10.8) принимают вид

$$\left(\frac{d\psi}{dz}\right)^2 = n^2, \\ 2\frac{A_0}{dz} \frac{d\psi}{dz} + A_0 \frac{d^2\psi}{dz^2} = 0.$$

Из первого уравнения получаем

$$\psi(z) = \psi(z_0) \pm \int_{z_0}^z n(z') dz',$$

а второе позволяет записать

$$\frac{1}{A_0} \frac{dA_0}{dz} = -\frac{d^2\psi/dz^2}{2d\psi/dz} = -\frac{1}{2n} \frac{dn}{dz} = -\frac{d}{dz} \ln \sqrt{n(z)}.$$

Отсюда $A_0 = \text{const}/\sqrt{n(z)}$. Следовательно, в таком приближении решение равно

$$u(z) = \frac{C_{\pm}}{\sqrt{n(z)}} \exp \left[\mp ik \int_{z_0}^z n(z') dz' \right], \quad (10.10)$$

где два знака соответствуют волнам, бегущим в противоположных направлениях оси z .

В одномерном случае исходное уравнение (10.1) имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} + k^2 n^2(z)u = 0. \quad (10.11)$$

Формально это уравнение совпадает с уравнением (7.7) из книги [1] для гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой, если сделать в нем замену $t \rightarrow z$ и $\omega(t) \rightarrow kn(z)$. Сделав эти же замены в ВКБ-решении (7.65) из этой книги, мы получим формулу (10.10). Таким образом оказывается, что метод геометрической оптики и ВКБ-приближение — это одно и то же. По традиции первый термин чаще используют в задачах теории волн, в то время, как термин ВКБ-, или квазиклассическое приближение принят в задачах квантовой механики³.

Следует заметить, что к уравнению типа (10.11) приводят многие задачи СВЧ электроники.

При анализе неустойчивости электронного потока, дрейфующего в скрещенных электростатическом и магнитостатическом полях, обычно используется модель, в которой электроны без высокочастотных возмущений при любой плотности потока движутся прямолинейно с поперечным градиентом скорости $dv_e/dy = \omega_p^2/\omega_c = \omega_c r^2$, ω_p и ω_c — плазменная и циклотронная частоты.

Для анализа высокочастотных волновых процессов в такой модели предполагается, что все переменные изменяются во времени и в направлении распространения волны (вдоль координаты x) по закону $\exp[i(\omega t - kx)]$. Тогда для зависимой переменной F , связанной с y -компонентой скорости формулой $F(y) = (v_y/v_e(y))\sqrt{1 - s^2(y)}$, уравнение имеет вид $d^2F/ds^2 -$

³Второе название объясняется тем, что в условиях, когда длина волны де-Бройля значительно меньше, чем характерный масштаб изменения потенциала, закон движения квантовой частицы близок к законам классической механики.

$r^4 Q(s)F = 0$, где $Q(s) = 1 + 2r^2/(s^2 - 1) + 3r^4/(s^2 - 1)^2$, $s = -(\omega - kv_e(y))/\omega_c$ — аналог безразмерной координаты. Решение этой задачи и нахождение поправок к приближению ВКБ обсуждаются, например, в [109, 110].

В СВЧ электронике решения (10.10) используются также в теории распространения волн пространственного заряда в ускоренном электронном потоке [111] и в двухволновой теории лампы обратной волны с медленно изменяющейся вдоль направления движения электронов фазовой скоростью электромагнитной волны [112]. (взаимодействуют только медленная волна пространственного заряда и “синхронная” обратная пространственная гармоника замедляющей системы).

Вернемся к общему случаю трехмерной неоднородной среды и рассмотрим более подробно уравнение эйконала. Введем векторное поле $\mathbf{p}(\mathbf{r})$ с помощью формулы

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \nabla\psi. \quad (10.12)$$

В каждой точке пространства вектор \mathbf{p} перпендикулярен поверхности постоянного значения эйконала (а значит и поверхности постоянной фазы), а его длина $p = |\mathbf{p}|$, согласно уравнению (10.7), равна $p = n(\mathbf{r})$. Предположим сначала, что функция $\psi(\mathbf{r})$ известна, тогда известно и векторное поле $\mathbf{p}(\mathbf{r})$ во всем пространстве. Выберем произвольную точку \mathbf{r}_0 и проведем через нее кривую, касательную в каждой точке к направлению вектора \mathbf{p} . Такая кривая называется *лучом*. Как следует из определения, луч в каждой точке перпендикулярен поверхности постоянной фазы. Понятие луча является центральным в геометрической оптике. Если построить семейство лучей, покрывающее некоторую область пространства, то можно получить решение уравнения эйконала. Покажем, как это сделать.

Прежде всего, получим дифференциальные уравнения для функции $\mathbf{r}(s)$, задающей луч в параметрической форме. Здесь s — длина вдоль луча от фиксированной точки \mathbf{r}_0 до точки наблюдения \mathbf{r} . Касательный к лучу единичный вектор \mathbf{l} согласно дифференциальной геометрии равен $d\mathbf{r}/ds$, и он по определению направлен вдоль вектора \mathbf{p} . Поэтому можно записать

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{\mathbf{p}}{p} = \mathbf{l}. \quad (10.13)$$

Рассмотрим функцию $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = [\mathbf{p}^2 - n^2(\mathbf{r})]/2$. В соответствии с уравнением (10.12), она принимает одно и тоже нулевое значение во всех точках пространства, поэтому ее дифференциал равен нулю: $dH = 0$. Представим это соотношение в виде

$$\mathbf{p} \cdot d\mathbf{p} - \frac{1}{2} \nabla n^2 \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

и поделим его на ds ; кроме того, используем уравнение (10.13). В результате получаем

$$\mathbf{p} \cdot \left[\frac{d\mathbf{p}}{ds} - \frac{1}{2p} \nabla n^2 \right] = 0,$$

Это уравнение будет выполняться, если положить

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{1}{2p} \nabla n^2. \quad (10.14)$$

Учитывая, что $p = n$, и $\mathbf{p} = p\mathbf{l}$, приходим к дифференциальным уравнениям для луча:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{l}, \quad (10.15a)$$

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \frac{\nabla n}{n} - \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \mathbf{l} \right) \mathbf{l}. \quad (10.15b)$$

Для интегрирования уравнений (10.15) необходимо определить начальные условия. Предположим, что известна гладкая поверхность постоянной фазы волнового поля, на которой значение эйконала равно ψ_0 . В этом случае для любой точки, принадлежащей поверхности, известно направление нормального к ней вектора \mathbf{l}_0 . Для луча, проходящего через эту точку, начальные условия выглядят следующим образом: $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{l}(0) = \pm \mathbf{l}_0$. Разный выбор знаков соответствует двум волнам, распространяющимся через точку \mathbf{r}_0 в противоположные стороны. В более общем случае в пространстве задана произвольная поверхность (не обязательно с постоянной фазой), вдоль которой определена функция эйконала. Тогда вектор $\nabla\psi$ не будет перпендикулярным поверхности и для восстановления начальных условий необходимы дополнительные соображения. Мы не будем останавливаться на этом подробно, соответствующие формулы можно найти, например, в [107].

После того, как форма луча найдена путем интегрирования уравнений (10.15), можно найти закон изменения эйконала вдоль луча. Для этого вычислим производную $d\psi/ds$:

$$\frac{d\psi}{ds} = \nabla\psi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{l} = n(\mathbf{r}).$$

Отсюда получаем

$$\psi = \psi_0 + \int_0^s n(\mathbf{r}) ds. \quad (10.16)$$

Уравнениям для лучевой траектории можно придать другую форму, которая делает их физически наглядными и допускающими простую механическую интерпретацию. Вместо параметра s введем параметр τ с помощью соотношения

$ds = p d\tau$. Тогда уравнения (10.13) и (10.14) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{p}, \quad (10.17a)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \nabla n^2. \quad (10.17b)$$

Их можно трактовать как уравнения движения частицы единичной массы в потенциальном поле $U(\mathbf{r}) = -n^2(\mathbf{r})/2$. Тогда введенная функция $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = p^2/2 + U(\mathbf{r})$ является функцией Гамильтона механической системы, а уравнения (10.17) сразу получаются как соответствующие уравнения Гамильтона [113]

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}. \quad (10.18)$$

Параметр τ выступает как время движения частицы по траектории, так как масса частицы равна единице и справедлива формула $\tau = \int_0^{\mathbf{r}} p^{-1} d\tau$. Лучи совпадают с траекториями частиц, а для эйконала вдоль траектории выполняется соотношение

$$\psi(\tau) = \psi_0 + \int_0^{\tau} n^2(\mathbf{r}) d\tau. \quad (10.19)$$

Подобная оптико-механическая аналогия дважды сыграла огромную роль в развитии физики. Сначала она была использована У.Гамильтоном для вывода уравнений механики в гамильтоновской формулировке, а затем Шредингер применил эту же аналогию для получения кванто-механического уравнения, носящего теперь его имя.

Уравнения лучей в форме (10.15) или (10.17) решают либо аналитически, что возможно лишь в небольшом числе случаев, либо численно, что при современном уровне развития численных методов не представляет особых трудностей.

Обратимся теперь к уравнению переноса (10.8), определяющему закон изменения амплитуды волны в пространстве. Используя соотношение (10.12), запишем его в виде $A_0 \operatorname{div} \mathbf{p} + 2\mathbf{p} \operatorname{grad} A_0 = 0$, или

$$\operatorname{div}(\mathbf{p}A_0^2) = 0. \quad (10.20)$$

Вектор $\mathbf{I} = \mathbf{p}A_0^2$ в нулевом приближении геометрической оптики пропорционален вектору потока плотности энергии волны. Покажем это на примере акустических волн. Плотность потока звуковой энергии равна $\mathbf{q} = P'\mathbf{v}$ [27], где P' — возмущение давления, \mathbf{v} — скорость среды. Используя соотношения из лекции 4 $P' = -\rho_0\dot{\varphi}$ и $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, получаем $\mathbf{q} = -\rho_0\dot{\varphi}\nabla\varphi$. Принимая во внимание

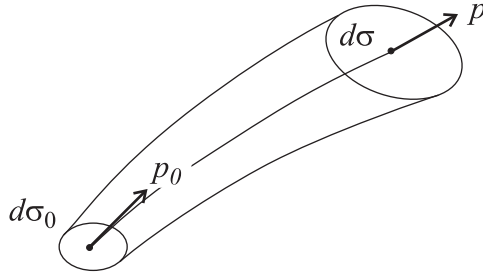


Рис. 10.1. Лучевая трубка

гармоническую зависимость всех переменных от времени, переходя от потенциала скоростей φ к его комплексной амплитуде u и усредняя выражение для \mathbf{q} по периоду колебаний, получаем

$$\mathbf{q} = -\frac{i\omega\rho_0}{4} (u\nabla u^* - u^*\nabla u). \quad (10.21)$$

В нулевом приближении $u = A_0 \exp(-ik\psi)$. При дифференцировании этого выражения амплитудный множитель A_0 следует рассматривать как постоянную величину, иначе будет получено превышение точности, так как слагаемое, пропорциональное ∇A_0 , имеет тот же порядок, что и слагаемое в дебаевском разложении, пропорциональное A_1 . Проводя вычисления с учетом этого правила, приходим к следующей формуле для потока мощности акустической волны:

$$\mathbf{q} = \frac{\omega k \rho_0}{2} \nabla \psi A_0^2 = \frac{\omega k \rho_0}{2} \mathbf{p} A_0^2.$$

Итак, уравнение переноса, записанное в форме (10.20), представляет собой закон сохранения потока энергии.

Рассмотрим все лучи, проходящие через маленькую площадку $d\sigma_0$, перпендикулярную некоторой лучевой траектории (рис. 10.1). Такая совокупность лучей называется лучевой трубкой. Проинтегрируем уравнение (10.20) по объему лучевой трубки. Используя теорему Гаусса, записываем

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{I} dV = \oint_S \mathbf{I} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Интеграл по боковым поверхностям трубки обращается в нуль, а интеграл по ее основаниям дает

$$I_0 d\sigma_0 = I d\sigma. \quad (10.22)$$

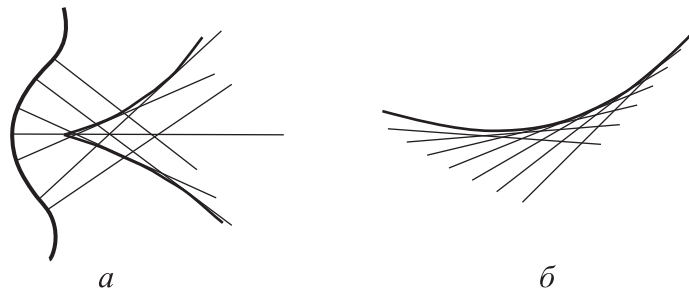


Рис. 10.2. Образование каустики в однородной среде вблизи вогнутого участка волнового фронта (а) и поведение лучей вблизи каустики (б).

