ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и программой преподавания курса «Математика» для студентов Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными численными методами;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Дифференциальные уравнения – основной инструмент химической кинетики. Цель пособия – помочь студентам Института химии СГУ освоить основные методы решения дифференциальных уравнений и получить практические навыки при решении типовых задач по данной теме.

В пособии рассматриваются основные виды обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их решения. Подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют примеры. По каждой теме приведены задачи для самостоятельного решения, которые позволят обучающимся научиться применять полученные знания на практике, тем самым будут способствовать лучшему пониманию и усвоению материала. Ответы к задачам помогут проконтролировать правильность решения. В конце приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала и список литературы.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических направлений подготовки, изучающих высшую математику.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Дифференциальным уравнением называется соотношение, связывающее независимые переменные, неизвестную функцию этих независимых переменных и ее производные (или дифференциалы).

В случае, когда неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, дифференциальное уравнение называется *обыкновенным.*

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

Обыкновенным дифференциальным уравнением n*–го порядка* (ОДУ) называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

где x–независимая переменная, $y(x)$–неизвестная функция, $y', y'', ..., y^{(n)}$–производные функции.

Примеры.

1. $x^2 y' + 5xy = y^2$-обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка.

2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 4xy\dfrac{dy}{dx} = x^2$- обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

3. $y'^3 + y''y''' = x$-обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка.

Решение (*интегрирование*) ОДУ (1) заключается в отыскании функций $y = \varphi(x)$, называемых *решением* (*интегралом*) уравнения, которые удовлетворяют этому уравнению для всех значений x в определенном конечном или бесконечном интервале (a, b).

Общее решение (*общий интеграл*) ОДУ n*–го* порядка имеет вид

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0,$$

где x–независимая переменная, $y = y(x)$–искомая функция, $C_1, C_2, ..., C_n$–*произвольные постоянные* (*постоянные интегрирования*).

Если в общем интеграле всем произвольным постоянным присвоить любые числовые значения, то получим *частное решение* (*частный интеграл*) ОДУ. Каждый частный выбор этих постоянных дает частное решение. График каждого частного решения ОДУ называется *интегральной кривой* этого уравнения. Совокупность всех таких графиков образует *семейство интегральных кривых*.

Задача Коши (*начальная задача*) состоит в нахождении частного решения уравнения (1), удовлетворяющего n начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1},$$

где $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ – заданные числа.

По начальным условиям определяются n постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Некоторые дифференциальные уравнения имеют еще дополнительные решения – особые решения (интегралы). *Особым решением* дифференциального уравнения называется решение, которое не может быть получено из общего решения ни при каком значении произвольных постоянных, включая $\pm\infty$.

При решении дифференциального уравнения надо стремиться к тому, чтобы наряду с определением общего решения были найдены также особые.

2. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Обыкновенным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

где x – независимая переменная, $y(x)$ – неизвестная функция, y' – производная функции.

Общее решение дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \text{или} \quad \Phi(x, y) = C.$$

Общее решение включает одну произвольную постоянную величину.

При некотором частном значении произвольной постоянной, получается частное решение ОДУ (2).

Задача Коши заключается в отыскании решения уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$y(x_0) = y_0.$$

Простейшим дифференциальным уравнением 1-го порядка является уравнение

$$y' = f(x). \qquad (3)$$

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим общий интеграл уравнения (3) в виде

$$y = \int f(x)dx + C.$$

Если к исходному уравнению (2) добавить начальное условие, определив $y = y_0$, при $x = x_0$, то получим уравнение для определения постоянной C и, тем самым, определим частный интеграл рассматриваемого ОДУ.

Пример.

$$y' = \frac{5x^4 + e^x}{x^5 + e^x}, \quad y = 5, \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Р е ш е н и е.

Данное уравнение является простейшим ОДУ вида (3). Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4 + e^x}{x^5 + e^x} \to dy = \frac{5x^4 + e^x}{x^5 + e^x} dx \to \int dy = \int \frac{5x^4 + e^x}{x^5 + e^x} dx.$$

При интегрировании правой части воспользуемся заменой

$$t = x^5 + e^x \to dt = \left(x^5 + e^x\right)' dx \to dt = (5x^4 + e^x) dx.$$

$$y = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|x^5 + e^x\right| + C.$$

Следовательно, $y = \ln\left|x^5 + e^x\right| + C$ – общее решение исходного ОДУ.

Для определения частного решения подставим начальные условия $y = 5$, $x = 0$ в общее решение. Получим

$$5 = \ln\left|0^5 + e^0\right| + C \Rightarrow 5 = \ln 1 + C \Rightarrow 5 = 0 + C \Rightarrow C = 5.$$

Тогда частное решение, соответствующее данному начальному условию, будет иметь вид $y = \ln\left|x^5 + e^x\right| + 5$.■

2.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Обыкновенное дифференциальное уравнение *1-го порядка с разделяющимися переменными* имеет вид

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) dy = 0. \tag{4}$$

Если обе части уравнения разделить на $P_2(x) \cdot Q_1(y) \neq 0$, получим

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = 0. \tag{5}$$

Тогда общий интеграл ОДУ первого порядка с разделяющимися переменными имеет вид

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} dy = C. \tag{6}$$

Кроме найденного общего интеграла (6) уравнения (4), ему могут также удовлетворять решения, полученные из уравнения

$$P_2(x) \cdot Q_1(y) = 0.$$

Если эти решения не входят в общий интеграл (6), то они будут особыми решениями.

П р и м е р ы.

1. $x\left(1 + y^2\right)^{1/2} dx + y\left(1 + x^2\right)^{1/2} dy = 0.$

Р е ш е н и е.

Исходное уравнение имеет вид (4) и является уравнением с разделяющимися переменными. Приведем уравнение к виду (5). Для этого разделим обе части уравнения на $\left(1+y^2\right)^{1/2}\cdot\left(1+x^2\right)^{1/2}\neq 0$. Получим

$$\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}dx+\frac{y}{\left(1+y^2\right)^{1/2}}dy=0.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$\int\frac{x}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}dx+\int\frac{y}{\left(1+y^2\right)^{1/2}}dy=C.$$

Отсюда

$$\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}=C \quad \mathbf{(}C>0\mathbf{)},$$

($C>0$, так как рассматриваются только арифметические значения корня).

Теперь следует решить вопрос об особых решениях. Для этого рассмотрим уравнение

$$\left(1+y^2\right)^{1/2}\cdot\left(1+x^2\right)^{1/2}=0.$$

Действительных решений это уравнение не имеет, а потому и нет особых решений.■

2. $xydx+\left(1+y^2\right)\sqrt{1+x^2}\,dy=0,\qquad y(\sqrt{8})=1.$

Р е ш е н и е.

Необходимо найти решение задачи Коши. Рассмотрим сначала дифференциальное уравнение задачи. Оно имеет вид (4) и является уравнением с разделяющимися переменными. Приведем уравнение к виду (5). Для этого разделим обе части уравнения на $y\cdot\sqrt{1+x^2}\neq 0$:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{1+y^2}{y}dy=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\int\left(\frac{1}{y}+y\right)dy=C$$

или общий интеграл

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=C.$$

Рассмотрим вопрос об особых решениях. Для этого надо решить уравнение

$$y\cdot\sqrt{1+x^2}=0.$$

Решение этого уравнения $y=0$ (уравнение $\sqrt{1+x^2}=0$ не имеет действительных корней). Решение $y=0$ является особым решением, так как оно, удовлетворяя уравнению, не может быть получено из общего уравнения ни при одном частном значении C.

Решение задачи Коши получим, подставляя в общий интеграл начальные значения $x=\sqrt{8}$, $y=1$:

$$\sqrt{1+8}+\ln|1|+\frac{1}{2}=C; \qquad C=\frac{7}{2}.$$

Частное решение примет вид

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=\frac{7}{2}, \quad \text{или} \quad 2\sqrt{1+x^2}+\ln y^2+y^2=7. \blacksquare$$

3. $y'=5\sqrt{y}$, $\qquad y(0)=25$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=5\sqrt{y}.$$

Отсюда получим $dy-5\sqrt{y}dx=0$. Оно имеет вид (4) и является уравнением с разделяющимися переменными. Приведем уравнение к виду (5). Для этого разделим обе части уравнения на $5\sqrt{y}\neq 0$:

$$\frac{dy}{5\sqrt{y}}-dx=0.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{5}\int\frac{dy}{\sqrt{y}}-\int dx=C.$$

или общий интеграл исходного уравнения:

$$\frac{2}{5}\sqrt{y}-x=C. \tag{7}$$

Преобразовав (7), получим общий интеграл уравнения в более удобном виде

$$\frac{2}{5}\sqrt{y}-x=C, \Rightarrow \frac{2}{5}\sqrt{y}=x+C, \Rightarrow \sqrt{y}=\frac{5}{2}(x+C), \Rightarrow y=\frac{25}{4}(x+C)^2.$$

Чтобы получить особое решение, рассмотрим уравнение $5\sqrt{y}=0$, или $y=0$. Это решение будет особым, так как оно не может быть получено из общего решения ни при каком значении произвольной постоянной C.

Частное решение получим из (7), подставляя в него значения $x=0$, $y=25$:

$$\frac{2}{5}\sqrt{25}-0=C; \Rightarrow C=2.$$

Решение исходной задачи Коши:

$$y=\frac{25}{4}(x+2)^2. \blacksquare$$

4. $y'+y^2=1.$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx}=1-y^2.$$

Отсюда получим $dy-\left(1-y^2\right)dx=0$. Уравнение имеет вид (4) и является уравнением с разделяющимися переменными. Приведем уравнение к виду (5). Для этого разделим обе части уравнения на $1-y^2\neq 0$:

$$\frac{dy}{1-y^2}-dx=0.$$

Интегрируя обе части уравнения, получим общий интеграл исходного дифференциального уравнения

$$\int\frac{dy}{1-y^2}-\int dx=C,$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|-x=C.$$

Отсюда

$$\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right|=2(x+C); \quad \left|\frac{1+y}{1-y}\right|=e^{2(x+C)};$$

$$\frac{1+y}{1-y}=e^{2(x+C)}, \text{ или } \frac{1+y}{1-y}=-e^{2(x+C)}.$$

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1) $\dfrac{1+y}{1-y}=e^{2(x+C)}; \quad y=\dfrac{e^{2(x+C)}-1}{e^{2(x+C)}+1};$

2) $\dfrac{1+y}{1-y}=-e^{2(x+C)}; \quad y=\dfrac{e^{(x+C)}-e^{-(x+C)}}{e^{(x+C)}+e^{-(x+C)}}. \blacksquare$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $x^2\left(y^3+5\right)dx+\left(x^3+5\right)y^2dy=0, \quad y(0)=1.$

2. $tgydx-x\ln xdy=0, \quad y(e)=\frac{\pi}{2}.$

3. $\sqrt{1-y^2}dx+\sqrt{1-x^2}dy=0, \quad y(0)=1.$

4. $(1+y^2)dx+(1+x^2)dy=0, \quad y(1)=2.$

Ответы и указания.

1. Общий интеграл: $(x^3+5)(y^3+5)=C$. Решение задачи Коши: $(x^3+5)(y^3+5)=30$.

2. Общий интеграл: $x=e^{C\sin y}$. (Произвольную постоянную удобно взять в виде $\ln|C|$). Решение задачи Коши: $x=e^{\sin y}$

3. Общий интеграл: $\arcsin x+\arcsin y=\arcsin C$. (Произвольную постоянную удобно взять в виде $\arcsin C$). Если в решении взять синус обеих частей и, учитывая, что $\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$, общее решение примет вид: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C$. Особое решение: $y=\pm 1$. Решение задачи Коши: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$.

4. Общий интеграл: $arctgx+arctgy=arctgC$. (Произвольную постоянную удобно взять в виде $arctgC$). Если в решении взять тангенс обеих частей и, учитывая, что $tg(arctgx)=x$, общее решение примет вид: $\dfrac{x+y}{1-xy}=C$.

Решение задачи Коши: $\dfrac{x+y}{1-xy}=-3$.

2.2. Дифференциальные уравнения вида $y'=f(ax+by+c)$

Уравнения вида

$$y'=f(ax+by+c) \tag{8}$$

приводятся к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки

$$ax+by+c=z; \quad a+by'=z'; \quad y'=\frac{z'-a}{b}.$$

Уравнение (8) примет вид

$$\frac{z'-a}{b}=f(z); \quad z'=bf(z)+a;$$

$$\frac{dz}{dx}=bf(z)+a, \text{ или } \quad \frac{1}{bf(z)+a}dz-dx=0.$$

Последнее уравнение – уравнение, в котором переменные разделены. В общем решении уравнения следует вернуться к старой переменной, заменив z на $ax+by+c$.

Пример.

$$y' = \frac{1}{3x+y}.$$

Решение.

Исходное уравнение имеет вид (8). Для его решения сделаем подстановку: $3x + y = z$. Дифференцируя, находим: $3 + y' = z'$; $y' = z' - 3$. Поэтому $z' - 3 = \frac{1}{z}$; $\Rightarrow z' = \frac{1+3z}{z}$; $\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1+3z}{z}$.

Разделяем переменные, получим

$$\frac{z}{1+3z}dz - dx = 0.$$

Интегрируя, находим

$$\int \frac{z}{1+3z}dz - \int dx = C;$$

Откуда, вычисляя интегралы, получаем

$$\frac{1}{3}z - \frac{1}{9}\ln|1+3z| - x = C,$$

а, заменяя z на $3x + y$, имеем общее решение исходного уравнения

$$\frac{1}{3}(3x+y) - \frac{1}{9}\ln|9x+3y+1| - x = C. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $y'(y+x) = 1.$
2. $y' = 3x + 4y.$
3. $y' = \frac{2}{x+2y} - 3.$

Ответы и указания.

1. Общий интеграл: $y - \ln|x+y+1| = C$. (Подстановка: $x + y = z$).
2. Общее решение: $y = Ce^{4x} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{16}$.
3. Общее решение: $5x + 10y + 4\ln|5x+10y-4| = C - 25x$.

2.3. Однородные уравнения

Функция $P(x,y)$ называется *однородной степени* m, если выполняется условие

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P(x,y). \tag{9}$$

Если в ОДУ первого порядка вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{10}$$

функции $P(x,y), Q(x,y)$ являются однородными функциями степени m, то уравнение (10) называется *однородным* ОДУ.

Однородное уравнение может также иметь вид

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (11)$$

Уравнения (10)-(11) заменой $t = \dfrac{y}{x}$, приводятся к уравнению с разделяющимися переменными.

Примеры.

1. $y^2 dx + \left(x^2 - xy\right)dy = 0.$

Решение.

Здесь $P(x,y) = y^2$, $Q(x,y) = x^2 - xy$. Для них выполняется условие однородности (9):

$$P(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^2 = \lambda^2 y^2 = \lambda^2 P(x,y),$$
$$Q(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 - \lambda x \cdot \lambda y = \lambda^2\left(x^2 - xy\right) = \lambda^2 Q(x,y).$$

Сделаем замену: $t = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow dy = xdt + tdx$.

Подставив замену в уравнение, получим

$$(tx)^2 dx + \left(x^2 - x \cdot tx\right)\left(xdt + tdx\right) = 0.$$
$$t^2 x^2 dx + x^2(1-t)\left(xdt + tdx\right) = 0 \Rightarrow t^2 dx + (1-t)\left(xdt + tdx\right) = 0$$
$$(1-t)xdt + (1-t)tdx + t^2 dx = 0 \Rightarrow (1-t)xdt + tdx = 0.$$

В последнем уравнении с разделяющимися переменными, разделим переменные

$\dfrac{(t-1)dt}{t} + \dfrac{dx}{x} = 0$ и проинтегрируем $t - \ln|t| + \ln|x| = C.$

Возвращаясь к исходным величинам, получим общее решение

$\dfrac{y}{x} - \ln\left|\dfrac{y}{x}\right| - \ln|x| = C$, или $\dfrac{y}{x} = \ln|y| + C$.■

2. $y' = \dfrac{y}{x} + \sin\dfrac{y}{x}, \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2}.$

Решение.

Данное уравнение имеет вид (11).

Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}; \Rightarrow dy = \left(\frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}\right)dx.$$

Сделаем замену: $t = \dfrac{y}{x}; \Rightarrow y = tx; \Rightarrow dy = x\,dt + t\,dx$. В результате подстановки получаем

$$xdt + tdx = (t + \sin t)dx; \quad \Rightarrow \quad xdt = \sin t dx; \quad \Rightarrow \frac{dt}{\sin t} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln\left|tg\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \ln|x| + \ln C; \Rightarrow \ln\left|tg\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \ln C|x|; \quad \Rightarrow tg\left(\frac{t}{2}\right) = C|x|,$$

откуда $\frac{t}{2} = arctg(Cx)$. Производя обратную замену $t = \frac{y}{x}$, находим общее решение исходного уравнения

$$y = 2xarctg(Cx).$$

Для решения задачи Коши, используем начальное условие

$$\frac{\pi}{2} = 2arctgC; \quad \Rightarrow arctgC = \pi; \quad \Rightarrow C = 1.$$

Тогда частное решение примет вид: $y = 2xarctgx$.■

Задачи для самостоятельного решения.

1. $(x + y)dx + (y - x)dy = 0.$

2. $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} + 1.$

3. $xy' + x\cos\frac{y}{x} - y + x = 0.$

Ответы и указания.

1. Общий интеграл: $arctg\frac{y}{x} = \ln\left(C\sqrt{x^2 + y^2}\right).$

2. Общее решение: $e^{\frac{y}{x}} = \frac{Cx}{1 - Cx}$. (Вычисляя интеграл, выполнить следующие преобразования: $\int\frac{1}{e^t + 1}dt = \int\frac{e^t + 1 - e^t}{e^t + 1}dt = t - \ln\left(e^t + 1\right) + C$).

3. Общее решение: $tg\frac{y}{2x} = \ln\frac{C}{x}$.

2.4. Уравнения, приводящиеся к однородным

Дифференциальное уравнение, *приводящееся к однородному,* имеет вид

$$(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0. \tag{12}$$

Данное уравнение путем соответствующей замены может быть приведено к однородному уравнению (10).

Здесь $P(x,y) = a_1x + b_1y + c_1$, $Q(x,y) = a_2x + b_2y + c_2$ – линейные функции, которые можно воспринимать как аналитическое описание прямых линий. Тогда метод решения распадается на две части в зависимости от того, пересекаются прямые или нет.

1) Прямые линии пересекаются, то есть $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ и система линейных уравнений $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0, \end{cases}$ имеет единственное решение: $x = \alpha; \ y = \beta$.

Для дифференциального уравнения следует сделать замену переменных, полагая $x = u + \alpha; \ y = v + \beta$.

2) Прямые линии не пересекаются, то есть $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$.

Для дифференциального уравнения в этом случае следует сделать замену переменных $a_1 x + b_1 y = t$, что позволит разделить переменные.

Примеры.

1. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$.

Решение.

Данное уравнение имеет вид (12). Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

определитель $\Delta = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3 \neq 0$. Следовательно, система имеет единственное решение: $x = \alpha = -1; \ y = \beta = 1$.

Произведем в исходном уравнении замену переменных:

$x = u - 1; \ \Rightarrow dx = du; \ \ y = v + 1; \ \Rightarrow dy = dv$.

Тогда уравнение примет вид

$$(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0.$$

Полученное уравнение является однородным. Для его решения сделаем замену $t = \dfrac{v}{u}; \ \Rightarrow v = tu; \ \Rightarrow dv = udt + t\,du$, после подстановки которой придем к уравнению с разделяющимися переменными

$$2\left(t^2 + t + 1\right)udu + u^2(1 + 2t)dt = 0.$$

Интегрирование последнего уравнения дает результат

$$u\sqrt{t^2 + t + 1} = C.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получим

$$x^2 + y^2 + xy + x - y = C_1, \quad \text{где} \quad C_1 = C^2 - 1. \blacksquare$$

2. $(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0$.

Решение.

Для системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y + 2 = 0, \\ 2x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$$

определитель $\Delta = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$.

Сделаем замену: $x+y=t; \;\Rightarrow dx+dy=dt$. Тогда уравнение примет вид

$$(t+2)dx+(2t-1)(dt-dx)=0 \quad \text{или} \quad (3-t)dx+(2t-1)dt=0.$$

Интегрирование последнего уравнения дает результат

$$-2t-5\ln|t-3|+x=-C$$

и, окончательно, $x+2y+5\ln|x+y-3|=C$.■

Задачи для самостоятельного решения.

1. $2(x+y)dy+(3x+3y-1)dx=0, \quad y(0)=2.$
2. $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$
3. $(x-y+4)dy+(x+y-2)dx=0.$

Ответы и указания.

1. Общий интеграл: $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=C$. Решение задачи Коши: $3x+2y-4+2\ln|x+y-1|=0$.
2. Общее решение: $x^2+xy-y^2-x+3y=C$.
3. Общее решение: $x^2+2xy-y^2-4x+8y=C$.

2.5. Уравнения в полных дифференциалах

Полным дифференциалом функции двух переменных $u(x,y)$ является выражение

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy. \tag{13}$$

Если необходимо найти решение дифференциального уравнения

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0, \tag{14}$$

про левую часть которого известно, что это полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, то есть $du=0$, то общий интеграл уравнения (14) будет иметь вид

$$u(x,y)=C.$$

Если левая часть (14) является полным дифференциалом функции $u(x,y)$, то, учитывая выражение для полного дифференциала (13), необходимо, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P(x,y); \tag{15}$$

$$\frac{\partial u}{dy}=Q(x,y). \tag{16}$$

Уравнения (15)-(16) позволяют найти функцию $u(x,y)$.

И, наконец, чтобы уравнение (14) являлось уравнением в полных дифференциалах должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}. \qquad (17)$$

Условие (17) является необходимым и достаточным для того, чтобы дифференциальное уравнение (14) являлось уравнением в полных дифференциалах.

Примеры.

1. $\left(6xy^2 + 2y^3\right)dx + \left(6x^2y + 6xy^2 + 2y\right)dy = 0$.

Решение.

Здесь $P(x,y) = 6xy^2 + 2y^3$; $Q(x,y) = 6x^2y + 6xy^2 + 2y$. Проверим выполнение условия (17).

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\left(6xy^2 + 2y^3\right)}{\partial y} = 12xy + 6y^2;$$

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\left(6x^2y + 6xy^2 + 2y\right)}{\partial x} = 12xy + 6y^2.$$

Таким образом, условие (17) выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Для решения уравнения найдем функцию $u(x,y)$, для которой $du = 0$. Воспользуемся соотношением (15)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 6xy^2 + 2y^3 .$$

Проинтегрировав это уравнение по переменной x, получим

$$u(x,y) = \int \frac{\partial u}{\partial x}dx = \int P(x,y)dx = \int \left(6xy^2 + 2y^3\right)dx = 3x^2y^2 + 2xy^3 + C(y) .$$

При интегрировании функции двух переменных по x постоянная интегрирования будет зависеть от y и является неизвестной функцией $C(y)$. Для определения ее продифференцируем последнее выражение по y.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 6x^2y + 6xy^2 + C'(y) .$$

Учитывая (16), получим

$$6x^2y + 6xy^2 + 2y = 6x^2y + 6xy^2 + C'(y) .$$

Отсюда $C'(y) = 2y; \Rightarrow C(y) = y^2$.

Тогда $u(x,y) = 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^2$. Следовательно, общий интеграл уравнения $u(x,y) = C$ в данном случае будет иметь вид

$$3x^2y^2 + 2xy^3 + y^2 = C. \blacksquare$$

2. $(2x+2xy)dx+\left(x^2-2y\right)dy=0$.

Р е ш е н и е.

Здесь $P(x,y)=2x+2xy;\quad Q(x,y)=x^2-2y$. Проверим, что данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, то есть выполняются условия (15).

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=2x;\quad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=2x.$$

Для решения уравнения найдем функцию $u(x,y)$, для которой $du=0$. Для определения функции $u(x,y)$ имеем систему

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+2xy,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x^2-2y.\end{cases} \tag{18}$$

Интегрируя первое уравнение по переменной x (y в этом случае считается фиксированным), получаем

$$u(x,y)=\int\frac{\partial u}{\partial x}dx==\int(2x+2xy)dx=x^2+x^2y+C(y).$$

Здесь $C(y)$ является неизвестной функцией от одного аргумента y. Для ее определения подставим $u(x,y)$ во второе уравнение системы (18), заключаем: $x^2+C'(y)=x^2-2y$, то есть $C'(y)=-2y$ и $C(y)=-y^2$. Общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$x^2+x^2y-y^2=C.$$

Разрешив последнее уравнение относительно y, получим общее решение уравнения

$$y=\frac{x^2\pm\sqrt{x^2+4x-4C}}{2}.\blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. $2xydx+\left(x^2-y^2\right)dy=0.$.
2. $\left(2-9xy^2\right)xdx+\left(4y^2-6x^3\right)ydy=0.$
3. $e^{-y}dx-\left(2y+xe^{-y}\right)dy=0.$

О т в е т ы и у к а з а н и я.