Так как $I = pA_0^2 = nA_0^2$, отсюда получаем формулу для амплитуды $A_0(\mathbf{r})$:

$$A_0(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}_0) \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})} \frac{d\sigma_0}{d\sigma}}, \quad (10.23)$$

где $A_0(\mathbf{r}_0)$ — значение амплитуды, заданное на исходной поверхности. Таким образом, интегрирование уравнений (10.15) или (10.17) позволяет построить семейство лучей, а использование формул (10.16) и (10.23) — найти распределение амплитуды и фазы поля вдоль каждого луча.

10.2 Образование каустик и рефракция

Картина распространения возмущений вдоль лучей, задаваемая геометрической оптикой, оказывается существенно более богатой, чем это кажется на первый взгляд, благодаря образованию *каустик*, являющихся огибающими семейств лучевых траекторий.

Существует две причины появления каустик. Первая имеет чисто геометрическую природу. Предположим, что начальный волновой фронт имеет вогнутый участок, как это показано на рис. 10.2,а, а среда однородная. Тогда лучи являются отрезками прямых и непосредственное построение показывает, что вблизи вогнутого участка волнового фронта образуется область, через каждую точку которой проходят три луча. Граница области является огибающей семейства лучей — это и есть каустика. На рис. 10.2,б в увеличенном масштабе показан участок каустики и поведение лучей вблизи него. Из рисунка видно, что в точке касания сечение лучевой трубки обращается в нуль и в соответствии с формулой (10.23) это означает, что на каустике амплитуда поля стремится к бесконечности.

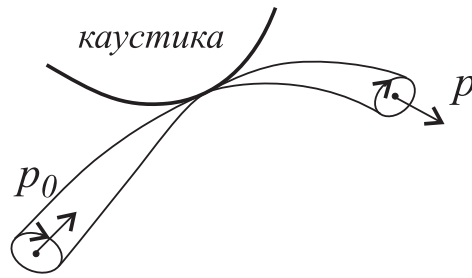


Рис. 10.3. Изменение ориентации сечения лучевой трубки при касании каустики

На самом деле в точном решении уравнения (10.1) бесконечности появиться не может. Противоречие объясняется тем, что вблизи каустики нарушается условие применимости геометрической оптики, и в этой области необходимо учитывать дифракционные явления, описывающие просачивание поля за каустикой [107, 114]

Хотя вблизи каустики решение в форме $u = A_0 \exp(-ik\psi)$ оказывается неприменимым, после ее прохождения им снова можно пользоваться. При этом, однако, следует учитывать так называемое “правило сдвига фазы”, состоящее в том, что после касания каустики поле вдоль луча приобретает дополнительный сдвиг фазы, равный $-\pi/2$. Полное выражение для поля с учетом этого правила имеет вид

$$u(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}_0) \sqrt{\frac{n(\mathbf{r}_0)}{n(\mathbf{r})} \left| \frac{d\sigma_0}{d\sigma} \right|} \exp(-ik\psi - i\pi m/2), \quad (10.24)$$

где m — число касания каустик при прохождении луча от точки \mathbf{r}_0 до точки наблюдения \mathbf{r} . Происхождение фазового сдвига связано с эффектами дифракции и его величина может быть найдена при анализе точного решения волнового уравнения вблизи каустики. Для случая слоисто-неоднородной среды это будет сделано в параграфе 10.4. Качественно происхождение фазового множителя можно понять, обратившись к рис. 10.3. Из него видно, что после касания каустики элемент $d\sigma$ сечения лучевой трубки меняет ориентацию, поэтому вместо соотношения (10.22) формально следует записать $I_0 d\sigma_0 = -I d\sigma$. При извлечении корня из этого соотношения в формуле (10.23) появляется дополнительный множитель $\exp(-i\pi/2)$ перед амплитудой.

Если среда неоднородная, каустика может появиться и в случае плоского или выпуклого начального фронта волны. Рассмотрим в качестве важного примера слоисто-неоднородную среду, в которой показатель преломления зависит только

от одной из координат, например от z , т.е. положим $n = n(z)$. Лучи в этом случае целиком лежат в одной плоскости, которую выберем в качестве плоскости xz . Форму лучей получим, используя второе из уравнений (10.17). Расписанное по координатам, оно приводит к соотношениям

$$\frac{dp_x}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = n(z)n'(z). \quad (10.25)$$

Интегрируя первое уравнение, имеем

$$p_x = n(z) \cos \theta(z) = n(0) \cos \theta_0 = \text{const}, \quad (10.26)$$

где $n(z)$ и $\theta(z)$ — значение показателя преломления и угол наклона луча к оси x в точке с вертикальной координатой z . Уравнение (10.26) является обобщением закона Снеллиуса для слоисто-неоднородной среды. При своем распространении, луч поворачивается таким образом, чтобы величина $n(z) \cos \theta(z)$ оставалась постоянной.

Вместо интегрирования второго уравнения в (10.25), воспользуемся соотношением $p_x^2 + p_z^2 = n^2(z)$, тогда $p_z(z) = \pm \sqrt{n^2(z) - n^2(0) \cos^2 \theta_0}$. Знак плюс соответствует восходящему, а знак минус — нисходящему участку луча. Используя эти выражения в первом уравнении системы (10.17), расписанном по координатам, получаем

$$\frac{dx}{d\tau} = n(0) \cos \theta_0, \quad \frac{dz}{d\tau} = \pm \sqrt{n^2(z) - n^2(0) \cos^2 \theta_0}. \quad (10.27)$$

Легко видеть, что уравнения (10.25) и (10.27) идентичны уравнениям движения частицы единичной массы, брошенной под углом θ_0 к горизонту с начальной скоростью $n(0)$ в вертикально направленном потенциальном поле $U(z) = -n^2(z)/2$. Исходя из этой механической аналогии сразу можно утверждать, что если показатель преломления увеличивается с высотой, то луч изгибается вверх и, напротив, если показатель преломления уменьшается с высотой, луч изгибается вниз, как это показано на рис. 10.4. В любом случае луч поворачивается в сторону увеличения показателя преломления.

Предположим, что $n'(z) < 0$ для всех $z > 0$ и уравнение $n(z) = n(0) \cos \theta_0$ имеет действительный корень z_c . Тогда из формулы (10.26) следует, что в плоскости $z = z_c$ угол наклона луча равен нулю, то есть он параллелен оси x . После прохождения этой точки начинается нисходящий участок луча. Плоскость $z = z_c$, которой касаются все лучи, имеющие одинаковый наклон θ_0 в начальной плоскости, является каустикой (см. рис. 10.5,а). В неоднородной среде каустика может образоваться и в том случае, если начальный волновой фронт является выпуклым (рис. 10.5,б).

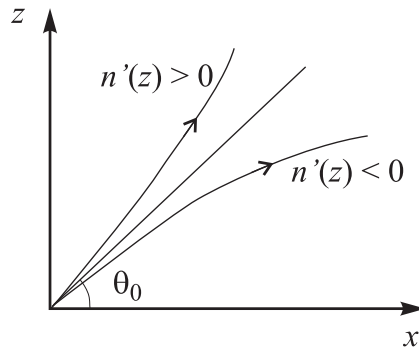


Рис. 10.4. Искривление луча в слоисто-неоднородной среде.

Искривление лучей из-за неоднородности среды носит название *рефракции*. Явление рефракции играет большую роль при распространении радиоволн, акустических волн в океане, волн в плазме и во многих других приложениях. Приведем несколько примеров.

Рассмотрим распространение звуковых волн в атмосфере при наличии градиента температуры [115]. Пусть температура воздуха меняется с высотой по закону $T(z)$. Тогда скорость звука $c(z)$ меняется в соответствии с формулой

$$c(z) = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma R T(z)},$$

где R — газовая постоянная, $\gamma = c_p/c_v$. Показатель преломления в зависимости от высоты равен $n(z) = c_0/c = \sqrt{T_0/T}$. По закону Снеллиуса

$$\cos \theta = \cos \theta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}}. \quad (10.28)$$

Если, как это обычно бывает при нормальных условиях, температура уменьшается с высотой, т.е. $T'(z) < 0$, угол наклона звукового луча к горизонтали увеличивается — он отклоняется вверх. Иногда может возникнуть противоположная ситуация, когда температура увеличивается с высотой. Такое наблюдается, например, вечером в тихую погоду над поверхностью реки. В этом случае звуковые лучи отклоняются вниз, обеспечивая усиление волны в горизонтальном направлении. Именно рефракцией объясняется тот факт, что вечером даже тихий разговор в лодке можно услышать на большом расстоянии.

В качестве второго примера упомянем *тропосферную рефракцию*, которая возникает при распространении ультракоротких волн в тропосфере Земли [116]. Тропосфера — это нижняя часть атмосферы Земли, она простирается до высот

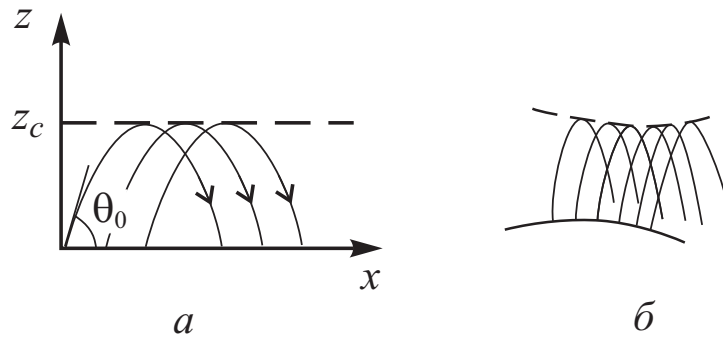


Рис. 10.5. Образование каустики в плоско-слоистой среде в случае плоского (а) и выпуклого (б) начального фронта волны.

10–12 километров и вмещает в себя примерно 80 % массы воздуха. Диэлектрическая проницаемость воздуха атмосферы очень близка к единице. Вблизи земной поверхности в среднем $n - 1 \approx 3,25 \cdot 10^{-4}$ и с увеличением высоты она постепенно уменьшается со средней скоростью $dn/dz \approx -4 \cdot 10^{-5} \text{ км}^{-1}$.

Несмотря на столь малые отклонения показателя преломления от единицы, рефракция в тропосфере оказывается заметной благодаря тому, что радиус кривизны радиолуча сравним с радиусом Земли. Рассмотрим участок луча, показанный на рис. 10.6. Радиус кривизны можно определить, используя формулу (10.15b). Прежде всего отметим, что вектор $d\mathbf{l}/ds$ перпендикулярен вектору \mathbf{l} , так как $\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = 1$. Из (10.15b) следует, что векторы $\nabla n/n$, \mathbf{l} и $d\mathbf{l}/ds$ принадлежат одной плоскости, также, как и вписанная в точке A в траекторию луча окружность, радиус которой равен R . При смещении точки наблюдения из A в B , параметр s увеличивается на $dS = R\alpha$, а конец вектора \mathbf{l} перемещается на

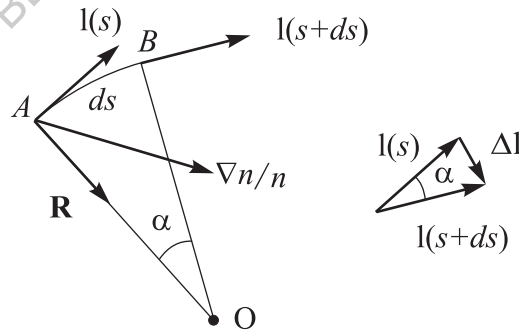


Рис. 10.6. К определению радиуса кривизны луча в неоднородной среде.

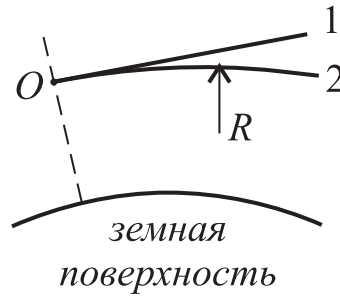


Рис. 10.7. Тропосферная рефракция радиоволн. O — источник, 1 — траектория луча в отсутствии рефракции, 2 — искривление луча за счет отрицательного градиента показателя преломления с высотой.

величину $\Delta l = |\mathbf{l}| \alpha = \alpha$. Поэтому $|d\mathbf{l}/\alpha| = R^{-1}$. Используя формулу векторного анализа $[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, уравнение (10.15b) можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{l}}{ds} = \left[\mathbf{l}, \left[\frac{\nabla n}{n}, \mathbf{l} \right] \right]. \quad (10.29)$$

Кривизна луча⁴ равна, таким образом, модулю правой части формулы (10.29). В случае плоско-слоистой среды следует подставить сюда $n = n(z)$, $\mathbf{l} = \cos \theta \mathbf{x}^0 + \sin \theta \mathbf{z}^0$, \mathbf{x}^0 и \mathbf{z}^0 — единичные орты вдоль осей координат. Вычисляя правую часть (10.29), получаем

$$R = \left| \frac{n(z)}{n'(z) \cos \theta} \right|, \quad (10.30)$$

причем центр вписанной окружности лежит с той стороны луча, куда направлен вектор ∇n . Используя приведенные выше данные о градиенте показателя преломления атмосферы, можно найти, что радиус кривизны луча, испущенного в горизонтальном направлении ($\theta = 0$) равен $R \sim 25000$ км, что всего в 4 раза превышает радиус Земли. В отсутствии рефракции радиоволна распространялась бы по прямой, так что его высота над поверхностью Земли все время бы увеличивалась, как это показано на рис. 10.7. В нормальных условиях рефракция приводит к тому, что луч частично изгибается в сторону Земли, что приводит к увеличению расстояния прямой видимости.

В принципе, при определенном состоянии атмосферы можно наблюдать столь большой градиент показателя преломления, при котором луч на горизонтальном участке будет иметь радиус кривизны меньший, чем радиус Земли. В этом случае

⁴Напомним, что кривизной кривой называется величина, обратная радиусу вписанной окружности

имеет место сверхрефракция, при которой первоначально горизонтальный луч изгибается к Земле, отражается от ее поверхности, вновь поворачивается параллельно горизонту, и такой процесс может повторяться многократно, приводя к существенному увеличению дальности радиосвязи. Из формулы (10.30) следует, что сверхрефракция возможна при условии $|n'/n| > R_z \approx 1,57 \cdot 10^{-4}$ км. Следует подчеркнуть, что сверхрефракция в тропосфере наблюдается сравнительно редко и размеры области вдоль земной поверхности, в которых реализуются благоприятные для ее возникновения условия, не очень велики, что не позволяет использовать явление сверхрефракции для устойчивой дальней радиосвязи.

10.3 Градиентный диэлектрический волновод

Если профиль показателя преломления в слоистой среде будет иметь локальный максимум, это может привести к образованию волноводного канала. Благоприятные профили $n(z)$ реализуются, в частности, в океане, когда распределение температуры, давления и процентного содержания солей по глубине приводит к образованию акустических волноводов, по которым звук распространяется без заметного затухания на многие тысячи километров [35].

Другим примером, важным для оптики, является градиентный диэлектрический волновод, или, в аксиально-симметричном случае, световод [117, 118]. Простейший диэлектрический волновод представляет собой плоскую диэлектрическую пластину с поперечно неоднородным распределением показателя преломления (рис. 10.8,а). Распространение электромагнитной волны происходит вдоль оси x , причем энергия в основном сосредоточена в центральном слое или сердцевине волновода. Верхний и нижний слои с постоянным показателем преломления n_0 служат оболочкой, принимающей участие в формировании собственных волн волновода, а также защищающей сердцевину от воздействия внешних факторов. В волоконной оптике чаще всего используют диэлектрические волноводы прямоугольной, круглой или эллиптической формы. Поперечное сечение круглого волновода показано на рис. 10.8,б.

Градиент показателя преломления в поперечном сечении возникает в процессе изготовления волноводов, при применении техники диффузии или ионной имплантации, которые позволяют контролировать необходимое распределение $n(z)$ с высокой точностью и создавать устройства интегральной оптики с заданными свойствами.

Мы подробно рассмотрим трехслойный градиентный волновод, изображенный на рис. 10.8,а, считая, что $n(z)$ — симметричная функция своего аргумента. Сна-

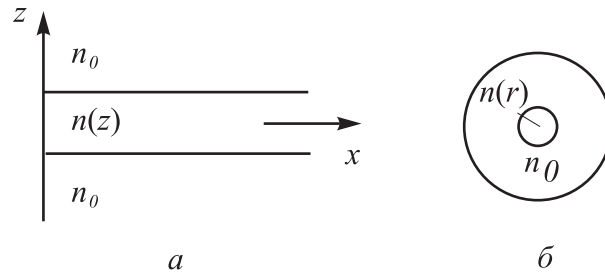


Рис. 10.8. Градиентные диэлектрические волноводы: плоская пластина (а) и волоконно-оптический световод (б).

чала качественно обсудим принцип действия волновода. На рис. 10.9 показаны распределение показателя преломления в поперечном сечении волновода и характер лучей от точечного источника⁵, расположенного на оси x .

Лучи, испущенные под малым углом наклона θ_0 к оси x , будут испытывать рефракцию, отклоняясь в сторону больших значений показателя преломления. Те лучи, для которых максимальное отклонение от оси волновода меньше, чем a — полуширина сердцевины, будут совершать периодические колебания около плоскости симметрии, такие лучи называются направляемыми. Остальные лучи достигают однородную область оболочки и навсегда покидают волновод. Они называются вытекающими лучами. Количественное описание легко провести, используя оптико-механическую аналогию. В соответствии с ней, форма луча совпадает с траекторией движения частицы единичной массы в потенциальной яме, форма которой показана на рис. 10.10,а. Ясно, что вдоль оси x скорость движения частицы остается постоянной и равной $p_x = n_m \cos \theta_0$, где $n_m = n(0)$ — значение показателя преломления на оси волновода. В проекции на плоскость $x = 0$ движение происходит в поле потенциала $U(z) = -n^2(z)/2$ и компонента начальной скорости в этой плоскости равна $p_{z0} = n_m \sin \theta_0$ (рис. 10.10,б). Частица покинет потенциальную яму, если $p_{z0}^2/2 > (n_m^2 - n_0^2)/2$, или

$$\cos \theta_0 < n_0/n_m .$$

Это условие разделяет направляемые и вытекающие лучи. “Период колебаний” в потенциальной яме равен (см. формулу (1.42) лекций по теории колебаний [1])

$$T = 4 \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}} , \quad (10.31)$$

⁵Так как рассматривается двумерная структура, под точечным источником подразумевается бесконечная нить, протяженная вдоль оси y .

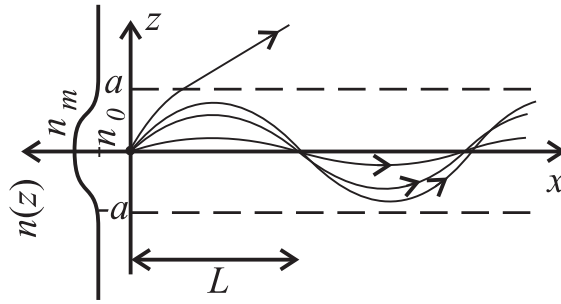


Рис. 10.9. Характер лучей от точечного источника на оси плоского градиентного волновода.

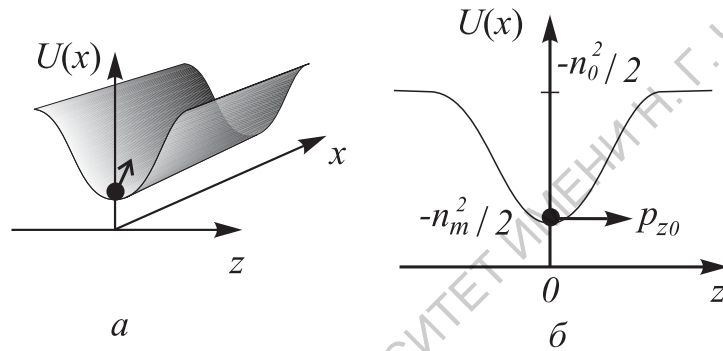


Рис. 10.10. Оптико-механическая аналогия для градиентного волновода: эквивалентный двумерный потенциал (а) и потенциал для поперечного движения частицы единичной массы (б)

где z_m — точка поворота траектории, которая определяется из решения уравнения $n(z) = n_m \cos \theta_0$. За время $T/2$ луч проходит вдоль оси x расстояние $L = (p_x/2)T$, или

$$L = 2n_m \cos \theta_0 \int_0^{z_m} \frac{dz}{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}}, \quad (10.32)$$

и вновь пересекает ось x .

Для произвольного профиля $n(z)$ величина L зависит от начального угла θ_0 , поэтому разные лучи вновь пересекают плоскость симметрии волновода чуть-чуть на разных расстояниях — изображение точечного источника размывается.

В случае градиентного волновода возможно важное упрощение, основанное на том, что на практике относительная разность величин n_m и n_0 составляет десятые и сотые доли процента [117]. Количественной мерой этой разности служит

безразмерный параметр $\Delta = (n_m^2 - n_0^2)/(2n_m^2) \approx (n_m - n_0)/n_0 \ll 1$, называемый высотой профиля показателя преломления. Условие для направляемых лучей, выраженное через параметр Δ принимает вид

$$\sin \theta_0 < \sqrt{2\Delta}, \quad (10.33)$$

или, при малых Δ , $\theta_0 < \sqrt{2\Delta}$. Таким образом, все направляемые лучи распространяются по малыми углами к оси x т. е. являются параксиальными.

Ограничимся случаем параболического распределения показателя преломления⁶

$$n^2(z) = n_m^2 \left(1 - 2\Delta \frac{z^2}{a^2} \right). \quad (10.34)$$

В этом случае максимальное отклонение луча равно $z_m = a \sin \theta_0 / \sqrt{2\Delta}$, интеграл в (10.32) легко вычисляется, что дает

$$L = \frac{\pi a \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}. \quad (10.35)$$

Из этой формулы следует, что для параболического распределения $n^2(z)$ направляемые лучи имеют примерно один и тот же пространственный период, так как для них $\cos \theta_0 \approx 1$. Лучи от точечного источника на оси волновода вновь концентрируются в точку на расстоянии $L = \pi a / \sqrt{2\Delta} \gg a$ от него, причем этот процесс периодически повторяется при смещении вдоль оси x .

Можно показать, что слой длиной D с таким законом $n(z)$ является настоящей линзой. Входящая в него система параллельных лучей после выхода из слоя фокусируется в точку на некотором расстоянии f от выходной плоскости. Величину f естественно назвать фокусным расстоянием.

Задача 10.1. Вычислите фокусное расстояние линзы, образованной слоем среды с параболическим распределением показателя преломления (10.34). Толщина слоя D .
 Ответ. $f = \frac{n_0 a}{n_m \sqrt{2\Delta}} \operatorname{ctg}(\sqrt{2\Delta} D / a)$.

Самое важное свойство градиентного диэлектрического волновода (как и диэлектрических волноводов других типов) состоит в том, что он способен поддерживать направленное распространение электромагнитных волн вдоль своей оси без потерь энергии на излучение. Это означает, что уравнения электродинамики допускают решения с заданной частотой ω , у которых пространственная зависимость всех компонент полей вдоль направления распространения определяется

⁶Точнее говорить, что параболическому закону подчиняется распределение диэлектрической проницаемости среды, но в случае малых Δ можно записать $n(z) \approx n_m(1 - \Delta z^2/a^2)$, т.е. по параболе меняется и сам показатель преломления.

множителем $\exp(-i\beta x)$, где β — продольное волновое число, зависящее от частоты. Функция $\beta(\omega)$ называется дисперсионной характеристикой диэлектрического волновода.

Воспользуемся методом геометрической оптики для вычисления дисперсии плоского диэлектрического волновода. Рассмотрим плоскость $z = 0$ и зададим на ней начальное распределение эйконала $\psi_0(x)$. Функциональная зависимость поля от x определяется множителем $\exp(-i\beta x)$, поэтому эйконал в этой плоскости задается формулой

$$k\psi(x, z)|_{z=0} = \beta x. \quad (10.36)$$

Угол θ_0 , под которым траектория пересекает плоскость $z = 0$ определим из следующих соображений. Воспользуемся вновь оптико-механической аналогией. Благодаря независимости показателя преломления от x , компонента вектора \mathbf{p} вдоль этой оси является интегралом движения, поэтому $\partial\psi/\partial x = p_x = n_m \cos \theta_0$. Это соотношение согласуется с формулой (10.36), если выполняется равенство

$$\beta = kn_m \cos \theta_0. \quad (10.37)$$

Следовательно, поле собственной моды волновода с заданным β формируют лучи с одним и тем же углом наклона, определяемым уравнением (10.37). Выберем один из этих лучей, выходящий из точки с координатами $(x_0, 0)$ в верхнюю полуплоскость и вычислим изменение эйконала при движении вдоль луча по одному пространственному периоду колебаний. Полный эйконал представим в виде $k\psi(x, z) = \beta x + k\bar{\psi}(z)$, тогда из уравнения (10.7) для функции $\bar{\psi}(z)$ получаем

$$\left[\frac{d\bar{\psi}(z)}{dz} \right]^2 = n^2(z) - \beta^2/k^2,$$

откуда

$$d\bar{\psi}(z) = \sqrt{n^2(z) - \beta^2/k^2} dz.$$

Знак плюс перед корнем соответствует лучу, выходящему в верхнюю полуплоскость.