1. Общее решение: $3x^2y-y^3=C$.
2. Общее решение: $x^2-3x^3y^2+y^4=C$.
3. Общее решение: $xe^{-y}-y^2=C$.

2.6. Линейные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид $a(x)y' + b(x)y = d(x)$, или

$$y' + P(x)y = f(x), \tag{19}$$

где $P(x) = \dfrac{b(x)}{a(x)}$, $f(x) = \dfrac{d(x)}{a(x)}$, при условии $a(x) \neq 0$.

Если в уравнении (19) $f(x) = 0$, то уравнение называется *линейным однородным*, если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *линейным неоднородным.*

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' + P(x)y = 0. \tag{20}$$

Решение этого уравнения легко получается разделением переменных

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx$$

и имеет вид

$$y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{21}$$

Для решения линейного неоднородного уравнения (19) используется метод вариации произвольного постоянного (метод Лагранжа). В этом методе решение неоднородного уравнения ищется в виде (21), где произвольная постоянная C считается функцией, зависящей от x, то есть

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{22}$$

Для определения функции $C(x)$ необходимо решение (22) подставить в уравнение (19), получить уравнение относительно $C'(x)$, проинтегрировать его и полученное значение $C(x)$ подставить в (22).

Как доказывается в теории интегрирования линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка (19) общее решение этого уравнения равно сумме двух слагаемых, из которых одно является общим решением соответствующего однородного уравнения (20), а другое– частным решением неоднородного уравнения (оно получается из общего при $C = 0$).

Рассмотрим применение данного метода на примерах.

Примеры.

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Решение.

Данное уравнение – линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка.

Решение однородного уравнения $y' + 2xy = 0$ получим, используя (21), где $P(x) = 2x$, тогда

$$y = Ce^{-\int 2x dx}; \ \Rightarrow y = Ce^{-x^2}.$$

Общее решение исходного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{-x^2}. \qquad (23)$$

Подставим последнее выражение для y в неоднородное уравнение

$$\left(C(x)e^{-x^2}\right)' + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$C'(x) = x; \ \Rightarrow C(x) = \frac{x^2}{2} + C.$$

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (23), получим общее решение неоднородного уравнения

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2},$$

или

$$y = Ce^{-x^2} + \frac{x^2}{2}.$$

Первое слагаемое в общем решении Ce^{-x^2} – общее решение однородного линейного уравнения, соответствующего данному, а второе слагаемое $\frac{x^2}{2}$ определяет частное решение исходного неоднородного уравнения.■

2. $y' - 4y = \cos x, \quad y(0) = 1.$

Решение.

Для решения задачи Коши необходимо найти общее решение заданного уравнения. Данное уравнение – линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка, где $P(x) = -4$.

Решение соответствующего однородного уравнения получим, используя (21): $y = Ce^{\int 4dx}; \ \Rightarrow y = Ce^{4x}$.

Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)e^{4x}. \qquad (24)$$

Подставим последнее выражение для y в неоднородное уравнение

$$\left(C(x)e^{4x}\right)' - 4C(x)e^{4x} = \cos x,$$

$$C'(x)e^{4x} + 4C(x)e^{4x} - 4C(x)e^{4x} = \cos x,$$

$$C'(x)e^{4x} = \sin x, \ \Rightarrow C'(x) = e^{-4x}\sin x,$$

$C(x)=\int e^{-4x}\sin x dx$.

Вычисляя интеграл с использованием формулы интегрирования по частям, получим

$C(x)=\dfrac{e^{-4x}}{17}(\sin x-4\cos x)+C$.

Подставляя найденную функцию $C(x)$ в (24), получим общее решение неоднородного уравнения

$$y=\left[\frac{e^{-4x}}{17}(\sin x-4\cos x)+C\right]e^{4x},$$

или

$$y=Ce^{4x}+\frac{1}{17}(\sin x-4\cos x).$$

Чтобы определить частное решение, будем использовать начальное условие: $x=0;\ y=1$. Подставив эти значения в общее решение неоднородного уравнения, найдем значение произвольной постоянной C.

$$1=C-\frac{4}{17},\ \Rightarrow C=\frac{21}{17}.$$

Частным решением будет

$$y=\frac{1}{17}\left(21e^{4x}+\sin x-4\cos x\right).\blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. $y'+y=e^{x};\quad y(0)=1$.

2. $y'+tgxy=\cos^{2}x;\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3. $xy'+y=x^{2}+3x+2;\quad y(1)=\dfrac{29}{6}$.

О т в е т ы и у к а з а н и я.

1. Общее решение: $y=Ce^{-x}+\dfrac{1}{2}e^{x}$. Частное решение: $y=\dfrac{1}{2}e^{-x}+\dfrac{1}{2}e^{x}$? или $y=shx$.

2. Общее решение: $y=C\cos x+\sin x\cos x$. (При решении воспользоваться формулой $e^{\ln N}=N$). Частное решение: $y=\sin x\cos x$.

3. Общее решение: $y=\dfrac{C}{x}+\dfrac{x^{2}}{3}+\dfrac{3x}{2}+2$. (Обе части уравнения разделить на x). Частное решение: $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{x^{2}}{3}+\dfrac{3x}{2}+2$.

2.7. Уравнения, интегрируемые в параметрической форме

Дифференциальные уравнения вида

$$x = \varphi(y'), \tag{25}$$

$$y = \psi(y'), \tag{26}$$

легко интегрируются в параметрической форме.

Полагая $y' = p$ или

$$dy = pdx \tag{27}$$

где $p -$ параметр, уравнение (25) запишется в виде

$$x = \varphi(p). \tag{28}$$

Продифференцируем уравнение (28): $dx = \varphi'(p)dp$. Подставляя это выражение в (27), получим

$$dy = p\varphi'(p)dp.$$

Интегрируя последнее равенство, совместно с (28), будем иметь решение в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = \int p\varphi'(p)dp. \end{cases}$$

Аналогично интегрируется уравнение (26). Полагая $y' = p$, где $p -$ параметр, уравнение (26) запишется в виде

$$y = \psi(p). \tag{29}$$

Отсюда $dy = \psi'(p)dp$. Учитывая (27), получим $pdx = \psi'(p)dp$ или $dx = \dfrac{\psi'(p)}{p}dp$. Интегрируя последнее равенство совместно с (29), получим решение уравнения в параметрической форме

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\psi'(p)}{p}dp, \\ y = \psi(p). \end{cases}$$

Иногда удается исключить параметр и получить общий интеграл уравнения.

Примеры.

1. $x = y' + \ln y'$.

Решение.

Данное уравнение вида (25). Положим $y' = p; \ \Rightarrow dy = pdx$. Подставив замену в уравнение, получим

$$x = p + \ln p.$$

Отсюда

$$dx = dp + \frac{1}{p}dp; \quad \Rightarrow \ pdx = pdp + dp; \quad \Rightarrow \ dy = (p+1)dp.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим $y=\int (p+1)dp; \ \Rightarrow \ y=\frac{p^2}{2}+p+C$. Решение исходного уравнения в параметрической форме будет иметь вид

$$\begin{cases} x=p+\ln p, \\ y=\dfrac{(p+1)^2}{2}+C. \end{cases}$$

Здесь параметр p легко исключить. Из второго равенства получаем $p=\sqrt{2(y-C)}-1 \ (p>0)$. Подставляя найденное выражение для p в первое равенство, находим общее решение уравнения в следующем виде:

$$x=\sqrt{2(y-C)}-1+\ln\left(\sqrt{2(y-C)}-1\right).\blacksquare$$

2. $y=e^{y'}(y'-1)$.

Решение.

Данное уравнение вида (26). Положим $y'=p; \ \Rightarrow dy=pdx$. Подставив замену в уравнение, получим

$$y=e^p(p-1).$$

Отсюда

$$pdx=\left(e^p(p-1)-1\right)dp; \ \Rightarrow \ pdx=pe^p dp; \ \Rightarrow \ dx=e^p dp.$$

Интегрируя последнее уравнение, получим $x=\int e^p dp; \ \Rightarrow \ x=e^p+C$. Решение исходного уравнения в параметрической форме будет иметь вид

$$\begin{cases} x=e^p+C, \\ y=e^p(p-1). \end{cases}$$

Здесь параметр p легко исключить. Из первого равенства получаем $p=\ln(x-C)$. Подставляя найденное выражение для p во второе равенство, находим общее решение уравнения в следующем виде:

$$y=(x-C)(\ln(x-C-1).\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\arcsin\left(\frac{x}{y'}\right)=y'$.
2. $y=y'\ln y'$.
3. $x=2(\ln y'-y')$.

Ответы и указания.

1. Общее решение: $\begin{cases} x = p\sin p, \\ y = \left(p^2 - 1\right)\sin p + p\cos p + C. \end{cases}$ (Перейти к уравнению $x = y'\sin y'$).

2. Общее решение: $\begin{cases} x = 0{,}5\ln^2 p + \ln p + C, \\ y = p\ln p. \end{cases}$.

3. Общее решение: $\begin{cases} x = 2(\ln p - p), \\ y = 2p - p^2 + C. \end{cases}$

3. УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

3.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Решение дифференциального уравнения n-ого порядка вида

$$y^{(n)} = f(x) \tag{30}$$

находится n-кратным интегрированием.

Примеры.

1. $y''' = x^2$.

Решение.

Данное уравнение вида (30). Интегрируя уравнение три раза, получим его общее решение.

$$y'' = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C_1,$$

$$y' = \int\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx = \frac{1}{3}\int x^3 dx + C_1\int dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2 = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int\left(\frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{1}{12}\int x^4 dx + C_1\int x dx + C_2\int dx = \frac{1}{12}\cdot\frac{x^5}{5} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Окончательный вид общего решения

$$y = \frac{x^5}{60} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3. \blacksquare$$

2. $y'' = xe^{-x}$.

Решение.

Данное уравнение вида (30). Интегрируя уравнение два раза, получим его общее решение.

$$y' = \int xe^{-x}dx \overset{(\text{интегрируется по частям})}{=} -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int\left(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1\right)dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

Окончательный вид общего решения

$$y = e^{-x}(x+2) + C_1 x + C_2. \blacksquare$$

3. $y''' = \frac{1}{x}$; $y(1)=1$; $y'(1)=2$; $y''(1)=-2$.

Решение.

Найдем общее решение уравнения в исходной задаче Коши. Уравнение задачи имеет вид (30) и его общее решение получим путем интегрирования.

$$y'' = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C_1,$$

$$y' = \int(\ln x + C_1)dx = \int \ln x dx + C_1 \int dx \overset{(\text{интегрируется почастям})}{=} x\ln x - x + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int(x\ln x - x + C_1 x + C_2)dx = \int x\ln x dx - \int x dx + C_1 \int x dx + C_2 \int dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Для получения задачи Коши воспользуемся начальными условиями:

$x=1$, $y''=-2$. Тогда первый результат интегрирования позволит определить C_1. В самом деле, $-2 = \ln 1 + C_1;\ \Rightarrow C_1 = -2$ и

$$y' = x\ln x - x - 2x + C_2.$$

$x=1$, $y'=2$. Тогда второй результат интегрирования позволит определить C_2. В самом деле, $2 = -1 - 2 + C_2;\ \Rightarrow C_2 = 5$ и

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} - x^2 + 5x + C_3.$$

$x=1$, $y=1$. Тогда последний результат интегрирования позволит определить C_3. В самом деле, $1 = -\frac{3}{4} - 1 + 5 + C_3;\ \Rightarrow C_3 = -\frac{9}{4}$ и

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{3x^2}{4} - x^2 + 5x - \frac{9}{4}.$$

Сделав приведение подобных членов, получим решение задачи Коши в виде

$$y = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{7x^2}{4} + 5x - \frac{9}{4}. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $y^{(5)} = e^{2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$, $y''(0)=3$, $y'''(0)=-1$, $y^{(4)}(0)=2$.
2. $y''' = x\sin x$; $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=2$.
3. $y^{(4)} = \sin x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Ответы и указания.