За один период колебания луча он проходит вдоль оси x расстояние $2L$, поэтому полное изменение эйконала равно

$$k\Delta\psi = 2L\beta + \oint \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' - \pi. \quad (10.38)$$

Слагаемое $-\pi$ появилось из-за того, что луч при своем движении дважды касается каустики в плоскостях $z = \pm z_m$, и при каждом касании необходимо учитывать

дополнительный сдвиг фазы на $-\pi/2$. Знак интегрирования по замкнутому контуру означает, что оно ведется по полному периоду луча. Так как луч в результате возвращается в первоначальную плоскость, для восстановления структуры поля собственной волны волновода, необходимо выполнение условия согласования фаз: набег фазы вдоль луча должен совпадать с точностью до $2\pi N$ (N — целое число) с набегом фазы поля за счет множителя $\exp(-i\beta x)$ при смещении вдоль оси x на расстояние $2L$. Учитывая это требование, из (10.38) получаем

$$\oint \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' = \pi(2N + 1), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (10.39)$$

Это уравнение называется условием поперечного резонанса [117]. Для заданного распределения $n(z)$ оно позволяет найти возможные значения $\beta(k)$, то есть дисперсию волновода. Каждому значению N соответствует дисперсионная характеристика N -ой собственной моды волновода.

Задача расчета дисперсии плоского градиентного волновода в математическом смысле полностью эквивалентна квантомеханической задаче о колебаниях в одномерной потенциальной яме. Поперечное распределение поля собственной волны волновода совпадает с волновой функцией дискретного уровня энергии, а получаемые из (10.37) значения $\beta_N^2(k)$ аналогичны собственным значениям энергии. Таким образом, условие поперечного резонанса является аналогом правила квантования Бора-Зоммерфельда [108] в квантовой механике.

Обсудим условия, при которых формула (10.39) была получена. Во-первых, мы предполагали, что электромагнитное поле удовлетворяет скалярному волновому уравнению (10.5), пренебрегая эффектами поляризации поля. Ниже будет показано, что для слоисто-неоднородного диэлектрика, если $\Delta \ll 1$, такое предположение выполняется с большим запасом. Более того, можно показать, что для диэлектрических волноводов произвольного поперечного сечения, у которых максимальное и минимальное значения показателя преломления отличаются мало, собственные моды оказываются вырожденными по поляризации независимо от конкретного закона изменения показателя преломления по сечению [117, 118]. Распределение вектора электрического поля таково, что продольные (вдоль оси x) компоненты поля оказываются гораздо меньше, чем поперечные, а в поперечном сечении электрическое поле поляризовано преимущественно вдоль одной из двух взаимно-перпендикулярных осей, которые называются оптическими осями волновода. В случае симметрии поперечного сечения оптические оси совпадают с осями симметрии. Таким образом, для каждого возможного значения β существует две собственные волны, линейно поляризованных в двух перпендикулярных оси волновода и друг другу направлениях. Эти моды имеют одинаковый

закон распределения поля в поперечном сечении $E(y, z)$ и отличаются только направлением поляризации. Эти свойства выполняются только приближенно, если параметр $\Delta = (n_{max}^2 - n_{min}^2)/(2n_{min}^2) \ll 1$. Как указывалось выше, в реальных волноводах, используемых в оптическом и инфракрасном диапазоне параметр Δ очень мал. Такие волноводы называются *слабонаправляющими*, а соответствующие собственные моды получили название *LP-мод слабонаправляющих диэлектрических волноводов*.

На самом деле, продольная постоянная распространения двух линейно поляризованных *LP-мод* немного зависит от направления поляризации, т.е. величина $\Delta\beta = \beta_x - \beta_y \neq 0$. Например, для волноводов прямоугольного или эллиптического сечения, эта разница объясняется разным размером волновода в y и z направлениях. Даже если сечение волновода идеально круглое, ненулевое $\Delta\beta$ может появиться как следствие остаточной анизотропии в материале, из которого изготовлен световод. В таких волноводах распространяющийся сигнал сохраняет свою поляризацию на очень больших (по сравнению с длиной волны) расстояниях.

Картина меняется, если вдоль оси волновода показатель преломления также слабо изменяется. В этом случае *LP-моды* оказываются связанным, так что энергия, первоначально находившаяся в одной из таких мод начинает периодически перекачиваться в другую и обратно — возникают биения. При линейной поляризации сигнала на входе в оптический световод, на его выходе поляризация оказывается эллиптической. Более подробно этот вопрос будет рассмотрен в последнем параграфе этой лекции.

Второе замечание связано с существованием в волноводе наряду с направляемыми, также и вытекающих лучей. При заданном β угол наклона луча θ_0 можно найти из формулы (10.37). С другой стороны, направляемые лучи должны удовлетворять условию (10.33), откуда получаем, что вся теория работает, если $\sqrt{1 - \beta^2/(n_m^2 k^2)} < \sqrt{2\Delta}$, или

$$kn_m \sqrt{1 - 2\Delta} = n_0 k < \beta < n_m k. \quad (10.40)$$

Для действительных β правое неравенство всегда выполняется, иначе под корнем в (10.39) будет стоять отрицательная при всех z величина, и уравнение (10.39) не будет иметь действительных решений. Нарушение левого неравенства означает, что $z_m > a$, то есть каустика находится в области однородной оболочки, чего быть не может, так как все лучи в однородной среде строго прямолинейны и при заданном β выходят из сердцевины волновода под одинаковыми углами. Волновое поле отвечает в этом случае убегающей от волновода под некоторым

конечным углом плоской волне. Таким образом, в этой области частот направляемой собственной волны не существует, вся энергия излучается из волновода и амплитуда волны вдоль оси x экспоненциально уменьшается. Собственные моды диэлектрических волноводов, обладающие такими свойствами, называются *вытекающими*.

Благодаря дифракционным эффектам поле в действительности частично проникает в область за каустику, поэтому просачивание поля из сердцевины в оболочку наступает чуть раньше, чем каустика совпадет с границей между сердцевиной и оболочкой. Следовательно рассматриваемое приближение должно давать заметную погрешность вблизи тех частот, при которых направляемая волна превращается в вытекающую.

В качестве конкретного примера вновь рассмотрим параболическое распределение показателя преломления. Подставляя формулу (10.34) в (10.39) и вычисляя интеграл, получаем

$$\oint \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' = \pi n_m \frac{ka}{\sqrt{2\Delta}} \sin \theta_0^2 = \frac{\pi(k^2 n_m^2 - \beta^2)a^2}{\sqrt{2\Delta}kan_m} = \pi(2N + 1).$$

Введем, вслед за книгой [117], безразмерные переменные $v = \sqrt{2\Delta}n_m ka$ и $u = \sqrt{k^2 n_m^2 - \beta^2}a$. В этих переменных дисперсионное уравнение записывается следующим образом:

$$u^2 = (2N + 1)v. \quad (10.41)$$

Введем, наконец, нормированную постоянную распространения $b = 1 - u^2/v^2$, которая меняется в пределах от 0 до 1. В переменных (v, b) дисперсионная характеристика определяется простым соотношением

$$b = 1 - \frac{2N + 1}{v}. \quad (10.42)$$

Дисперсионные кривые, соответствующие этому уравнению для нескольких первых мод, приведены на рис. 10.11. Для каждой моды точка $b = 0$ отвечает такому значению частоты, при котором каустика совпадает с границей сердцевины волновода и направляемые лучи для превращаются в вытекающие. Критические значения безразмерного параметра v равны $v_N = 2N + 1$, для более низкой частоты направляемой моды с данным N не существует. На самом деле, как указывалось выше, данный метод вблизи критических частот дает заметную погрешность, поэтому дисперсия и сами критические значения v_N определяются здесь только приближенно. Соответствующие участки дисперсионных кривых показаны на рис. 10.11 пунктиром. В частности, более точные методы показывают,

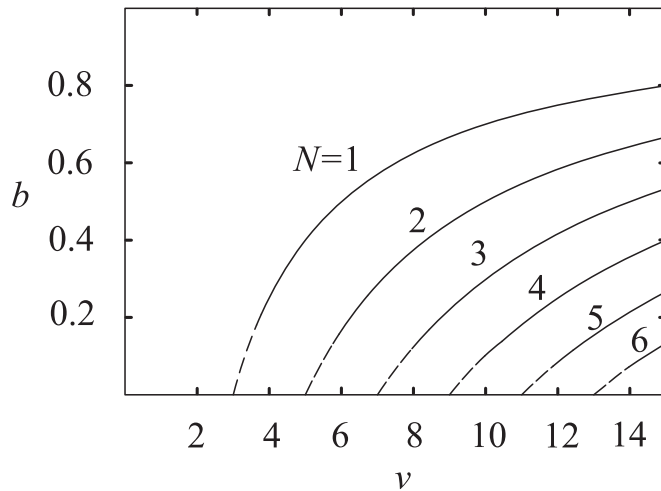


Рис. 10.11. Дисперсия плоского диэлектрического волновода с параболическим профилем показателя преломления в сердцевине. Пунктиром показаны участки дисперсионных кривых, которые определяются методом с большой погрешностью.

что направляемая мода основного типа ($N = 1$) существует в волноводе на любой положительной частоте, так что для нее критическое значение безразмерной частоты равно $v = 0$, а не $v = 1$, как это следует из уравнения (10.42).

Распределение поля в волноводе найдем, используя формулу (10.24), учитывая в ней, что для двумерной задачи площадь сечения лучевой трубки следует заменить на ее ширину. В качестве границ трубки выберем два луча, сдвинутых относительно друг друга на малую величину dx_0 (см. рис. 10.12). Ширина трубки в плоскости $z = 0$ равна $d\sigma_0 = dx_0 \sin \theta_0$, а при произвольных x и z из треугольника ABC можно записать $|AB| = dx_0$, $|BC| = dz = z(x + dx_0) - z(x) = \frac{dz}{dx} dx_0$, $|DB| = d\sigma$. Отсюда получаем

$$d\sigma = dz \cos \theta \approx \frac{dz}{dx} dx_0 \cos \theta = \frac{dz}{dx} \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0} d\sigma_0.$$

Кроме этого, из уравнений (10.27) вытекает

$$\left| \frac{dz}{dx} \right| = \frac{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}}{n(z) \cos \theta}.$$

Собирая вместе все эти результаты, приходим к соотношению

$$\left| \frac{d\sigma_0}{d\sigma} \right| = \frac{n(z) \sin \theta_0}{\sqrt{n^2(z) - n_m^2 \cos^2 \theta_0}}, \quad (10.43)$$

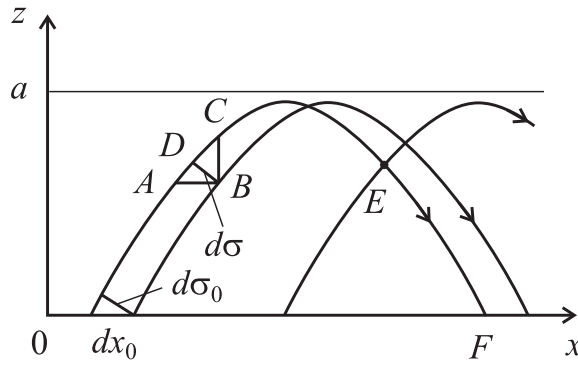


Рис. 10.12. К определению поля собственной моды методом геометрической оптики

Следует также учесть, что через каждую точку в сердцевине волновода проходит два луча — восходящий и нисходящий, уже коснувшийся каустики. Для первого луча часть фазы, зависящая от координаты z , равна

$$k\bar{\psi}_1(z) = \int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz'$$

Для нисходящего луча эту величину проще всего найти из соображений симметрии. В точке F на рис.10.12 набег фазы вдоль луча равен половине набегу на период, т.е. $\pi(N + 1/2)$. Двигаясь вдоль луча от этой точки в обратном направлении, получаем, что в точке E пересечения двух лучей фаза второго выражается соотношением

$$k\bar{\psi}_2(z) = \pi(N + 1/2) - \int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz'$$

Для обоих лучей слагаемое в фазе, пропорциональное x , равно βx . Учитывая это и подставляя формулы (10.37) и (10.43) в (10.24), получаем для поля следующее выражение:

$$E(x, z) = \frac{C e^{-i\beta x}}{\sqrt{k^2 n^2(z) - \beta^2}} \cdot \begin{cases} \cos \left(\int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' \right), & \text{если } N \text{ четное;} \\ \sin \left(\int_0^z \sqrt{k^2 n^2(z') - \beta^2} dz' \right), & \text{если } N \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (10.44)$$

где C — амплитудный множитель, конкретный вид которого несуществен из-за линейности системы. Выражение (10.44) справедливо в области между каустиками, положение которых определяется корнями уравнения

$$n^2(z) = \beta^2/k^2. \quad (10.45)$$

Точно на каустике поле обращается в бесконечность, при этом условия применимости приближения геометрической оптики оказываются нарушенными. Таким образом использованный метод не позволяет получить решение, адекватно описывающее поле вблизи каустики и за ней. Для получения такого решения исследуем более подробно распространение электромагнитной волны в слоисто-неоднородной среде.

10.4 Электромагнитные волны в слоисто-неоднородной среде

Задачи о распространении волн в слоисто-неоднородной среде возникают при изучении электромагнитных волн в плазме, радиоволн в ионосфере Земли, звуковых волн в жидкости, волн нерегулярных волноводах, в квантовой механике, а также во многих других задачах. Некоторые примеры были уже рассмотрены в предыдущих параграфах этой лекции. Сейчас наша основная цель состоит в том, чтобы получить более точное описание поля вблизи каустики, чем дает метод геометрической оптики.

Рассмотрим распространение электромагнитной волны в среде, диэлектрическая проницаемость которой зависит только от координаты z : $\varepsilon = \varepsilon(z)$. Будем считать, что волновой вектор лежит в плоскости xz , поэтому все компоненты поля не зависят от координаты y . Кроме того, поскольку в направлении x среда однородная, то можно рассматривать только решения, зависящие от x по гармоническому закону $\exp(-i\beta x)$, где β — x -компонента волнового вектора. Таким образом в уравнениях Максвелла (10.3а) и (10.3б) можно положить $\partial/\partial x = -i\beta$ и $\partial/\partial y = 0$.

Вид уравнения для поля зависит от поляризации волны. Возможны два случая. Если вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения xz , то компоненты поля E_x , E_z , и H_y строго равны нулю. В теории плоских диэлектрических волноводов собственные моды, обладающие такой поляризацией, называются TE -модами. Расписывая уравнения (10.3а) и (10.3б) по координатам,

получаем

$$H_x = \frac{1}{-ik} \frac{dE_y}{dz}, \quad H_z = -\frac{\beta}{k} E_y,$$

$$\frac{dH_x}{dz} + i\beta H_z = -ik\varepsilon E_y,$$

Подставляя первые два соотношения в третье, приходим к уравнению для y -компоненты электрического поля:

$$\frac{d^2 E_y}{dz^2} + [k^2 \varepsilon(z) - \beta^2] E_y = 0. \quad (10.46)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (10.5) из § 10.1, которое было выведено для произвольной неоднородной среды в пренебрежении эффектами поляризации, если положить в (10.5) $E(x, z) = E_y(z) \exp(-i\beta x)$. Мы получили, что для TE -моды в плоско-слоистой среде уравнение (10.46) является точным.

Аналогично, когда вектор электрического поля падающей волны лежит в плоскости падения, выполняются соотношения $H_x = H_z = E_y = 0$. Моды с такой поляризацией называются TM -волнами. В этом случае из уравнений Максвелла следует

$$E_x = \frac{1}{i\varepsilon k} \frac{dH_y}{dz}, \quad E_z = \frac{\beta}{k\varepsilon} H_y,$$

$$\frac{dE_z}{dz} + i\beta E_z = ikH_y,$$

Все компоненты поля выражаются через одну скалярную функцию $H_y(z)$, для которой получаем уравнение

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{dH_y}{dz} \right) + \left(k^2 - \frac{\beta^2}{\varepsilon(z)} \right) H_y = 0. \quad (10.47)$$

Положим $H_y(z) \equiv \sqrt{\varepsilon(z)} F(z)$, тогда уравнение для функции $F(z)$ приобретает вид

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left[k^2 \varepsilon(z) + \frac{\varepsilon''(z)}{2\varepsilon(z)} - \frac{3\varepsilon'^2(z)}{4\varepsilon^2(z)} - \beta^2 \right] F(z) = 0. \quad (10.48)$$

Видно, что оно совпадает с уравнением (10.46), если ввести эффективную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon_{\text{эфф}}$ соотношением

$$k^2 \varepsilon_{\text{эфф}} = k^2 \varepsilon + \frac{\varepsilon''}{2\varepsilon} - \frac{3\varepsilon'^2}{4\varepsilon^2}.$$

Если L — характерный масштаб изменения $\varepsilon(z)$ то второе и третье слагаемые имеют порядок $\Delta/(kL)^2$ и $\Delta^2/(kL)^2$ по сравнению с первым. Здесь $2\Delta = (\varepsilon_{\text{max}} -$

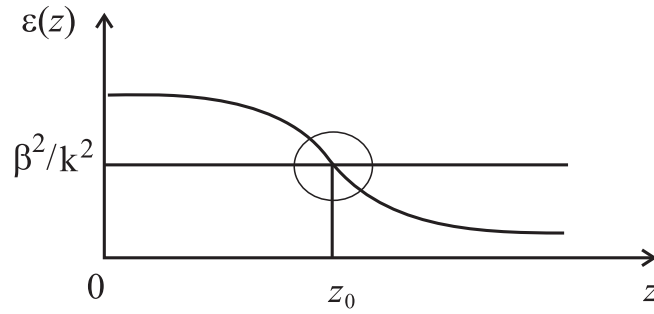


Рис. 10.13. Зависимость диэлектрической проницаемости от координаты вблизи точки поворота

$\varepsilon_{min})/\varepsilon_{max}$ — относительное изменение диэлектрической проницаемости в среде, введенное по аналогии с высотой профиля показателя преломления для диэлектрических волноводов. Если $kL \gg 1$, они пренебрежимо малы, и можно считать $\varepsilon_{эфф} = \varepsilon$. Для слабонаправляющих диэлектрических волноводов, кроме того, высота профиля показателя преломления мала: $\Delta \ll 1$, поэтому уравнение для поля не зависит от поляризации собственной моды с еще большей точностью. В результате TM - и TE -моды слабонаправляющих волноводов оказываются вырожденными. Будет рассматривать, для определенности, уравнение (10.46), используя для искомой компоненты поля обозначение $F(z)$.

Пусть зависимость диэлектрической проницаемости среды от z имеет вид, показанный на рис. 10.13. Предполагается, что волна распространяется со стороны отрицательных значений z . Точка поворота z_0 , найденная из уравнения (10.45), где $n^2 = \varepsilon$, разграничивает области с различным поведением решения. Слева от этой точки функция $q^2(z) = k^2 n^2(z) - \beta^2 > 0$, поэтому ВКБ-приближение для уравнения (10.46) равно

$$F(z) = \frac{A_+}{\sqrt{q(z)}} \exp \left[-i \int_{z_0}^z q(z') dz' \right] + \frac{A_-}{\sqrt{q(z)}} \exp \left[i \int_{z_0}^z q(z') dz' \right], \quad (10.49)$$

где A_+ и A_- — амплитуды волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси x . Будем называть эти волны соответственно прямой и встречной. При $z > z_0$ имеем $q^2(z) < 0$, в этом случае ВКБ-решение равно

$$F(z) = \frac{B_+}{\sqrt{|q(z)|}} \exp \left[- \int_{z_0}^z |q(z')| dz' \right]. \quad (10.50)$$

Это решение соответствует экспоненциально затухающей вглубь запрещенной области волне. Амплитуду второго линейно независимого решения, нарастающего

вглубь запрещенной области, при заданных граничных условиях следует положить равной нулю. Действительно, если волна падает слева, то в запрещенной области может существовать только затухающая волна, иначе будет нарушен закон сохранения энергии. В геометрической оптике точка z_0 является точкой положения каустики, в квантовой механике она называется точкой поворота, так как ограничивает классическое движение частицы в потенциальном поле.

В непосредственной окрестности точки поворота решениями (10.49) и (10.50) пользоваться нельзя, так как здесь нарушаются условия применимости ВКБ-приближения. Для построения решения в этой области воспользуемся методом эталонных функций, суть которого можно выразить словами: похожие дифференциальные уравнения имеют похожие решения⁷.

Разложим вблизи точки поворота функцию $q^2(z)$ в ряд Тейлора: $q^2(z) = q^2(z_0) + (dq^2/dz)_{z=z_0}(z - z_0) + \dots \approx k^2 \varepsilon'(z_0)(z - z_0)$ и введем безразмерную координату $\xi = k^{2/3} |\varepsilon'(z_0)|^{1/3} (z - z_0)$. Тогда вблизи точки поворота вместо уравнения (10.46) можно записать

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} - \xi F = 0. \quad (10.51)$$

Это уравнение называется *уравнением Эйри*, а его линейно независимые решения называются функциями Эйри. Одна из этих функций обозначается $\text{Ai}(\xi)$ и ее можно представить в виде [108, 121]⁸

$$\text{Ai}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + \xi t\right) dt. \quad (10.52)$$

Функция Эйри хорошо изучена и протабулирована, а в современных компьютерных пакетах математического обеспечения, таких как *Mathematica*, она включена как стандартная функция. Нам потребуются асимптотические разложения функции Эйри при больших значениях аргумента [122]:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\xi) &\sim \frac{1}{2\xi^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right), \quad \xi > 0 \\ \text{Ai}(\xi) &\sim \frac{1}{|\xi|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad \xi < 0 \end{aligned} \quad (10.53)$$

Как видно из этих формул, функция Эйри $\text{Ai}(\xi)$ при больших положительных значениях аргумента экспоненциально убывает. Можно показать, что любое дру-

⁷Для квантомеханической задачи об отражении частицы от потенциального барьера этот метод излагается во многих учебниках по квантовой механике (см., например, [119, 120].)

⁸В широко распространенном справочнике [122] определение функции Эйри отличается от приведенного здесь постоянным множителем. Вместо коэффициента $1/\sqrt{\pi}$ в [122] перед интегралом стоит $1/\pi$

гое линейно независимое решение уравнения Эйри в этом пределе будет экспоненциально возрастать, поэтому необходимое нам решение выражается только через функцию $\text{Ai}(\xi)$:

$$F(\xi) = C \text{Ai}(\xi). \quad (10.54)$$

Здесь C — амплитудный множитель.

Предположим, что квазиклассическое приближение для уравнение (10.46) становится применимым на таких расстояниях от точки поворота, на которых функцию $q^2(z)$ все еще можно считать линейной. При таких значениях координаты можно считать приближенные ВКБ-решения (10.49) и (10.50) с решением (10.54). Определим условия, при которых процедура шивки возможна. Квадратичное слагаемое в разложении $q^2(z)$ в ряд Тейлора мало по сравнению с линейным, если $|\varepsilon'(z_0)||z - z_0| \gg |\varepsilon''(z_0)||z - z_0|^2$, откуда, используя оценки $\varepsilon' \sim \varepsilon/L$ и $\varepsilon'' \sim \varepsilon/L^2$, находим $|z - z_0| \ll L$. Условие применимости ВКБ-приближения можно получить из формулы (7.59) лекций [1], если заменить t на z и $\omega(t)$ на $q(z)$: $|q'(z)| \ll |q^2(z)|$. В этом неравенстве можно использовать $q^2(z) \approx k^2 \varepsilon'(z_0)(z - z_0)$, в результате чего оно приводится к виду $|z - z_0| \gg L/(\sqrt{\varepsilon}kL)^{2/3}$. Таким образом, если выполняется условие $\sqrt{\varepsilon}kL \gg 1$, всегда существует такое z_1 , для которого одновременно выполняются неравенства

$$\frac{L}{(\sqrt{\varepsilon}kL)^{2/3}} \ll |z_1 - z_0| \ll L. \quad (10.55)$$

На расстояниях порядка z_1 от точки поворота, с одной стороны, уже работает ВКБ-приближение, а с другой — еще можно использовать уравнение Эйри.

Предположим, что условие (10.55) выполнено. В этом случае ВКБ-решения (10.49) и (10.50) должны совпадать с первым членом асимптотического разложения решения (10.54). Вычислим интегралы в формулах (10.49) и (10.50):

$$\int_{z_0}^z q(z') dz' \approx \sqrt{|\varepsilon'(z_0)|} k \int_{z_0}^z \sqrt{z_0 - z'} dz' = \int_0^{|\xi|} \sqrt{\xi'} d\xi' = \frac{2}{3} |\xi|^{3/2},$$

если $z < z_0$, и

$$\int_{z_0}^z |q(z')| dz' \approx \sqrt{|\varepsilon'(z_0)|} k \int_{z_0}^z \sqrt{z' - z_0} dz' = \int_0^\xi \sqrt{\xi'} d\xi' = \frac{2}{3} \xi^{3/2},$$

если $z > z_0$. Подставляя эти выражения в (10.49) и (10.50) и сравнивая полученные формулы с асимптотикой функции Эйри (10.53), получаем, что коэффициенты A_+ , A_- , B_+ и C связаны соотношениями

$$A_+ = \frac{e^{i\pi/4} C}{2}, \quad A_- = \frac{e^{-i\pi/4} C}{2}, \quad B_+ = \frac{C}{2}. \quad (10.56)$$

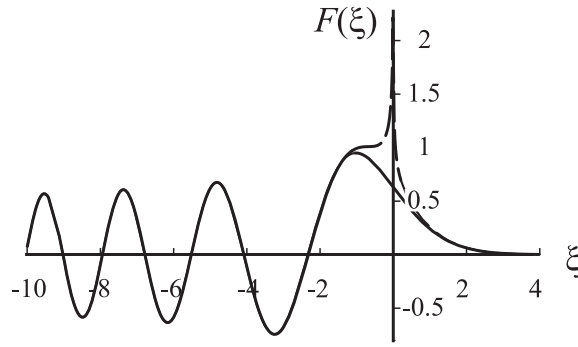


Рис. 10.14. Поле в плоско-слоистой среде вблизи каустики. Пунктиром показаны ВКБ-решения (10.53).