1. $y=\frac{1}{32}e^{2x}+\frac{1}{16}x^4-\frac{5}{24}x^3+\frac{23}{16}x^2-\frac{33}{16}x-\frac{1}{32}$.

2. $y=x\cos x-3\sin x+x^2+2x$.

3. $y=\sin x+\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

3.2. Уравнения вида $F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0$

Порядок дифференциального уравнения вида

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\ldots,y^{(n)})=0, \tag{31}$$

в котором отсутствует функция y, можно понизить, если за новую неизвестную функцию взять низшую из производных данного уравнения, то есть, полагая $z(x)=y^{(k)}(x)$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$F(x,z,z',\ldots,z^{(n-k)})=0.$$

Порядок исходного уравнения понизился на k единиц.

Примеры.

1. $xy'''=2y''$.

Решение.

Уравнение относится к виду (31). Положим $z=y''$ и относительно z получим уравнение

$$xz'=2z,$$

которое является уравнением с разделяющимися переменными. Находим его общее решение

$$z(x)=C_1x^2.$$

Возвращаясь к замене, получаем уравнение

$$y''=C_1x^2,$$

которое является уравнением вида (30). Находим его общее решение

$$y=\frac{C_1}{3}x^3+C_2x+C_3.$$

Учитывая, что C_1 является произвольной постоянной, ответ можно записать в виде

$$y=C_1x^3+C_2x+C_3.\blacksquare$$

2. $xy''=y'\ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

Решение.

Данное уравнение не содержит искомую функцию и относится к виду (31). Положим $z=y'$, тогда исходное уравнение будет иметь вид

$$xz' = z\ln\left(\frac{z}{x}\right), \quad \text{или} \quad z' = \left(\frac{z}{x}\right)\ln\left(\frac{z}{x}\right).$$

Полученное уравнение является однородным первого порядка. Для его решения сделаем замену $\frac{z}{x} = t$, откуда $z = tx \Rightarrow z' = t'x + t$.

После замены получим уравнение с разделяющимися переменными $t'x + t = t\ln t$, или $t'x = t(\ln t - 1)$. Разделив переменные, получим

$$\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, находим

$\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$, или $\ln t - 1 = C_1 x$; $\Rightarrow t = e^{1+C_1 x}$.

Возвращаясь к замене $\frac{z}{x} = t$, получим $z = xe^{1+C_1 x}$ и, учитывая, $y' = z$, приходим к уравнению $y' = xe^{1+C_1 x}$, интегрируя которое, получим

$$y = \int xe^{1+C_1 x}dx = \frac{1}{C_1}xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2}e^{1+C_1 x} + C_2. ■$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. $y'' = ay'$.
2. $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' = 2$.
3. $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.

О т в е т ы и у к а з а н и я.

1.. $y = C_1 e^{ax} + C_2$. (Ввести обозначение $C_1 = \frac{C_1}{a}$).

2.. $y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$.

3. $y = \frac{\left(3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8\right)}{24}$.

3.3. Уравнения вида $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Порядок дифференциального уравнения вида

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (32)$$

в котором отсутствует независимая переменная x, можно понизить, если за новую независимую переменную взять y. Полагая $y' = z(y)$, где $z(y)$– новая неизвестная функция, по правилу дифференцирования сложной функции, находим, что $y'' = z'z$, $y''' = \left(z''z + z'^2\right)z$ и т.д. Тогда исходное уравнение примет вид $F_1(y, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0$, то есть порядок понизился на единицу.

Примеры.

1. $1 + y'^2 = yy''$.

Решение.

Уравнение относится к виду (32). Положим $y' = z, \quad y'' = z'z$. Уравнение примет вид

$$1 + z^2 = yzz'.$$

Это – уравнение первого порядка относительно z с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{zdz}{1+z^2} = \frac{dy}{y}; \Rightarrow \ln(1+z^2) = 2\ln y + 2\ln C_1; \Rightarrow 1 + z^2 = C_1^2 y^2; \Rightarrow z = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

Отсюда, возвращаясь к переменной y, имеем

$$y' = \pm\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}; \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx; \Rightarrow \frac{1}{C_1}\ln\left(C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}\right) = \pm\left(x + C_2\right)$$

или

$$y = \frac{1}{2C_1}\left(e^{\pm(x+C_2)C_1} + e^{\mp(x+C_2)C_1}\right); \Rightarrow y = \frac{1}{C_1} chC_1\left(x + C_2\right).■$$

2. $yy'' = y'^2; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2$.

Решение.

Уравнение задачи Коши относится к виду (32). Положим $y' = z, \quad y'' = z'z$. Уравнение примет вид

$$yzz' = z \; .$$

Данное уравнение будет уравнением с разделяющимися переменными, общим решением которого будет

$$z = C_1 y.$$

Подставив в последнее уравнение y' вместо z, получим уравнение первого порядка, в котором y уже является функцией x:

$$y' = C_1 y.$$

Решив это уравнение, получим общее решение исходного уравнения

$$y = C_2 e^{C_1 x}.$$

Для определения частного решения используем начальные условия. Из того, что при $x = 0$, $y = 1$, найдем C_2. В самом деле,

$$1 = C_2 e^{C_1 \cdot 0}, \Rightarrow C_2 = 1.$$

Тогда решение уравнения примет вид: $y = e^{C_1 x}$. Отсюда $y' = C_1 e^{C_1 x}$. Так как при $x = 0$, $y' = 2$, найдем C_1. В самом деле,

$$2 = C_1 e^{C_1 \cdot 0}, \Rightarrow C_1 = 2.$$

Окончательно, решением задачи Коши будет функция $y = e^{2x}$.■

Задачи для самостоятельного решения.

1. $y''(2y+3) - y'^2 = 0.$
2. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.
3. $y'' = \dfrac{y'}{\sqrt{y}}$.

Ответы и указания.

1. $0{,}5\ln(2y+3) = C_1 x + C_2$.
2. $y = e^{\frac{x+C_2}{x+C_1}}$.
3. $x = \sqrt{y} - 0{,}5C_1 \ln(2\sqrt{y} + C_1) + C_2$.

4. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Большое число процессов описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x). \qquad (33)$$

где $P(x), Q(x), f(x)$ – функции переменной x.

Отличительной чертой линейного уравнения является то, что искомая функция y и все ее производные входят в это уравнение в первой степени.

Предполагается, что функции $P(x), Q(x), f(x)$ непрерывны в промежутке (a,b). Функции $P(x), Q(x)$ называются *коэффициентами* уравнения.

Если в уравнении (33) $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*, если $f(x) \neq 0$, то уравнение называется *неоднородным.*

4.1. Линейные однородные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \qquad (34)$$

Если функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями уравнения (34), то и функция

$$\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad (35)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, тоже является решением этого уравнения. При этом если $y_1(x)$, $y_2(x)$ – линейно-независимые функции, то есть $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq const$, то (35) общее решение дифференциального уравнения.

Совокупность двух решений линейного однородного уравнения второго порядка, определенных и линейно-независимых в промежутке (a,b), называется *фундаментальной системой решений* этого уравнения.

Пример.

$y'' + y = 0.$

Решение.

Для данного уравнения легко найти $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$ и для них справедливо $\dfrac{\sin x}{\cos x} \neq const$, следовательно, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x. ■$$

Можно доказать, что если $y_1(x)$ – частное решение линейного однородного уравнения (34), то второе его частное решение, линейно независимое с первым, находится по формуле

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx. \tag{36}$$

Это дает возможность интегрировать линейные однородные уравнения второго порядка, для которых известно одно частное решение, сразу, не прибегая к понижению порядка.

Примеры.

1. Найти общее решение уравнения $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y = 0$, если известно его частное решение $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

Решение.

Уравнение имеет вид (34), где $P(x) = \dfrac{2}{x}$. Так как известно одно частное решение, второе частное решение, линейно-независимое с первым, будем искать по формуле (36). Для этого вычислим $\int \dfrac{2}{x} dx = 2\ln x = \ln x^2$.

Тогда

$$y_2 = \frac{\sin x}{x}\int \frac{x^2 e^{-\ln x^2}}{\sin^2 x}dx = \frac{\sin x}{x}\int \frac{x^2 e^{\ln x^{-2}}}{\sin^2 x}dx = \frac{\sin x}{x}\int \frac{x^2 x^{-2}}{\sin^2 x}dx = \frac{\sin x}{x}\int \frac{1}{\sin^2 x}dx =$$
$$= \frac{\sin x}{x}\cdot(-ctgx) = -\frac{\cos x}{x}$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$\bar{y} = C_1\frac{\sin x}{x} - C_2\frac{\cos x}{x}. ■$$

2. Найти общее решение уравнения $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, если известно его частное решение $y_1 = x$. Найти частное решение при начальных условиях: $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Решение.

Приведем данное уравнение к виду (34)

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = 0.$$

Здесь $P(x) = -\frac{x}{x-1}$. Используя первое частное, найдем с помощью (36) второе частное решение. Предварительно вычислим

$$\int\frac{x}{x-1}dx = \int\frac{x-1+1}{x-1}dx = \int dx + \int\frac{dx}{x-1} = x - \ln(x-1).$$

Подставляя необходимые данные в (36), получим

$$y_2 = x\int\frac{e^{-(x-\ln(x-1)}}{x^2}dx = x\int\frac{e^x e^{\ln(x-1)}}{x^2}dx = x\int\frac{(x-1)e^x}{x^2}dx = x\left[\int\frac{e^x}{x}dx - \int\frac{e^x}{x^2}dx\right] =$$

$$\overset{\substack{(\textit{интегрирование}\\ \textit{первого интеграла}\\ \textit{по частям})}}{=} \left\{\int\frac{e^x}{x}dx = \begin{bmatrix} u = \frac{1}{x}, & du = -\frac{1}{x^2}dx \\ dv = e^x dx, & v = e^x \end{bmatrix} = \frac{1}{x}e^x + \int\frac{e^x}{x^2}dx\right\} =.$$

Итак, $y_2 = e^x$. Следовательно, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$\bar{y} = C_1 x + C_2 e^x. \quad (37)$$

Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, то есть, чтобы решить задачу Коши, надо начальные условия подставить в систему уравнений, которая состоит из общего решения и его производной, определить из этой системы произвольные постоянные и подставить их значения в найденное общее решение.

Дифференцируя общее решение (37), получаем систему

$$\begin{cases} \bar{y} = C_1 x + C_2 e^x, \\ \bar{y}' = C_1 + C_2 e^x. \end{cases}$$

Подставляем в нее начальные условия: $x=0;\quad y(0)=\bar{y}=1;\quad y'(0)=\bar{y}'=2$

$$\begin{cases}1=C_1\cdot 0+C_2e^0,\\ 2=C_1+C_2e^0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=C_2,\\ 2=C_1+C_2\end{cases}\Rightarrow C_1=1,\ C_2=1.$$

Искомое частное решение: $\bar{y}=x+e^x$.■

Задачи для самостоятельного решения.

Найти общие решения линейных однородных уравнений второго порядка и решения задачи Коши по известным первым частным решениям этих уравнений и заданным начальным условиям.

1. $(1-\ln x)y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{1}{x^2}y=0;\ y_1=\ln x;\ y(1)=2,\ y'(1)=4$.

2. $y''+tgx\cdot y'+\cos^2 x\cdot y=0;\ y_1=\cos(\sin x);\ y(0)=3,\ y'(0)=2$.

3. $y''+\dfrac{1}{x}y'-\dfrac{9}{x^2}y=0;\ y_1=x^3;\ y(3)=1,\ y'(3)=\dfrac{4}{5}$.

Ответы и указания.

1. $y_2=x$. Общее решение: $\bar{y}=C_1\ln x+C_2x$. Решение задачи Коши: $y=2\ln x+2x$. (При вычислении интеграла $\int\dfrac{1}{\ln x}dx$ применить формулу интегрирования по частям. Учесть $e^{\ln(\ln x-1)}=\ln x-1$).

2. $y_2=\sin(\sin x)$. Общее решение: $\bar{y}=C_1\cos(\sin x)+C_2\sin(\sin x)$. Решение задачи Коши: $\bar{y}=3\cos(\sin x)+2\sin(\sin x)$.

3. $y_2=\dfrac{1}{x^3}$. Общее решение: $\bar{y}=C_1x^3+C_2\dfrac{1}{x^3}$. Решение задачи Коши: $\bar{y}=\dfrac{1}{30}x^3+\dfrac{27}{10x^3}$.

4.2. Линейные однородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y''+py'+qy=0, \tag{38}$$

где $p,\ q$ –постоянные числа (коэффициенты уравнения).

Общее решение $\bar{y}=\bar{y}(x)$ уравнения (38) имеет вид

$$\bar{y}=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \tag{39}$$

где $y_1(x),\ y_2(x)$ – частные линейно-независимые решения однородного уравнения (38).

Для определения $y_1,\ y_2$ необходимо составить характеристическое уравнение для уравнения (38)

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Корни этого уравнения определяются по формуле

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

При вычислении корней может возникнуть один из трех случаев:

1) если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, то $k_1 \neq k_2$ – действительные числа. В этом случае частные решения однородного уравнения будут иметь вид

$$y_1 = e^{k_1 x}, \ \ y_2 = e^{k_2 x},$$

и общее решение $\bar{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

2) если $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то $k_1 = k_2 = k$ – действительные числа. В этом случае частные решения однородного уравнения будут иметь вид

$$y_1 = e^{kx}, \ \ y_2 = xe^{kx},$$

и общее решение $\bar{y} = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$.

3) если $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ – комплексно-сопряженные числа. В этом случае частные решения однородного уравнения будут иметь вид

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

и общее решение $\bar{y} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$.

П р и м е р ы.

Найти общее решение линейного однородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. $y'' - 3y' + 2y = 0.$

Р е ш е н и е.

Характеристическое уравнение $k^2 - 3k + 2 = 0; \ \Rightarrow k_1 = 1, \ k_2 = 2$.

Корни характеристического уравнения действительные и различные. Частные линейно-независимые решения уравнения будут иметь вид

$$y_1 = e^x, \ \ y_2 = e^{2x}.$$

Тогда общее решение уравнения, согласно (39)

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}. \blacksquare$$

2. $y'' - 6y' + 9y = 0.$

Р е ш е н и е.

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 9 = 0; \ \Rightarrow k_1 = k_2 = 3$.

Корни характеристического уравнения действительные и равные. Частные линейно-независимые решения уравнения будут иметь вид

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = xe^{3x}.$$

Тогда общее решение уравнения, согласно (39)

$$\bar{y} = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x},$$

или окончательно

$$\bar{y} = e^{3x}\left(C_1 + C_2 x\right).\blacksquare$$

3. $y'' + y = 0.$

Решение.

Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0; \ \Rightarrow k_1 = i, \ k_2 = -i.$

Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, $\alpha = 0, \ \beta = 1.$ Частные линейно-независимые решения уравнения будут иметь вид

$$y_1 = e^{0x}\cos x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin x, \quad \Rightarrow y_1 = \cos x, \ y_2 = \sin x$$

Тогда общее решение уравнения, согласно (39)

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.\blacksquare$$

4. $y'' - 2y' + 2y = 0, \ \ y(\pi) = -2, \ \ y'(\pi) = -3.$

Решение.

Характеристическое уравнение

$k^2 - 2k + 2k = 0; \ \ \Rightarrow k_1 = 1 + i, \ k_2 = 1 - i.$

Корни характеристического уравнения комплексно сопряженные, $\alpha = 1, \ \beta = 1.$ Частные линейно-независимые решения уравнения будут иметь вид

$$y_1 = e^{x}\cos x, \quad y_2 = e^{x}\sin x.$$

Тогда общее решение уравнения, согласно (39)

$$\bar{y} = C_1 e^{x}\cos x + C_2 e^{x}\sin x, \quad \text{или}$$

$$\bar{y} = e^{x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x). \tag{40}$$

Для определения произвольных постоянных из начальных условий надо найти $\bar{y}'$:

$$\bar{y}' = e^{x}\left[\left(C_2 + C_1\right)\cos x + \left(C_2 - C_1\right)\sin x\right]. \tag{41}$$

Подставляя в (40) и (41) начальные условия, получим систему для определения произвольных постоянных

$$\begin{cases} -2 = -e^{\pi}C_1, \\ -3 = -e^{\pi}(C_1 + C_2) \end{cases} \Rightarrow C_1 = 2e^{-\pi}, \ \ C_2 = e^{-\pi}.$$

Искомое решение, удовлетворяющее начальным условиям, получим, подставляя найденные значения в (40): $\bar{y} = e^{x-\pi}(2\cos x + \sin x).\blacksquare$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $y'' - 2y' + y = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 4$.

2. $y'' + y' + y = 0, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

3. $y'' + 9y' + 20y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = -1$.

Ответы и указания.

1. Общее решение: $\bar{y} = e^{x}\left(C_1 + C_2(x+1)\right)$. Решение задачи Коши: $\bar{y} = 2e^{x}(1+x)$.

2. Общее решение: $\bar{y} = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. Решение задачи Коши: $\bar{y} = e^{-\frac{x}{2}}\left(2\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)$.

3. Общее решение: $\bar{y} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$. Решение задачи Коши: $\bar{y} = e^{x}$.

4.3. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение второго порядка (33). Для решения данного уравнения необходимо определить общее решение соответствующего однородного уравнения и любое частное решение неоднородного уравнения. Их сумма будет являться общим решением неоднородного уравнения. Однако нахождение необходимых слагаемых в общем случае затруднительно и только в некоторых частных случаях задача может быть решена достаточно легко.

Одним из методов решения линейного неоднородного уравнения является метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).

Получив общее решение соответствующего однородного уравнения в виде (35)

$$\bar{y} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

поступают так: полагают, что в этом решении величины C_1 и C_2 являются не постоянными, а функциями независимой переменной x, и записывают решение (33) в виде

$$y = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2. \tag{42}$$

Для определения функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляют систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 = 0, \\ C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' = f(x). \end{cases} \tag{43}$$

Определитель этой системы

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{44}$$

называется *определителем Вронского*. Так как функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, их определитель Вронского не равен нулю и система (43) всегда имеет решение и притом единственное.

Решая эту систему относительно $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, получим

$$\begin{cases} C_1'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}, \\ C_2'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} C_1'(x)=-\dfrac{y_2 f(x)}{W}, \\ C_2'(x)=\dfrac{y_1 f(x)}{W}. \end{cases}$$

Из последней системы интегрированием находим:

$$\begin{aligned} C_1(x)&=-\int\frac{y_2 f(x)}{W}dx+C_1, \\ C_2(x)&=\int\frac{y_1 f(x)}{W}dx+C_2. \end{aligned} \tag{45}$$

Подставив (45) в (42), и, раскрывая скобки, получим общее решение линейного неоднородного уравнения (33)

$$y=C_1y_1+C_2y_2+y_2\int\frac{y_1 f(x)}{W}dx-y_1\int\frac{y_2 f(x)}{W}dx.$$

Первые два слагаемые составляют общее решение однородного уравнения, а последние два слагаемые – частное решение неоднородного уравнения. Обозначив частное решение неоднородного уравнения через $\tilde{y}(x)$, получаем формулу частного решения неоднородного уравнения второго порядка

$$\tilde{y}=y_2\int\frac{y_1 f(x)}{W}dx-y_1\int\frac{y_2 f(x)}{W}dx. \tag{46}$$

Примеры.

1. Найти общее решение уравнения $x^2y''-4xy'+6y=x^4-x^2$, зная, что частным решением соответствующего ему однородного уравнения является функция $y_1=x^2$.

Решение.

Преобразуем уравнение к виду (33), в котором коэффициент при старшей производной равен единице. Для этого обе части уравнения разделим на x^2. В результате получим

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = x^2 - 1.$$

Правая часть уравнения $f(x) = x^2 - 1$.

Однородное уравнение, соответствующее данному, будет иметь вид

$$y'' - \frac{4}{x} y' + \frac{6}{x^2} y = 0.$$

Уравнение имеет вид (34), где $P(x) = -\frac{4}{x}$. Так как известно одно частное решение, второе частное решение, линейно-независимое с первым, будем искать по формуле (36). Для этого вычислим $\int \frac{4}{x} dx = 4 \ln x = \ln x^4$.

Тогда $y_2 = x^2 \int x^4 e^{-\ln x^4} dx = x^2 \int x^4 e^{\ln x^{-4}} dx = x^2 \int \frac{x^4}{x^4} dx = x^2 \int dx = x^3$.

Таким образом, общее решение однородного уравнения будет иметь вид

$$\bar{y} = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Определим частное решение неоднородного уравнения по формуле (46). В соответствие с (44) определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x^3 \\ 2x & 3x^2 \end{vmatrix} = 3x^4 - 2x^4 = x^4.$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx = \int \frac{x^2 \left(x^2 - 1 \right)}{x^4} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = x + \frac{1}{x}.$$

$$\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = \int \frac{x^3 \left(x^2 - 1 \right)}{x^4} dx = \int \left(x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \ln|x|.$$

Подставляя в (46) значения интегралов и частные решения уравнения, получим

$$\tilde{y} = y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = x^3 \left(x + \frac{1}{x} \right) - x^2 \left(\frac{x^2}{2} - \ln|x| \right) = \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x|.$$

В результате общее решение заданного уравнения примет вид

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3 + \frac{x^4}{2} + x^2 + x^2 \ln|x|.$$

2. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{ctgx}{x}$.

Решение.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее данному

$$y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0.$$

Частные решения последнего уравнения ранее были найдены: $y_1 = \frac{\sin x}{x}$, $y_2 = -\frac{\cos x}{x}$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$\bar{y} = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x}.$$

Определим частное решение неоднородного уравнения по формуле (46). В соответствие с (44) определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\sin x}{x} & -\frac{\cos x}{x} \\ \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} & \frac{x\sin x + \cos x}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2}.$$

$$\int \frac{y_1 f(x)}{W} dx = \int \frac{x^2 \sin x ctgx}{x^2} dx = \int \cos x dx = \sin x.$$

$$\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = -\int \frac{x^2 \cos x ctgx}{x^2} dx = -\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx = \int \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} dx = -\cos x - \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|.$$

Подставляя в (46) значения интегралов и частные решения уравнения, получим

$$\tilde{y} = y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{W} dx = -\frac{\cos x}{x}\sin x - \frac{\sin x}{x} \cdot \left(-\cos x - \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\right) =$$

$$= \frac{\sin x}{x} \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|.$$

Таким образом, общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$y = C_1 \frac{\sin x}{x} - C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|. \blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Найти общие решения линейных неоднородных уравнений второго порядка, зная одно частное решение соответствующего однородного уравнения.

1. $x^2 y'' - xy' + y = 3x^2$; $y_1 = \ln x$.

2. $x^2 y'' - 2x \cdot y' + 2y = x^5 \ln x$; $y_1 = x^2$.

3. $x^2 y'' - 2y = x^2$; $y_1 = \frac{1}{x}$.

О т в е т ы и у к а з а н и я.

1. $y = C_1 x + C_2 x \ln|x| + \frac{3}{4}x^3$.

2. $y = C_1 x^2 + C_2 x + \frac{x^2}{12}\ln|x| - \frac{7}{144}x^5$.

3. $y = C_1 \dfrac{1}{x} + C_2 x^2 + \dfrac{1}{3} x^2 \ln x$.

4.4. Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{47}$$

где p, q – постоянные числа (коэффициенты уравнения).

Общее решение $y(x)$ уравнения (47) имеет вид

$$y = \bar{y} + \tilde{y}, \tag{48}$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x)$ является общим решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (47), вида (39), а $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ – любое частное решение неоднородного уравнения (47).

Для определения общего решения однородного уравнения следует решить уравнение $y'' + py' + qy = 0$.

Для определения частного решения неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами можно воспользоваться универсальным методом вариации произвольных постоянных. Однако определить частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения без применения аппарата интегрирования можно в том случае, если функция $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \tag{49}$$

где α, β – постоянные величины, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены от x степеней n, m соответственно.

Метод побора частного решения по виду правой части (49) уравнения (47) называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Частное решение уравнения (47) следует искать в виде

$$\tilde{y} = x^r e^{\alpha x}\left(R_l(x)\cos\beta x + S_l(x)\sin\beta x\right), \tag{50}$$

где r равен количеству корней характеристического уравнения, равных $\alpha + \beta i$, $R_l(x)$, $S_l(x)$ – многочлены от x степени $l = \max(n, m)$, имеющими вид

$$\begin{aligned} R_l(x) &= A_0 x^l + A_1 x^{l-1} + \ldots + A_{l-1} x^{l-1} + A_0, \\ S_l(x) &= B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + B_{l-1} x^{l-1} + B_0. \end{aligned} \tag{51}$$

Постоянные коэффициенты A_i, B_i многочленов $R_l(x)$, $S_l(x)$ в (51) являются неизвестными, определив которые будем иметь частное решение неоднородного уравнения.