Эти формулы определяют связь между амплитудами падающей A_+ , отраженной A_- и прошедшей в запрещенную область волны B_+ . Видно, что коэффициент отражения от каустики равен $A_-/A_+ = \exp(-i\pi/2)$, то есть по модулю амплитуды падающей и отраженной волн равны, а их фаза отличается на $-\pi/2$. Это тот самый сдвиг фазы на каустике, о котором шла речь в § 10.1.

Подставляя формулы (10.56) в (10.49) и (10.50), получаем, что искомое решение имеет асимптотическое разложение

$$F(z) = \frac{C}{\sqrt{q(z)}} \cos \left[\int_{z_0}^z q(z') dz' - \pi/4 \right], \quad z < z_0, \quad (10.57a)$$

$$F(z) = \frac{C}{2\sqrt{|q(z)|}} \exp \left[- \int_{z_0}^z |q(z')| dz' \right], \quad z > z_0. \quad (10.57b)$$

В непосредственной окрестности точки поворота следует пользоваться формулой (10.54). Подчеркнем, что найденное решение, и, следовательно, связь между амплитудами падающей, отраженной и проникающей за каустику волн, соответствует только заданным в физической постановке задачи граничным условиям, когда из $-\infty$ падает волна заданной амплитуды, а справа от точки поворота есть только затухающая вглубь запрещенной области волна. При других граничных условиях вид решения и соотношения между амплитудами будут другими. Более подробно этот вопрос обсуждается в [108].

Найденное решение показано на рис. 10.14. В области $z < z_0$ оно имеет вид стоячей волны, амплитуда которой увеличивается при приближении к каустике, а расстояние между максимумами (локальная длина волны) немного уменьшается. В области за каустикой ($z > z_0$) поле экспоненциально быстро спадает до нуля. В отличие от решения, полученного методом геометрической оптики в предыдущем

разделе, а также в отличие от асимптотических выражений (10.57), поле остается конечным на каустике. Главным максимум смещен в разрешенную область на величину, определяемую формулой

$$z_m - z_0 = -1,02 k^{-2/3} |\varepsilon'(z_0)|^{-1/3}. \quad (10.58)$$

На рис. 10.14 также показаны пунктиром ВКБ-решения (10.57). Видно, что они являются очень хорошим приближением к точному решению при всех z , кроме области шириной порядка $|z_m - z_0|$, непосредственно примыкающей к каустике.

Можно считать, что в точке z_0 происходит полное отражение волны, за каустикой она практически не проникает. Положение точки отражения определяется уравнением (10.45). Если угол падения волны на слоисто-неоднородную среду равен нулю, то $\beta = 0$, и положение точки отражения совпадает с нулем коэффициента преломления. Это условие выполняется, например, в ионосферной плазме [123]. Если пренебречь затуханием и магнитным полем Земли, то для диэлектрической проницаемости плазмы можно записать

$$\varepsilon(z) = n^2(z) = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{\omega^2 m}, \quad (10.59)$$

где $N(z)$ — концентрация электронов в плазме, ω — частота. При вертикальном распространении волны в точке отражения получаем:

$$N(z) = \frac{\omega^2 m}{4\pi e^2} = 1,24 \cdot 10^{-8} f^2. \quad (10.60)$$

Здесь частота должна быть выражена в гигагерцах, а концентрация в см^{-3} . Эта формула является основной для интерпретации данных по радиозондированию ионосферы Земли и плазмы солнечной короны [123].

10.5 Взаимодействие линейных волн в неоднородной среде

В приближении геометрической оптики различные волны не обмениваются энергией. Чтобы показать это, рассмотрим, например, случай акустической волны. Для прямой волны, бегущей в положительном направлении оси z , комплексная амплитуда потенциала скорости равна

$$u(z) = \frac{A_+}{\sqrt{kn(z)}} \exp \left[-ik \int^z n(z') dz' \right].$$

Подставляя это выражение в формулу (10.21) и дифференцируя, как это следует делать в ВКБ-решениях, только экспоненциальный множитель, для усредненного за период потока мощности волны получаем выражение $q = \omega\rho_0|A_+|^2/2$. Поскольку A_+ — константа, то поток мощности постоянен вдоль оси z . Аналогично для потока мощности встречной волны, бегущей в отрицательном направлении можно получить $q = -\omega\rho_0|A_-|^2/2$, т.е. также постоянную величину.

Чтобы учесть взаимодействие между волнами, необходимо выйти за рамки ВКБ-приближения, учитывая следующие члены асимптотического разложения. Однако, если функция $n^2(z)$ аналитическая, то можно показать, что взаимодействие прямой и встречной волны будет отсутствовать в любом порядке асимптотического разложения — амплитуда отраженной волны экспоненциально мала.

Можно поступить иначе, воспользовавшись другим методом, например методом Ван-дер-Поля. Сделаем это на примере конкретной задачи о переходном слое. Поставим задачу так: пусть есть слой ширины l , в котором свойства среды плавно меняются. На границу $z = 0$ слоя падает волна с амплитудой $A_+(0) = A_0$; амплитуда встречной (отраженной) волны на границе $x = l$ равна нулю. Надо найти амплитуду $A_-(x)$ волны, возникающей из-за отражения от плавных неоднородностей, т.е. найти амплитуду волны, распространяющейся справа налево. Введем новую переменную $V = dF/dx$ и запишем для удобства (10.46) в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\frac{dF}{dz} = V, \quad \frac{dV}{dz} = -k^2\varepsilon(z)F. \quad (10.61)$$

Рассматривается одномерный случай, поэтому $\beta = 0$. Решение (10.61) будем искать в виде (10.49), считая A_+ и A_- функциями координаты, т.е.

$$F(z) = \frac{A_+(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{-i\varphi} + \frac{A_-(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{i\varphi},$$

где

$$\varphi(z) = k \int_0^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz'.$$

Так как вместо одной переменной $F(z)$ мы ввели две новых $A_+(z)$ и $A_-(z)$, то одно соотношение, связывающее эти новые переменные, можно выбрать произвольно. Потребуем, чтобы

$$\frac{A'_+(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{-i\varphi} - \frac{A_+(z)\varepsilon'(z)}{4\sqrt[5]{\varepsilon^5(z)}} e^{-i\varphi} + \frac{A'_-(z)}{\sqrt[4]{\varepsilon(z)}} e^{i\varphi} - \frac{A_-(z)\varepsilon'(z)}{4\sqrt[5]{\varepsilon^5(z)}} e^{i\varphi} = 0. \quad (10.62)$$

Тогда $V = -ik\sqrt[4]{\varepsilon}[A_+ \exp(-i\varphi) - A_- \exp(i\varphi)]$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы (10.61), найдем

$$A'_+ e^{-i\varphi} + \frac{\varepsilon' A_+ e^{-i\varphi}}{4\varepsilon} - A'_- e^{i\varphi} - \frac{\varepsilon' A_- e^{i\varphi}}{4\varepsilon} = 0.$$

Объединение этого уравнения с условием (10.62) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} (4\varepsilon A'_+ - \varepsilon' A_+) e^{-i\varphi} + (4\varepsilon A'_- - \varepsilon' A_-) e^{i\varphi} &= 0, \\ (4\varepsilon A'_+ + \varepsilon' A_+) e^{-i\varphi} - (4\varepsilon A'_- + \varepsilon' A_-) e^{i\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно производных A'_+ и A'_- , получим

$$A'_+ = \frac{\varepsilon'(z)A_-}{4\varepsilon} e^{2i\varphi}, \quad A'_- = \frac{\varepsilon'(z)A_+}{4\varepsilon} e^{-2i\varphi}. \quad (10.63)$$

Уравнения (10.63) — точные: пока сделана всего лишь замена переменных — от F и V мы перешли к A_+ и A_- . Но, поскольку неоднородность слабая, ε' мала по сравнению с ε , и, следовательно, A_+ и A_- меняются медленно. Поэтому для решения (10.63) можно применить метод последовательных приближений, полагая в нулевом приближении $\varepsilon' = 0$ и $A_+(z) = A_0$.

Подставляя $A_+(z) = A_0$ во второе уравнение из (10.63), получим

$$A_- = A_0 \int_0^z \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} \exp \left[-2ik \int_0^{z'} \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \right] dz.$$

Учет поправки первого приближения дает

$$A_- = A_0 + \int_0^z \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} A_-(z) \exp \left[2ik \int_0^{z'} \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \right] dz.$$

Это уже выход за рамки геометрической оптики: волны взаимодействуют друг с другом: их амплитуды их связаны.

Если за пределами слоя среда однородна, то интегрирование в этих выражениях можно формально расширить на всю ось z . Тогда для коэффициента отражения от неоднородного слоя $R = A_-/A_+$ получаем

$$R = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'}{4\varepsilon} \exp \left[-2ik \int_{-\infty}^z \sqrt{\varepsilon(z')} dz' \right] dz. \quad (10.64)$$

Это соотношение эквивалентно борновскому приближению для коэффициента рассеяния на малом по сравнению с энергией частицы потенциале в квантовой механике [108, 120].

Отметим, что рассмотренная в предыдущем параграфе задача об отражении волны от каустики также может трактоваться как задача о взаимодействии двух волн — прямой и встречной. В этом случае эффективное взаимодействие происходит в области, где их фазовые скорости, имеющие разные знаки, малы, и, следовательно, близки друг к другу. Взаимодействие при этом настолько сильное, что происходит полное преобразование падающей волны в отраженную.

Примеры взаимодействия волн в неоднородных средах можно существенно увеличить. Подобные задачи встречаются в самых различных областях физики, таких, как гидродинамика, физика плазмы, электродинамика, акустика, а в последние годы сюда добавились физика жидких кристаллов, ферромагнетиков, оптических волноводов. В фундаментальном обзоре [124] задача линейного взаимодействия волн в неоднородных средах рассматривается как одна из важнейших современных проблем теории колебаний и волн вообще⁹.

Исследования в этой области начались в 50-х годах с изучения распространения волн в ионосферной плазме [123, 125, 126], нерегулярных волноводах СВЧ диапазона [127, 128], акустических волн в слоистых средах [35].

Вообще говоря, эффект линейного взаимодействия волн (линейной трансформации мод) возникает в том случае, если при распространении через отрезок неоднородной среды, амплитуды волн меняются неадиабатически, т.е. их изменения отклоняются от предсказания геометрической оптики. Другими словами, взаимодействие волн наблюдается при нарушении законов геометрической оптики. Это значит, что отношения амплитуд и разности фаз волн, образующих полное волновое поле, отличаются от того, что предсказывает ВКБ-приближение, когда волны считаются независимыми.

Характер и масштаб неоднородности среды определяет трансформацию волн, поэтому изучение этого явления может случить источником сведений о структуре неоднородности. Более того, изменяя закон неоднородности среды, можно контролировать эффективность преобразования волн, и, следовательно, управлять интенсивностью и поляризацией прямых и встречных волн.

Следуя обзору [124], рассмотрим линейное взаимодействие волн в довольно общей физической ситуации распространения электромагнитной волны в произ-

⁹В последующем изложении в этом параграфе мы следуем обзору [124], в котором рассмотрены вопросы взаимодействия электромагнитных волн в анизотропных, плавно неоднородных средах.

вольной анизотропной неоднородной среде.

Пусть монохроматическая волна распространяется в среде без источников и свойства среды не зависят от времени. Ограничимся рассмотрением одномерного случая и будем опускать множитель $\exp(i\omega t)$. Волновое уравнение для N -компонентного поля X_α можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d[e]}{d\xi} = -i [T] [e], \quad (10.65)$$

Здесь использованы следующие обозначения. $[e]$ — N -компонентный вектор-столбец, содержащий комплексные амплитуды полевых переменных X_α , ($\alpha = 1, 2, \dots, N$); $[T]$ — квадратная матрица, определяемая локальными свойствами среды ($[T]$ не содержит дифференциальных операторов и зависит от продольной координаты как от параметра, она имеет одинаковую форму в однородных и неоднородных средах); $\xi = kx$ — безразмерная координата вдоль направления распространения волны; $k = \omega/c$ — волновое число, c — характерная скорость волнового движения (в электродинамике это скорость света в вакууме). Частотная дисперсия содержится в элементах матрицы $[T]$.