При определении вида частного решения (50), следует учесть, что если функция $f(x)$ содержит хотя бы одну из функций $\sin\beta x$ или $\cos\beta x$, то выражение (50) должно содержать оба многочлена $R_l(x)$, $S_l(x)$.

Чтобы найти неопределенные коэффициенты A_i, B_i необходимо выполнить следующие действия:

1) найти производные первого и второго порядков от частного решения $\tilde{y}$;

2) подставить найденные производные $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ вместо y', y'' в уравнение (47);

3) приравнять коэффициенты при соответствующих степенях x (или при функциях $\sin\beta x$ и $\cos\beta x$) в левой и правой частях полученного уравнения, получив систему линейных алгебраических уравнений;

4) решить систему, определив коэффициенты A_i, B_i.

Найденные значения неопределенных коэффициентов A_i, B_i подставить в выражение (51) и, наконец, записать общее решение y уравнения (47), подставив в выражение (48) найденные значения $\bar{y}$, $\tilde{y}$.

Правая часть уравнения (47) может иметь один из следующих частных видов:

1) $f(x) = ae^{\alpha x}$, a – постоянная, $\{\alpha + \beta i \equiv \alpha\}$;

2) $f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x$, a, b – постоянные, $\{\alpha + \beta i \equiv \beta i\}$;

3) $f(x) = P_n(x)$, $\{\alpha + \beta i \equiv 0\}$;

4) $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, $\{\alpha + \beta i \equiv \alpha\}$;

5) $f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x$, $\{\alpha + \beta i \equiv \beta i\}$;

6) $f(x) = e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$, a, b – постоянные.

Примеры.

Найти общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$.

Решение.

Общее решение линейного неоднородного ОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y = \bar{y} + \tilde{y},$$

где $\bar{y} = \bar{y}(x)$ – общее решение однородного уравнения, соответствующего исходному, а $\tilde{y} = \tilde{y}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения.

Рассмотрим однородное уравнение

$$y'' - 2y' - 3y = 0.$$

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k - 3 = 0;\ \Rightarrow k_1 = -1,\ k_2 = 3.$

Тогда общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид

$$\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}.$$

Определим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Так как функция $f(x) = e^{4x}$ имеет вид (49) ($\alpha = 4, \beta = 0, P_n(x) = 1$ – многочлен нулевой степени), то частное решение неоднородного уравнения $\tilde{y}$ будем искать в виде

$$\tilde{y} = Ae^{4x}.$$

Отсюда, $\tilde{y}' = 4Ae^{4x}$, $\tilde{y}'' = 16Ae^{4x}$. Подставляя производные в исходное уравнение, получим

$$16Ae^{4x} - 8Ae^{4x} - 3Ae^{4x} = e^{4x}; \ \Rightarrow 5Ae^{4x} = e^{4x}; \ \Rightarrow 5A = 1; \ \Rightarrow A = {}^{1}\!/_{5}.$$

Таким образом, $\tilde{y} = \frac{1}{5}e^{4x}$ и общее решение неоднородного уравнения окончательно примет вид

$$y = C_1 e^{-x} + cC_2 e^{3x} + \frac{1}{5}e^{4x}. \blacksquare$$

2. $y'' - 6y' + 25y = 3\sin x$.

Р е ш е н и е.

Общее решение данного уравнения будем искать в виде (48).

Для определения $\bar{y}$ решим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 6y' + 25y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 25 = 0$. Корни $k_1 = 3 + 4i$, $k_2 = 3 - 4i$ – комплексно-сопряженные числа, где $\alpha = 3$, $\beta = 4$. Следовательно,

$$\bar{y} = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x).$$

Определим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Так как функция $f(x) = 3\sin x$ имеет вид (49) ($\alpha = 0, \beta = 1, Q_m(x) = 3$ – многочлен нулевой степени), то частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде

$$\tilde{y} = A\sin x + B\cos x,$$

где A, B – постоянные, которые необходимо найти.

$$\tilde{y}' = (A\sin x + B\cos x)' = A\cos x - B\sin x.$$

$$\tilde{y}'' = (A\cos x - B\sin x)' = -A\sin x - B\cos x.$$

Для определения A, B, подставим найденные выражения в исходное уравнение.

$$-A\sin x - B\cos x - 6\cdot(A\cos x - B\sin x) + 25(A\sin x + B\cos x) = 3\sin x.$$

Раскроем в последнем уравнении скобки и сгруппируем слагаемые в левой части уравнения

$$(-A - 6A + 25B)\cos x + (-B + 6B + 25A)\sin x = 3\sin x;$$

$$(7A + 25B)\cos x + (5B + 25A)\sin x = 3\sin x.$$

В последнем уравнении приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ в левой и правой частях уравнений

$$\begin{cases} -7A + 25B = 0, \\ 25A + 5B = 3. \end{cases}$$

Решением системы являются значения $A = \dfrac{15}{132}$, $B = \dfrac{7}{220}$.

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$\tilde{y} = \frac{15}{132}\sin x + \frac{7}{220}\cos x.$$

Следовательно, общее решение исходного уравнения

$$y = e^{3x}(c_1\cos 4x + c_2\sin 4x) + \frac{15}{132}\sin x + \frac{7}{220}\cos x. \blacksquare$$

3. $y'' - 2y' + 2y = x^2$.

Р е ш е н и е.

Общее решение данного уравнения будем искать в виде (48).

Для определения $\bar{y}$ решим однородное дифференциальное уравнение

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 2 = 0$. Корни $k_1 = 1 + i$, $k_2 = 1 - i$ –комплексно-сопряженные числа, где $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$\bar{y} = e^x(c_1\cos x + c_2\sin x).$$

Определим частное решение $\tilde{y}$ неоднородного уравнения. Так как функция $f(x) = x^2$ имеет вид (49) ($\alpha = 0, \beta = 0$, $P_n(x) = x^2$ –многочлен второй степени), то частное решение $\tilde{y}$ будем искать в виде

$$\tilde{y} = Ax^2 + Bx + C,$$

где A, B, C –постоянные, которые необходимо найти.

Отсюда, $\tilde{y}' = 2Ax + B$, $\tilde{y}'' = 2A$. Подставляя производные в исходное уравнение, получим

$$2Ax^2 - 2(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2.$$

Раскрыв скобки в левой части уравнения, сгруппировав слагаемые с одинаковыми степенями x, получим

$$2Ax^2 + (2B - 4A)x + (2A - 2B + 2C) = x^2.$$

В последнем уравнении приравняем коэффициенты при равных степенях x в левой и правой частях

$$\begin{cases} 2A = 1, \\ 2B - 4A = 0, \\ 2A - 2B + 2C = 0. \end{cases}$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений

$$A = \frac{1}{2},\ B = 1,\ C = \frac{1}{2}.$$

Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \Rightarrow \tilde{y} = \frac{1}{2}(x+1)^2.$$

Следовательно, общее решение исходного неоднородного уравнения

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}(x+1)^2. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $y'' + 4y = 8$.
2. $y'' + 2y' - 3y = 4e^{-x}$.
3. $y'' - 2y' - 2y = x^3 - 5x^2 + 7x + 2$.
4. $y'' + y = 5\sin 2x$
5. $y'' - 2y' + 10y = x\cos 2x$

Ответы и указания.

1. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 2$.
2. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - e^{-x}$.
3. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - \frac{33}{4}x + \frac{51}{8}$.
4. $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{5}{3}\sin 2x$.
5. $y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + \left(\frac{3}{26}x + \frac{29}{338}\right)\cos 2x - \left(\frac{1}{13}x + \frac{1}{169}\right)\sin 2x$

4.5. Уравнения Эйлера второго порядка

Рассмотрим линейные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$(ax+b)^2 y'' + p(ax+b)y' + qy = f(x), \tag{52}$$

где $a,\ b,\ p,\ q$ –постоянные коэффициенты.

В частности, при $a = 1,\ b = 0$, уравнение (52) примет вид

$$x^2 y'' + pxy' + qy = f(x)\qquad, \tag{53}$$

Уравнения (52)-(53) относятся к *уравнениям Эйлера*.

Если для уравнения (52) ввести замену переменной

$$ax+b=e^t \quad (t=\ln|ax+b|), \tag{54}$$

а для уравнения (53) сделать замену

$$x=e^t \quad (t=\ln|x|), \tag{55}$$

оба уравнения преобразуются в линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

В процессе замены необходимо учесть, что

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}, \quad y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}.$$

Примеры.

1. $x^2y''+5xy'+3y=0$.

Решение.

Дано уравнение Эйлера вида (53), где $f(x)=0$. Произведем замену переменной (55): $x=e^t$, $t=\ln x$. Учитывая, что $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$y''=\frac{dy'}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t}-\frac{dy}{dt}e^{-t}\right)e^{-t}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение и, замечая, что $x^2=e^{2t}$, получаем

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}+5e^t\frac{dy}{dt}e^{-t}+3y=0.$$

Проведя сокращения, раскрыв скобки, имеем

$$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+3y=0.$$

Сделанная подстановка привела нас к линейному однородному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение: $k^2+4k+3=0; \Rightarrow k_1=-3,\ k_2=-1$.

Фундаментальная система решений уравнения: $y_1=e^{-3t}$, $y_2=e^{-t}$. Так как $t=\ln x$, то частные решения запишутся в виде

$$y_1=\frac{1}{x^3},\ \ y_2=\frac{1}{x}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения с постоянными коэффициентами будет иметь вид $y=\frac{C_1}{x^3}+\frac{C_2}{x}$.■

2. $\frac{d^2r}{d\varphi^2}-\frac{2}{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}-\frac{4}{\varphi^2}r=0$.

Решение.

Если обе части заданного уравнения умножить на φ^2, то оно примет вид

$$\varphi^2\frac{d^2r}{d\varphi^2}-2\varphi\frac{dr}{d\varphi}-4r=0.$$

Это есть уравнение Эйлера вида (53), в котором независимая переменная φ, а $r=r(\varphi)$. Подстановка (55) в данном случае примет вид: $\varphi=e^t$, $t=\ln\varphi$. Тогда

$$\frac{dt}{d\varphi}=\frac{1}{\varphi}=e^{-t},$$

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\varphi}=\frac{dr}{dt}e^{-t},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)\cdot\frac{dt}{d\varphi}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}e^{-t}\right)\frac{dt}{d\varphi}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}e^{-t}-\frac{dr}{dt}e^{-t}\right)e^{-t}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{dr}{dt}\right)e^{-2t}$$

Подставив эти значения производных в уравнение и, замечая, что $\varphi^2=e^{2t}$, получим уравнение

$$\frac{d^2r}{dt^2}-3\frac{dr}{dt}-4r=0.$$

Сделанная подстановка привела нас к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами.

Характеристическое уравнение: $k^2-3k-4=0;\quad\Rightarrow k_1=4,\ k_2=-1.$

Фундаментальная система решений уравнения: $r_1=e^{4t};\ r_2=e^{-t}$. Так как $\varphi=e^t$, то $e^{4t}=\varphi^4;\ \ e^{-t}=\varphi^{-1}$ и частные решения запишутся в виде $r_1=\varphi^4;\ r_2=\varphi^{-1}$.

Тогда общее решение исходного уравнения

$$r=C_1\varphi^4+C_2\varphi^{-1}.\blacksquare$$

3. $x^2y''-xy'+y=\cos\ln x$.

Решение.

Дано уравнение Эйлера вида (53). Произведем замену переменной (55): $x=e^t$, $t=\ln x$. Учитывая, что $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}=e^{-t}$, получим

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} e^{-t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t}\right) e^{-t} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t}.$$

Подставляя эти значения производных в уравнение и замечая, что $x^2 = e^{2t}$, получаем

$$e^{2t}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) e^{-2t} - e^t \frac{dy}{dt} e^{-t} + y = \cos t.$$

Проведя сокращения, раскрыв скобки, имеем

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = \cos t.$$

Это линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами. Общее решение соответствующего однородного уравнения есть $\bar{y} = (C_1 + C_2 t)e^t$. Используя метод неопределенных коэффициентов частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $\tilde{y} = A\sin t + B\cos t$. Из уравнения получим значения неопределенных коэффициентов: $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$. Общее решение неоднородного уравнения

$$y = (C_1 + C_2 t)e^t - \frac{1}{2}\sin t, \quad \text{или} \quad y = (C_1 + C_2 \ln x)x - \frac{1}{2}\sin \ln x. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $x^2 y'' + xy' - 9y = 0$.
2. $x^2 y'' - xy' + y = 0$.
3. $x^2 y'' + xy' + 9y = 0$.
4. $\rho^2 \frac{d^2 u}{d\rho^2} + \rho \frac{du}{d\rho} - u = 0$.
5. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 3\ln^2 x$.