Представим вектор-столбец $[e]$ в виде:

$$[e] = \sum_{i=1}^N f_i(\xi) [\mathcal{E}]_i, \quad [\mathcal{E}]_i = \Phi_i [e]_i, \quad (10.66)$$

где $[e]_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$) — нормальные волны, определенные как полная система собственных векторов матрицы $[T]$:

$$[T] [e]_i = n_i [e]_i. \quad (10.67)$$

Подчеркнем, что поскольку матрица $[T]$ зависит от ξ как от параметра, то такая же зависимость присуща величинам $[e]_i$ и n_i . Собственные числа алгебраической проблемы (10.67) являются показателями преломления нормальных волн. Мы будем предполагать, что матрица $[T]$ имеет полный набор собственных векторов $[e]_i$, которые нормированы условием $[e^*]_i^T \cdot [e]_j = \delta_{ij}$, где $[e^*]_i$ — собственные векторы транспонированной матрицы¹⁰, удовлетворяющие уравне-

¹⁰В математике векторы $[e]_i$ называются *правыми*, а векторы $[e^*]_i$ — *левыми* собственными векторами матрицы $[T]$.

нию

$$[T]^T [e^*]_i = n_i [e^*]_i.$$

Подставляя разложение (10.66) в (10.65), приходим к уравнениям для комплексных амплитуд взаимодействующих волн:

$$\frac{df_i}{d\xi} + in_i(\xi) f_i = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N a_{ij} f_j, \quad a_{ij} = - [\mathcal{E}]_i^T \cdot \frac{d[\mathcal{E}]_j}{d\xi}. \quad (10.68)$$

Уравнения (10.68) определяют линейную связь между волнами в неоднородной среде, поскольку $a_{ij} \neq 0$. Множители $\Phi_i(\xi)$ находят из условия $a_{ii} = 0$, или, что тоже самое, из уравнения

$$\frac{1}{\Phi_i} \frac{d\Phi_i}{d\xi} + [\mathcal{E}]_i^T \cdot \frac{d[\mathcal{E}]_i}{d\xi} = 0. \quad (10.69)$$

Условие $a_{ii} = 0$ означает, что локальное значение показателя преломления не зависит от неоднородности среды.

Можно показать, что в приближении геометрической оптики система уравнений (10.65) имеют N решений вида $\Phi_i e_i \exp[-i \int^\xi n_i(\xi') d\xi']$, в которых множители $\Phi_i(\xi)$ определяются из уравнения (10.69). Точно такое же решение получается из уравнений (10.68), если в них не учитывать взаимодействие волн f_i , положив все $a_{ij} = 0$. Следовательно, учет взаимодействия нормальных мод неоднородной среды является выходом за пределы геометрической оптики. В процессе взаимодействия различные компоненты поля меняются несогласованно, нарушая локальную структуру данной нормальной волны, что ведет к появлению других волн.

Наиболее часто в теории волн рассматривается взаимодействие между двумя волнами (попутными или встречными), которое описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{d\xi} + in_1 f_1 &= a_{12} f_2, \\ \frac{df_2}{d\xi} + in_2 f_2 &= a_{21} f_1. \end{aligned} \quad (10.70)$$

Двухволновое приближение справедливо в случаях, если:

- волны распространяются в одном направлении, и дисперсионные характеристики $n_{1,2}(\xi)$ обеих волн сближаются настолько, что оказывается выполнимым условие $|n_1 - n_2| \sim \sqrt{|a_{12} a_{21}^*|}$;

- волны являются встречными, и обе дисперсионные кривые подходят близко к нулю.

Количественный анализ линейного взаимодействия волн, описываемого уравнениями (10.70), проведен в [124], и его результаты позволяют установить критерии, в каком случае можно ожидать эффективного преобразования взаимодействующих волн.

Мы не будем здесь подробно останавливаться на математической стороне вопроса, отсылая читателя к работе [124]. Отметим лишь, что взаимодействие может возникать не только за счет неоднородности среды, но и из-за нерегулярности ее границ. Такой эффект характерен, в частности, в неоднородных длинных линиях [129], плавно нерегулярных волноводах СВЧ диапазона [127], волоконных оптических световодах [118]. Уравнения, описывающие взаимодействие волн в таких системах, совпадают с уравнениями (10.68), однако в этом случае коэффициенты связи a_{ij} определяются локальными свойствами границ, а не неоднородностью среды. Эффект взаимодействия волн возникает из-за изменения коэффициентов связи вдоль волновода и его нельзя исключить простым переходом к новым собственным модам системы связанных волн, как это можно сделать для взаимодействующих волн с независимыми от координаты постоянными распространения и коэффициентами связи.

В качестве конкретного примера, рассмотрим взаимодействие мод в скрученном волоконном световоде. Благодаря совершенствованию технологии изготовления оптических волокон, стало возможным получение одномодовых световодов, сохраняющих поляризацию излучения на длинах в несколько сотен метров и более. В то же время, изучение эффектов сохранения, или, наоборот, необходимого преобразования поляризации, связано с перспективой применения таких волокон в системах оптической связи, гироскопах, оптических датчиках, сенсорах и т.д.

Регулярный двулучепреломляющий одномодовый световод аналогичен по своим свойствам анизотропной среде. В нем распространяются две практически линейно поляризованные собственные моды (называемые LP-модами), имеющие разные фазовые скорости. Направления поляризации мод перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости поперечного сечения волновода, они называются оптическими осями волокна. Систему координат в поперечном сечении удобно выбрать так, чтобы она совпадала с направлением оптических осей, соответственно амплитуды LP-мод обозначают как E_x и E_y , считая, что ось z направлена вдоль оси световода.

В идеально круглом оптическом волокне LP - моды вырождены, т.е. имеют

совпадающие фазовые скорости, однако в реальном световоде это вырождение снимается из-за отклонения формы поперечного сечения от круга, остаточной анизотропии материала световода, механических напряжений, а также из-за ряда других факторов. Уравнения взаимодействующих LP -мод в слабонаправляемом и слабоанизотропном волноводе имеют вид [118, 124]

$$\begin{aligned}\frac{dE_x}{d\xi} + in_x E_x &= \alpha E_y, \\ \frac{dE_y}{d\xi} + in_y E_y &= -\alpha E_x.\end{aligned}\tag{10.71}$$

Здесь α — действительный коэффициент связи, который определяется деформацией формы световода, воздействием внешних полей, анизотропией материала, и, в скрученных волокнах, азимутальным вращением оптических осей. В последнем случае коэффициент связи приблизительно равен скорости вращения осей: $\alpha \approx \psi'$, где ψ — угол между выбранным фиксированным направлением в пространстве и локальным направлением одной из оптических осей, штрих означает производную по безразмерной продольной координате. Абсолютное значение скорости вращения может достигать по порядку величины $|n_x - n_y|$, что приводит к эффективной связи LP -мод. Свойства нормальных волн оптического волокна в таком случае кардинально меняются. Наиболее существенно то, что моды становятся эллиптически поляризованными, что следует из выражений для показателей преломления $\tilde{n}_{1,2}$ и коэффициентов поляризации $\tilde{K}_{1,2}$ ($\tilde{K}_i = -iE_{i,y}/E_{i,x}$, $i = 1, 2$) нормальных мод однородно скрученного световода. Если $n_{x,y} = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$, то из (10.71) легко получить:

$$\begin{aligned}\tilde{n}_{1,2} &= \frac{1}{2}(n_x + n_y) \pm \psi' \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \\ \tilde{K}_{1,2} &= \tilde{q} \mp \sqrt{\tilde{q}^2 + 1}, \quad \tilde{q} = \frac{n_x - n_y}{2\psi'}.\end{aligned}\tag{10.72}$$

Такие моды называют *винтовыми*. Если волокно неоднородное, то $n_{x,y}$ и α не являются постоянными величинами, следовательно винтовые моды могут взаимодействовать, такое взаимодействие описывается уравнениями (10.70). Количественный анализ этой системы [124] приводит к выводу, что эффективное взаимодействие винтовых мод между собой возможно только в том случае, если существует участок волокна, на котором оно переходит из состояния сильно скрученного, в состояние слабоскрученного, или наоборот¹¹.

¹¹Интересно отметить, что в неоднородных жидких холестерических кристаллах эффективное взаимодействие винтовых волн происходит в областях, где спираль, описываемая в про-

Во многих приложениях (в частности в системах оптической связи) такая трансформация является нежелательным эффектом, поэтому следует избегать появления подобных нерегулярных участков. В других случаях, например в целях измерения локальных оптических параметров волокна, такая трансформация мод является полезным эффектом. В этом случае необходим детальный анализ амплитудного и фазового эффектов преобразования мод, который можно осуществить, обращаясь к количественным результатам решения уравнений (10.70).

В заключение отметим, что теория взаимодействия волн в неоднородных средах в настоящее время продолжает интенсивно развиваться. Подробную библиографию, относящуюся к этой области теории волн можно найти в [124, 130].

странстве концом *директора*, переходит из сильно закрученной в слабозакрученную или наоборот [124]. Напомним, что директором в жидких кристаллах называется единичный вектор, показывающий преимущественное направление длинных осей молекул, составляющих кристалл.

Список литературы

1. Трубецков Д. И., Рожнев А. Г. Лекции по теории колебаний и волн. Линейные колебания / Учеб. пособие для студентов физ. специальностей вузов. — Саратов : СГУ, 2011. — 184 с.
2. Пирс Д. Почти все о волнах. — М. : Мир, 1976. — 176 с.
3. Мякишев Г. Я., Буховцев Б. Б. Физика. Учебник для 11 класса средней школы. — М. : Просвещение, 1991. — С. 66–67.
4. Да Винчи Л. Избранные естественно — научные произведения. — М. : Изд-во АН СССР, 1955. — 1027 с. — С. 350.
5. Горелик Г. С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику. — М. : Гос. изд. ф. — м. лит — ры, 1959. — 572 с. — С. 144.
6. Крауфорд Ф. Волны. Берклевский курс физики. Т.3. — М. : Наука, 1974. — 529 с. — С. 149.
7. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. — М. : Мир, 1977. — 622 с.
8. Белецкий В. В. Очерки о движении космических тел. — М. : Наука, 1977. — 432 с.
9. Кларк А. Солнечный ветер. Библиотека современной фантастики. Т.6. — М. : Мол. гвардия, 1966. — 320 с.
10. Резников А. Е., Шварцбург А. А. Парусники эпохи гелиографических открытий // Природа. — 1991. — № 5. — С. 82–87.
11. Займан Д. Принципы теории твердого тела. — 2-е изд. — М. : Мир, 1974. — 472 с.
12. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. — М. : Наука, 1975. — 504 с.
13. Кузнецов А. П., Рожнев А. Г., Трубецков Д. И. Линейные колебания и волны. Сборник задач. — М. : Физматлит, 2008. — 128 с.
14. Бхатнагар П. Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. — М. : Мир, 1983. — 136 с.
15. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика. — М. : Наука, 1975. — 503 с. — Гл. 10.
16. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теории экситонов. — М. : Наука, 1979. — 432 с.
17. Сборник задач по теории колебаний / Л. В. Постников, В. И. Королев, Т. М. Тарантович и др. ; Под ред. Л. В. Постникова, В. И. Королева. — М. : Наука, 1978. — 272 с.
18. Киттель Ч. Квантовая теория твердых тел. — М. : Наука, 1967. — 492 с.

19. Хэнли Э., Тирринг В. Элементарная квантовая теория поля. — М. : ИЛ, 1963. — 316 с.
20. Каганов М. И. Электроны, фононы, магноны. — 2-е изд. — М. : Наука, 1979. — 96 с.
21. Неймарк Ю. И. Математические методы естествознания и техники. Вып. 3. — Н. Новгород : ННГУ, 1997. — Гл. 8.
22. Калинин В. И., Герштейн Г. М. Введение в радиофизику. — М. : Гостехиздат, 1957. — 660 с. — § 9.1.
23. Вундерлих Б., Баур Г. Теплоемкость линейных полимеров. — М. : Мир, 1972. — 240 с.
24. Kompfner R. The invention of the travelling – wave tube. — San Francisco Press, 1964. — 30 p.
25. Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ. — М. : Сов. радио, 1970. — 584 с.
26. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по сверхвысокочастотной электронике. — М. : Сов. радио, 1973. — 400 с.
27. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Гидродинамика. — 6-е изд. — М. : Физматлит, 2008. — 800 с.
28. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. — М. : Наука, 1982. — 336 с.
29. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Термодинамика и молекулярная физика. — 5-е изд. — М. : Физматлит, 2006. — 544 с. — §40.
30. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. — 2-е изд. — М. : Наука, 1970. — 492 с. — Гл. 4, § 1.
31. Лайтхилл Д. Волны в жидкостях. — М. : Мир, 1981. — 600 с.
32. Филипс О. Динамика верхнего слоя океана. — М. : Мир, 1969. — 268 с.
33. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. — М. : Мир, 1981. — 480 с.
34. Волны в океане / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров, К. А. Наугольных, С. А. Рыбак // Изв. вузов. Радиофизика. — 1976. — Т. 19. — С. 842–852.
35. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М. : Наука, 1973. — 343 с.
36. Стаценко А. Л. Волны на воде и “Заморские гости” Рериха // Квант. — 1972. — № 9. — С. 10–15. — См. также: Квант, 1990, № 1. С. 24–29, 62.
37. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. — М. : Наука, 1973. — 417 с.
38. Флюгге З. Задачи по квантовой механике. Ч. 2. — М. : Мир, 1974. — 315 с.
39. Митропольский З. С. Динамика внутренних гравитационных волн в океане. — Л. : Гидрометеиздат, 1981. — 302 с.
40. Монин А. С., Кошляков М. Н. Синоптические вихри или волны Россби в океане: Эксперимент и основы теории // Нелинейные волны / Под ред. А. В. Гапонова. — М., Наука. — С. 281–287.
41. Арцимович Л. А. Лекции по физике плазмы // Избранные труды: Атомная физика и физика плазмы. — М. : Наука, 1978. — С. 164–245.