Ответы и указания.

1. $y = C_1 x^3 + C_2 x^{-3}$.
2. $y = C_1 x + C_2 x \ln x$.
3. $y = C_1 \cos(3\ln x) + C_2 \sin(3\ln x)$.
4. $u = C_1 \rho x + C_2 \frac{1}{\rho}$.
5. $y = C_1 x + C_2 x^3 + \frac{1}{9}\left(9\ln^2 x + 24\ln x + 26\right)$.

5. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

5.1. Нормальные системы уравнений

Система дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \end{cases}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – неизвестные функции независимой переменной x, называется *нормальной системой*.

Особенностью нормальной системы дифференциальных уравнений является то, что все входящие в систему уравнения являются уравнениями первого порядка, и все уравнения системы разрешены относительно этих производных.

Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений являются линейными функциями относительно $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то система дифференциальных уравнений называется *линейной.*

Если нормальная система уравнений линейна, а коэффициенты при неизвестных функциях постоянны, то она имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,n}y_n + \varphi_1(x), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{2,n}y_n + \varphi_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n,1}y_1 + a_{n,2}y_2 + \ldots + a_{n,n}y_n + \varphi_n(x). \end{cases} \tag{56}$$

Если все функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ равны нулю, то система (56) называется *однородной*, а если хотя бы одна из них не равна нулю, - *неоднородной*.

Число произвольных постоянных, входящих в общее решение нормальной системы уравнений, равно числу неизвестных функций, входящих в систему.

Иногда нормальную систему дифференциальных уравнений удается свести к одному уравнению n-ого порядка, содержащему одну неизвестную функцию. Сведение нормальной системы к одному уравнению может быть достигнуто дифференцированием одного из уравнений системы и исключением всех неизвестных, кроме одного (*метод исключения*).

В некоторых случаях, комбинируя уравнения системы, после несложных преобразований удается получить легко интегрируемые уравнения (метод интегрируемых комбинаций), что позволяет найти решение системы.

Примеры.

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 + 1, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 2e^x - y_1. \end{cases}$

Решение.

Система дифференциальных уравнений - нормальная. Здесь неизвестные функции $y_1(x),\ y_2(x)$. Исключим y_2. Из первого уравнения $y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} - 1$. Подставляя во второе уравнение, получим $\dfrac{d^2y_1}{dx^2} = 2e^x - y_1$, или

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} + y_1 = 2e^x \quad . \tag{57}$$

Уравнение (57) – линейное неоднородное уравнение второго порядка. Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $k^2 + k = 0$ имеет корни $k_1 = i,\ k_2 = -i$. Общее решение уравнения

$$\bar{y}_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Частное решение можно определить по виду правой части: $\tilde{y}_1 = Ae^x$. Подставляя частное решение в уравнение (57), получим $A = 1$. Тогда общее решение уравнения (57) примет вид

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x.$$

Но $y_2 = \dfrac{dy_1}{dx} - 1, \ \Rightarrow y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x - 1.$ Объединяя полученные результаты, получим общее решение исходной системы

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x, \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + e^x - 1. \end{cases} \blacksquare$$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y. \end{cases}$

Р е ш е н и е.

Система дифференциальных уравнений - нормальная. Здесь неизвестные функции $x(t),\ y(t)$. Продифференцируем по t первое уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}.$$

Сложив уравнения системы получим $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = 2x$, тогда относительно x получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2x = 0.$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $k^2 - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = \sqrt{2},\ k_2 = -\sqrt{2}$. Общее решение уравнения

$$x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}.$$

Общее решение для y находим из первого уравнения системы.

$$\frac{dx}{dt} = x + y,\ \Rightarrow y = \frac{dx}{dt} - x,\ \Rightarrow y = \frac{d}{dt}\left(C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}\right) - \left(C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}\right).$$

Проделав необходимые действия, получим

$$y = C_1\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{t\sqrt{2}} - C_2\left(\sqrt{2} + 1\right)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Таким образом, общее решение исходной системы примет вид

$$\begin{cases} x = C_1 e^{t\sqrt{2}} + C_2 e^{-t\sqrt{2}}, \\ y = C_1\left(\sqrt{2} - 1\right)e^{t\sqrt{2}} - C_2\left(\sqrt{2} + 1\right)e^{-t\sqrt{2}}. \end{cases}$$

3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{2y + 3z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{2y + 3z}, \end{cases}$ при начальных условиях: $y(0) = 1,\ z(0) = 2$.

Р е ш е н и е.

Система дифференциальных уравнений - нормальная. Здесь неизвестные функции $y(x),\ z(x)$. Составим первую интегрируемую комбинацию, разделив первое уравнение на второе.

$$\frac{dy}{dz}=\frac{y}{z}; \quad \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}; \quad \Rightarrow \ln y=\ln z+\ln C_1; \quad \Rightarrow y=C_1 z.$$

Составим вторую интегрируемую комбинацию, сложив удвоенное первое и утроенное второе уравнения.

$$2\frac{dy}{dx}+3\frac{dz}{dx}=1; \quad \Rightarrow 2dy+3dz=dx; \quad \Rightarrow 2y+3z=x+C_2.$$

Из полученной системы уравнений $\begin{cases} y=C_1 z, \\ 2y+3z=x+C_2, \end{cases}$ находим общее решение системы

$$\begin{cases} y=\dfrac{C_1(x+C_2)}{2C_1+3}, \\ z=\dfrac{x+C_2}{2C_1+3}. \end{cases}$$

Используя начальные условия, получаем

$$\begin{cases} 1=\dfrac{C_1 C_2}{2C_1+3}, \\ 2=\dfrac{C_2}{2C_1+3}, \end{cases} \Rightarrow C_1=\frac{1}{2}, \; C_2=8.$$

Подставив в общее решение найденные значения произвольных постоянных, получим частные решения, удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{8}x+1, \\ z=\dfrac{1}{4}x+2. \end{cases} \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=4y_1+6y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=2y_1+3y_2+x. \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=e^{3t}-y, \\ \dfrac{dy}{dt}=2e^{3t}-x. \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y+z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{y+z}, \end{cases}$ при начальных условиях: $y(0)=1,\ z(0)=2$.

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 2\sin t. \end{cases}$.

Ответы и указания.

1. $\begin{cases} y_1 = C_1 + C_2 e^{7x} - \dfrac{3}{49} x(7x+2), \\ y_2 = -\dfrac{2}{3} C_1 + \dfrac{1}{2} C_2 e^{7x} + \dfrac{1}{49}\left(14x^2 - 3x - 1\right). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 e^{-t} + \dfrac{1}{8} e^{3t}, \\ y = -C_1 e^{t} + \dfrac{1}{2} C_2 e^{-t} + \dfrac{5}{8} e^{3t}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = \dfrac{1}{3} x + 2, \\ z = \dfrac{2}{3} x + 4. \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x = C_1 e^{t} + C_2 t e^{t} + \dfrac{1}{2} \cos t, \\ y = \left(C_2(1-t) - C_1\right) e^{t} - 2\cos t - \dfrac{1}{2} \sin t. \end{cases}$.

5.2. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана система n линейных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями, коэффициенты которой постоянные:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + \ldots + a_{1,n} y_n, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{2,1} y_1 + a_{2,2} y_2 + \ldots + a_{2,n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n,1} y_1 + a_{n,2} y_2 + \ldots + a_{n,n} y_n. \end{cases} \tag{58}$$

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$\frac{dY}{dx} = \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \\ \cdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \vdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \vdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \vdots & a_{n,n} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

то систему (58) можно записать в виде одного матричного дифференциального уравнения

$$\frac{dY}{dx} = AY.$$

Матрица A является матрицей системы, Y - столбец неизвестных функций.

Решение системы будем искать в виде

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 e^{\lambda x} \\ p_2 e^{\lambda x} \\ \cdots \\ p_n e^{\lambda x} \end{pmatrix},$$

где $\lambda = const$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – постоянные величины. Подставив значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ в систему (58), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$:

$$\begin{cases} (a_{1,1} - \lambda) p_1 + a_{1,2} p_2 + \ldots + a_{1,n} p_n = 0, \\ a_{2,1} p_1 + (a_{2,2} - \lambda) p_2 + \ldots + a_{2,n} p_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n,1} p_1 + a_{n,2} p_2 + \ldots + (a_{n,n} - \lambda) p_n = 0. \end{cases}$$

Система должна иметь ненулевое решение, поэтому для определения λ составим уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & \vdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & \vdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \vdots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (59)$$

Уравнение (59) является характеристическим уравнением матрицы A и в то же время характеристическим уравнением системы. Это - линейное алгебраическое уравнение степени n относительно λ. Оно будет иметь ровно n корней, которые являются характеристическими числами матрицы A. Корни этого уравнения могут быть простыми или кратными, а также действительными или комплексными. Каждому характеристическому числу соответствует свои значения $p_1, p_2, \ldots, p_n$, определяющие собственный вектор. Собственные векторы определяют фундаментальную систему решений для (58). Общее решение будет являться их линейной комбинацией.

В зависимости от значений корней, получим разные случаи фундаментальной системы решений. Более подробно вопрос получения фундаментальной системы решений рассмотрим на примерах.

П р и м е р ы.

1. $$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 7y_1 + 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 6y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е.

Система имеет вид (58). Для получения общего решения системы составим характеристическое уравнение (59).

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 3 \\ 6 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 10$ - характеристические числа матрицы системы. Корни характеристического уравнения действительные и различные.

При $\lambda_1 = 1$, получим систему уравнений для определения собственного вектора

$$\begin{cases} (7-\lambda_1)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-\lambda_1)p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (7-1)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-1)p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + 3p_2 = 0. \end{cases}$$

Последняя система сводится к уравнению $2p_1 + p_2 = 0$, которое определяет вектор $(1; -2)$.

Решение системы, соответствующее корню $\lambda_1 = 1$, будет иметь вид

$$Y_1 = \begin{pmatrix} p_1 e^{\lambda_1 x} \\ p_2 e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \\ -2e^x \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 10$, получим систему уравнений для определения собственного вектора

$$\begin{cases} (7-\lambda_2)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-\lambda_2)p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (7-10)p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 + (4-10)p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p_1 + 3p_2 = 0, \\ 6p_1 - 6p_2 = 0. \end{cases}$$

Последняя система сводится к уравнению $p_1 - p_2 = 0$, которое определяет вектор $(1;1)$.

Решение системы $Y_2 = \begin{pmatrix} p_1 e^{\lambda_2 x} \\ p_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{10x} \\ e^{10x} \end{pmatrix}.$

Общее решение будет иметь вид

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^x \\ -2e^x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{10x} \\ e^{10x} \end{pmatrix}.$$

Общее решение в координатной форме примет вид

$$\begin{cases} y_1 = C_1e^x + C_2e^{10x}, \\ y_2 = -2C_1e^x + C_2e^{10x}. \end{cases} \blacksquare$$

2. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 - 3y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$

Решение.

Система имеет вид (58). Для получения общего решения системы составим характеристическое уравнение (59).

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad (4-\lambda)^2 = -9, \Rightarrow \lambda - 4 = \pm 3i.$$

Его корни $\lambda_1 = 4 + 3i,\ \lambda_2 = 4 - 3i$ - характеристические числа матрицы системы. Корни характеристического уравнения комплексно-сопряженные.

Определим решение, соответствующее одному из комплексно сопряженных корней.

При $\lambda_1 = 4 + 3i$, получим систему уравнений для определения собственного вектора

$$\begin{cases} (4-\lambda_1)p_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + (4-\lambda_1)p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (7-4-3i)p_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + (4-4-3i)p_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ip_1 - 3p_2 = 0, \\ 3p_1 + 3ip_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $p_2 = ip_1$. Приняв $p_1 = 1$, находим $p_2 = i$, которое определяет вектор $(1;i)$.