42. Кролл Н., Трайвелпис С. Основы физики плазмы. — М. : Мир, 1975. — 526 с. — Гл. 4.
43. Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З. Физика плазмы для физиков. — М. : Атомиздат, 1979. — 320 с. — § 1.10.
44. Люисселл У. Связанные и параметрические колебания в электронике. — М. : ИЛ, 1963. — 351 с.
45. Клеммоу Ф., Доуэрты Д. Электродинамика частиц и плазмы. — М. : Мир, 1996. — 528 с.
46. Lonngren K. E., Hsuan H. C. S., Landt D. L. Properties of plasma waves defined by dispersion relation // IEEE Trans. Plasma Sci. — 1974. — Vol. 2. — P. 93–108.
47. Стил М., Вюраль Б. Взаимодействия волн в плазме твердого тела. — М. : Атомиздат, 1973. — 277 с.
48. Пожела Ю. К. Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках. — М. : Наука, 1977. — 368 с.
49. Владимиров В. В., Волков А. Ф., Мейлихов Е. З. Плазма полупроводников. — М. : Атомиздат, 1979. — 254 с.
50. Мандельштам Л. И. Лекции по некоторым вопросам теории колебаний. (1944 г.) // Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М. : Наука, 1972. — С. 410–437.
51. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. — М. : Сов. радио, 1988. — 440 с.
52. Островский Л. А., Рабинович М. И. Нелинейные и нестационарные волны // 4-ая Всесоюзная школа — семинар по дифракции и распространению волн. — Рязань : Изд-во Рязанск. радиотехн. ин-та, 1975. — С. . — Лекция 1.
53. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. — М. : НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2000. — 560 с. — гл. 14.
54. Левин М. Л. Как свет побеждает тьму: У.р. гамильтон и понятие групповой скорости // УФН. — 1978. — Т. 125. — С. 565–567.
55. Гамильтон У. Р. Исследования о колебании, связанном с теорией света // Уильям Роуэн Гамильтон. Избранные труды. Оптика. Динамика. Кватернионы / Под ред. Л.С. Полака. — М. : Наука, 1994. — С. 177–183.
56. М.Л. Левин: Жизнь. Воспоминания. Творчество. — 2-е изд. — Н. Новгород : ИПФ РАН, 1998. — 592 с. — (Первое издание - 1995 г.).
57. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов // УФН. — 1976. — Т. 118. — С. 339–367.
58. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — 2-е изд. — М. : Наука, 1988. — 304 с.
59. Лошаков Л. Н., Пчельников Ю. Н. О соотношении фазовой и групповой скоростей в линиях передачи электромагнитной энергии // Радиотехника. — 1981. — Т. 36, № 6. — С. 71–72.
60. Полевой В. Г., Рытов С. М. О четырехмерной групповой скорости // УФН. — 1978. — Т. 125. — С. 549–565.

61. Миллер М. А. Раздумья про раздумья. лекция 1 // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1994. — Т. 2, № 5. — С. 101–108.
62. Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Устойчивость движения. — М. : Наука, 1964. — 103 с. — Гл. 2.
63. Стэррок П. А. Кинематика нарастающих волн // Колебания сверхвысоких частот в плазме / Под ред. Г. А. Бернашевского, З. С. Чернова. — М. : ИЛ, 1961. — С. 71–112.
64. Рольфс К. Лекции по теории волн плотности. — М. : Мир, 1980. — 208 с.
65. Волькенштейн М. В. Общая биофизика. — М. : Наука, 1978. — 592 с. — § 8.4.
66. Жаботинский А. Концентрационные колебания. — М. : Наука, 1974. — 179 с.
67. Хакен Г. Синергетика. — М. : Мир, 1980. — 404 с. — С. 342–358.
68. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. — М. : Мир, 1979. — 512 с.
69. Шевчик В. В., Шведов Г. В., Соболева А. В. Волновые и колебательные явления в электронных потоках на сверхвысоких частотах. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1962. — 336 с. — Гл. 1.
70. Пирс Д. Лампа с бегущей волной. — М. : Сов. радио, 1952. — 229 с.
71. Пиддингтон Д. Растущие электромагнитные волны. растущие электрические волны пространственного заряда и двухлучевая ламп // Вопросы радиолокационной техники. — М. — № 6(36). — С. 53–66.
72. Электроника ламп с обратной волной / Под ред. В. Н. Шевчика, Д. И. Трубецкова. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1975. — 195 с.
73. Альтшулер Ю. Г., Татаренко А. Лампы малой мощности с обратной волной. — М. : Сов. радио, 1963. — с. — Табл. 1.1. С. 35.
74. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. — 2-е изд. — М. : Наука, 1984. — 384 с.
75. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М. : Мир, 1964. — 830 с. — Гл. 5, §1.
76. Лопухин В. М. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками. — М. : Гостехиздат, 1953. — 324 с. — Гл. 8.
77. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Физическая кинетика. — Наука : Наука, 1979. — 528 с.
78. Briggs R. Electron-stream interaction with plasmas. — Cambridge, Mass. : MIT Press, 1964. — 183 p.
79. Бриггс П. Двухпучковая неустойчивость // Достижения физики плазмы / Под ред. М. С. Рабиновича. — М. : Мир, 1974. — С. 132–171.
80. Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. — М. : Наука, 1981. — 176 с.
81. Ахиезер А. И., Половин Р. В. Критерии нарастания волн // УФН. — 1971. — Т. 104. — С. 185–200.
82. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. — М. : Наука, 1965. — 640 с.

83. Pierce J. R. An interesting wave amplifier // IRE Trans. on ED. — 1960. — Vol. 7. — P. 73–74.
84. Kyhl R. L., Websfer H. R. Breakup of hollow cylindrical electron beams // IRE Trans. on ED. — 1956. — Vol. 3. — P. 172–183.
85. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Т. 4. Оптика. — 3-е изд. — М. : Физматлит, 2005. — 792 с. — § 88.
86. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — 4-е изд. — М. : Физматлит, 2005. — 656 с.
87. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. — М. : Наука, 1990. — 384 с. — Гл. 2.
88. Вильгельмсон Х., Вейланд Я. Когерентное нелинейное взаимодействие волн в плазме. — М. : Энергоиздат, 1981. — 223 с. — Гл. 4.
89. Аскен Д., Нильсен О. Электрические соотношения для волн в системах с временной и пространственной дисперсией // ТИИЭР. — 1968. — Т. 57, № 8. — С. 83–84.
90. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. Нелинейные волны в неравновесных средах // Изв. вузов. Радиофизика. — 1976. — Т. 19. — С. 721–766.
91. Chu L. J. The kinetic power theorem. — 1951. — Paper presented at the IRE-PGED Conference, Durham, N.H.
92. Sturrock P. A. In what sence do show waves carrynegative energy // J. Appl. Phys. — 1960. — Vol. 31. — P. 2052–2056.
93. Незлин М. В. Волны с отрицательной энергией и аномальный эффект доплера // УФН. — 1976. — Т. 120. — С. 481–495.
94. Незлин М. В. Динамика пучков в плазме. — М. : Энергоиздат, 1982. — 264 с.
95. Шевчик В. Н. Основы электроники сверхвысоких частот. — М. : Сов. радио, 1959. — 306 с. — Гл. 5.
96. Louisell W. H., Pierce J. R. Power flow in electron beam devices // Proc. on the IRE. — 1955. — Vol. 43. — P. 425–427.
97. Островский Л. А., Степанянц Ю. А., Цимринг Л. Ш. Взаимодействие внутренних волн с течениями и турбулентностью в океане // Нелинейные волны. Самоорганизация / Ed. by А.В. Гапонова-Грехова, М. И. Рабиновича. — М. : Наука, 1983. — P. 204–239.
98. Benjamin T. B. The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // J. Fluid Mech. — 1963. — Vol. 16. — P. 436–450.
99. K. B. C., Brever G. R., Haeff A. V. The resistive wall amplifier // Proc. on the IRE. — 1953. — Vol. 41. — P. 865–874.
100. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме. — М. : Наука, 1967. — 287 с.
101. Бекефи Д. Радиационные процессы в плазме. — М. : Мир, 1971. — 438 с.
102. Cutler K. K. Mechanical travelling-wave oscillator // Bell Lab. Record. — 1954. — P. 134–138.

103. Гинзбург В. Л. Об излучении электрона, движущегося вблизи диэлектрика // ДАН СССР. — 1947. — Т. 6. — С. 145.
104. Гинзбург В. Л. Об излучении микроволн и их поглощении в воздухе // Изв. АН СССР. Сер. Физ. — 1947. — Т. 11. — С. 165–181.
105. Гинзбург В. Л. Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде // УФН. — 1959. — Т. 69. — С. 537–564.
106. Франк И. М. Эйнштейн и оптика // УФН. — 1979. — Т. 129. — С. 694–703.
107. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. — изд. — М. : Наука, 1980. — с.
108. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — 6-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 800 с. — § 112.
109. Buneman O., Levy R. H., Linson L. M. Stability of crossed-field electron beams // J. Appl. Phys. — 1966. — Vol. 37. — P. 3203–3222.
110. Гаврилов М. В., Трубецков Д. И. Волновые явления в электронном потоке малой плотности в скрещенных полях при распаде однопоточного состояния // Вопросы электроники СВЧ. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та, 1977. — № 10. — С. 156–181.
111. Лопухин В. М., Магалинский В. Г., Мартынов В. П. Шумы и параметрические явления в электронных приборах сверхвысоких частот. — М. : Наука, 1966. — 371 с.
112. Haddad G. I., Bevensee R. M. Start-oscillations of tapered backward-wave oscillator // IEEE Trans. on ED. — 1963. — Vol. 10, no. 6. — P. 389–393.
113. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — 5-е изд. — М. : Физматлит, 2004. — 224 с.
114. Боровиков В. А., Кинбер В. Е. Геометрическая теория дифракции. — М. : Связь, 1978. — 248 с.
115. Блохинцев Д. И. Акустика неоднородной движущейся среды. — 2-е изд. — М. : Наука, 1981. — 208 с.
116. Виноградова М. Б., Семенов А. А. Основы теории распространения ультракоротких радиоволн в тропосфере. — М. : Изд-во АН СССР, 1963. — 192 с.
117. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М. : Мир, 1984. — 512 с.
118. Снайдер А., Лав Д. Теория оптических волноводов. — М. : Радио и связь, 1987. — 656 с.
119. Шифф Л. Квантовая механика. — 2-е изд. — М. : ИЛ, 1959. — 473 с.
120. Мигдал А. Б. Качественные методы в квантовой теории. — М. : Наука, 1975. — 335 с.
121. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М. : Сов. радио, 1970. — 520 с.
122. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М. : Наука, 1979. — 832 с.

123. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. — 2-е изд. — М. : Наука, 1967. — 684 с.
124. Железняков В. В., Кочаровский В. В., Кочаровский В. В. Линейное взаимодействие электромагнитных волн в неоднородных слабоанизотропных средах // УФН. — 1983. — Т. 141, № 2. — С. 257–310.
125. Budden K. G. Radio Waves in the Ionosphere. — Cambridge, UK : Univ. Press, 1961. — 562 p.
126. Железняков В. В. Радиоизлучение Солнца и планет. — М. : Наука, 1964. — 560 с.
127. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. — М. : Изд-во АН СССР, 1961. — 216 с.
128. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. — М. : Наука, 1969. — с.
129. Литвиненко О. Н., Сошников В. И. Теория неоднородных линий и их применение в радиотехнике. — М. : Сов. радио, 1964. — с.
130. Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. Н. Взаимодействие волн в неоднородных средах. — Новосибирск : Наука, 1982. — 177 с.