Частное решение системы

$$Y_1 = \begin{pmatrix} p_1e^{\lambda_1 x} \\ p_2e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(4+3i)x} \\ ie^{(4+3i)x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4x}(\cos 3x + i\sin 3x) \\ e^{4x}(-\sin 3x + i\cos 3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4x}\cos 3x + ie^{4x}\sin 3x \\ -e^{4x}\sin 3x + ie^{4x}\cos 3x \end{pmatrix}$$

Отделим действительную и мнимую части в этом решении. Получаем два линейно независимых частных решения:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} e^{4x}\cos 3x \\ -e^{4x}\sin 3x \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} e^{4x}\sin 3x \\ e^{4x}\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Общее решение

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} e^{4x}\cos 3x \\ -e^{4x}\sin 3x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{4x}\sin 3x \\ e^{4x}\cos 3x \end{pmatrix}.$$

Общее решение в координатной форме примет вид

$$\begin{cases} y_1 = e^{4x}\left(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x\right), \\ y_2 = e^{4x}\left(-C_1\sin 3x + C_2\cos 3x\right). \end{cases} \blacksquare$$

3. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 2y_1 + y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 - y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dx} = 2y_1 + y_2 + 2y_3. \end{cases}$

Решение.

Система имеет вид (58). Для получения общего решения системы составим характеристическое уравнение (59).

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Корни характеристического уравнения действительные. Корень λ_1 - простой, λ_2, λ_3 - кратные.

При $\lambda_1 = 2$, получим систему уравнений для определения собственного вектора

$$\begin{cases} (2-\lambda_1)p_1 + p_2 + p_3 = 0, \\ -2p_1 + (-\lambda_1)p_2 - p_3 = 0, \\ 2p_1 + p_2 + (2-\lambda_1)p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2-2)p_1 + p_2 + p_3 = 0, \\ -2p_1 + (-2)p_2 - p_3 = 0, \\ 2p_1 + p_2 + (2-2)p_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_2 + p_3 = 0, \\ -2p_1 - 2p_2 - p_3 = 0, \\ 2p_1 + p_2 = 0. \end{cases}$$

Из последней системы $2p_1 = -p_2 = p_3$ и вектор $(1;-2;2)$ - собственный и $Y_1 = \begin{pmatrix} p_1 e^{\lambda_1 x} \\ p_2 e^{\lambda_1 x} \\ p_3 e^{\lambda_1 x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}$ частное решение системы.

Для кратного корня $\lambda = 1$ сначала определим число линейно независимых собственных векторов. При $\lambda = 1$ матрица, соответствующая определителю характеристического уравнения, будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Порядок этой матрицы $n = 3$, ранг $r = 2$. Число линейно-независимых собственных векторов равно $m = n - r = 1$. Корень $\lambda_2 = 1$

имеет кратность $k = 2$. Так как $k > m$, то решение надо искать в виде произведения многочлена степени $k - m = 1$ на $e^{\lambda_2 x} = e^x$, то есть в виде

$$Y_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (ax+b)e^x \\ (cx+d)e^x \\ (fx+g)e^x \end{pmatrix}, \qquad (60)$$

где a, b, c, d, f, g - постоянные, которые необходимо определить. Чтобы найти эти постоянные, подставим $y_1 = (a + bx)e^x$; $y_2 = (c + dx)e^x$; $y_3 = (f + gx)e^x$ в исходную систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left((ax+b)e^x\right) = 2(ax+b)e^x + (cx+d)e^x + (fx+g)e^x, \\ \dfrac{d}{dx}\left((cx+d)e^x\right) = -2(ax+b)e^x - (fx+g)e^x, \\ \dfrac{d}{dx}\left((fx+g)e^x\right) = 2(ax+b)e^x + (cx+d)e^x + 2(fx+g)e^x. \end{cases}$$

Продифференцировав левую часть уравнений и, сократив на e^x, получим

$$\begin{cases} a + (ax+b) = 2(ax+b) + (cx+d) + (fx+g), \\ c + (cx+d) = -2(ax+b) - (fx+g), \\ f + (fx+g) = 2(ax+b) + (cx+d) + 2(fx+g). \end{cases}$$

Приравняем коэффициенты при соответствующих степенях x:

$$\begin{cases} a + b = 2b + d + g, \\ a = 2a + c + f, \\ c + d = -2b - g \\ c = -2a - f, \\ f + g = 2b + d + 2g, \\ f = 2a + c + 2f, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a = b + d + g, \\ a + c + f = 0, \\ c = -2b - d - g, \\ -2a - c - f = 0, \\ f = 2b + d + g, \\ 2a + c + f = 0, \end{cases}$$

Найдем общее решение этой системы. Из второго и четвертого уравнений имеем $a = 0$ и $f = -c$. Подставляя эти значения в первое и третье, получим $\begin{cases} 0 = b + d + g, \\ c = -2b - d - g, \end{cases}$ (остальные уравнения будут следствиями этой системы). Решаем эту систему, например, относительно b и g:

$$b = -c, \quad g = c - d.$$

Таким образом, все неизвестные выражены через c и d. Положив $c = C_1$, а $d = C_2$, имеем

$$a=0;\quad b=-C_1;\quad f=-C_1;\quad g=C_1-C_2.$$

Подставив найденные значения постоянных a,b,c,d,f,g в (60), получим

$$Y_2=\begin{pmatrix} -C_1e^x \\ (C_1x+C_2)e^x \\ (-C_1x+C_1-C_2)e^x \end{pmatrix}.$$

Учитывая частное решение, полученное для $\lambda_1=2$, получим общее решение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -C_1e^x \\ (C_1x+C_2)e^x \\ (-C_1x+C_1-C_2)e^x \end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix} e^{2x} \\ -2e^{2x} \\ 2e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Окончательно, общее решение исходной системы запишем в виде

$$\begin{cases} y_1=-C_1e^x+C_3e^{2x}, \\ y_2=(C_1x+C_2)e^x-2C_3e^{2x}, \\ y_3=(-C_1x+C_1-C_2)e^x+2C_3e^{2x}. \end{cases}\quad\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx}=8y_2-y_1, \\ \dfrac{dy_2}{dx}=y_1+y_2. \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=12x-5y, \\ \dfrac{dy}{dt}=5x+12y. \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=x_1-x_2+x_3, \\ \dfrac{dx_2}{dt}=x_1+x_2-x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt}=2x_1-x_2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-4y, \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y. \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$

Ответы и указания.

1. $\begin{cases} y_1 = 2C_1e^{3x} - 4C_2e^{-3x}, \\ y_2 = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = e^{12t}\left(C_1\cos 5t + C_2\sin 5t\right), \\ y = e^{12t}\left(-C_1\sin 5t + C_2\cos 5t\right). \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 = C_1e^{t} + C_2e^{2t} + C_3e^{-t}, \\ x_2 = C_1e^{t} - 3C_3e^{-t}, \\ x_3 = C_1e^{t} + C_2e^{2t} - 5C_3e^{-t}. \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x = -2e^{t}\left(C_1\sin 2t - C_2\cos 2t\right), \\ y = e^{t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right). \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x = e^{t}\left(C_1t + C_2\right), \\ y = e^{t}\left(C_1 - 2C_2 - 2C_1t\right). \end{cases}$

6. ЗАДАЧИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

При решении задач естествознания, приводящихся к дифференциальным уравнениям, необходимо рационально выбрать независимую переменную x и искомую функцию $y(x)$. Затем, пользуясь соответствующими законами, выразить, насколько изменится неизвестная функция, при некотором изменении независимой переменной Δx, то есть выразить разность $y(x+\Delta x) - y(x)$ через величины, о которых говорится в задаче. Разделив эту разность на Δx и перейдя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим дифференциальное уравнение, из которого можно найти искомую функцию.

Задача 1. Скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Количество радия в начале процесса распада было равно x_0. Известно, что за 1600 лет распадется половина первоначального количества. Через сколько лет количество нераспавшегося радия будет составлять 80% первоначального? Определить, какой процент радия сохранится через 300 лет?

Решение.

Примем за независимую переменную время t, а за неизвестную функцию $x(t)$ - количество радия в момент времени t. Скорость изменения величины $x(t)$ есть производная $\frac{dx}{dt}$. Скорость изменения величины $x(t)$ по отношению ко времени t пропорциональна наличному количеству величины x в рассматриваемый момент времени. Обозначим через k коэффициент пропорциональности. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее этот процесс будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt} = kx. \tag{61}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными и интегрируется просто.

$$\frac{dx}{x} = kdt; \quad \Rightarrow \ln|x| = kt + \ln|C|; \quad \Rightarrow \ln\left|\frac{x}{C}\right| = kt; \quad \Rightarrow |x| = |C|e^{kt}.$$

Общий вид решения

$$x = Ce^{kt}. \tag{62}$$

Определим в (62) произвольную постоянную C. Известно, что в начальный момент, то есть при $t = 0$, количество радия равно x_0. Таким образом, начальное условие: $x(0) = x_0$. Подставляя в (62) $t = 0$; $x = x_0$, получим

$$x_0 = Ce^{k0}.; \quad \Rightarrow C = x_0,$$

а потому (62) перепишется так:

$$x = x_0 e^{kt}. \tag{63}$$

Задача содержит условие, позволяющее определить коэффициент пропорциональности k: когда $t = 1600$, количество радия x равно половине начального, то есть $x = \frac{x_0}{2}$. Подставляя эти значения в (63), получаем $\frac{x_0}{2} = x_0 e^{1600k}$. Отсюда

$$\frac{1}{2} = e^{1600k}; \quad \Rightarrow \ln\frac{1}{2} = 1600k; \quad \Rightarrow \ln 1 - \ln 2 = 1600k; \quad \Rightarrow k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

Теперь решение (63) перепишется в виде

$$x = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600}t},$$

или

$$\frac{x}{x_0} = e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}. \tag{64}$$

Ответим на первый вопрос поставленной задачи. По условию $\frac{x}{x_0}=0{,}8$ (80%). Подставляя это значение в (64), имеем

$$0{,}8=e^{-\frac{\ln 2}{1600}t}.$$

Для определения t прологарифмируем обе части равенства

$$\ln 0{,}8=-\frac{\ln 2}{1600}t,$$

отсюда

$$t=-\frac{1600\ln 0{,}8}{\ln 2}=-\frac{1600(-0{,}22314)}{0{,}69315}\approx 515\,\text{лет}.\blacksquare$$

Чтобы ответить на второй вопрос, найдем из (64) отношение $\frac{x}{x_0}$ при $t=300$.

$$\frac{x}{x_0}=e^{-\frac{\ln 2}{1600}300};\ \Rightarrow \frac{x}{x_0}\approx e^{-\frac{0{,}69315}{1600}300}=e^{-0{,}13}\approx 0{,}878=87{,}8\%.$$

Таким образом, через 300 лет сохранится 87,8% начального количества радия, а, следовательно, распадется за 300 лет 12,2 %.■

Задача 2. Тело, имеющее в начальный момент температуру T_0, поместили в среду, температура которой поддерживается неизменной и равна T_1. Как будет изменяться с течением времени температура тела?

Р е ш е н и е.

Примем за независимую переменную время t, а за неизвестную функцию $T(t)$ - температуру тела в момент времени t. Известно, что скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, то есть

$$\frac{dT}{dt}=-\gamma\bigl(T(t)-T_1\bigr), \tag{65}$$

где γ-коэффициент теплопроводности среды.

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение, получаем

$$\frac{dT}{dt}=\gamma\bigl(T(t)-T_1\bigr);\quad \Rightarrow \frac{dT}{\bigl(T(t)-T_1\bigr)}=\gamma dt;\quad \Rightarrow \ln|T-T_1|=\gamma dt+\ln|C|.$$

Потенцируя последнее равенство и учитывая, что $T\equiv T_1$ является решением дифференциального уравнения, потерянным при делении на $T-T_1$, получим общее решение уравнения (65) вида

$$T=T_1+Ce^{\gamma t}. \tag{66}$$

Произвольную постоянную C найдем из начальных условий задачи: в начальный момент, то есть при $t=0$, тело имело температуру T_0. Таким образом $T(0)=T_0$. Подставляя начальные условия в (66), найдем $T_0 = T_1 + Ce^{\gamma 0}$; $\Rightarrow C = T_0 - T_1$ и закон изменения температуры тела выглядит так

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{\gamma t}\,.\blacksquare \tag{67}$$

Задача 3. Определить, за какое время тело, нагретое до температуры 300°, помещенное в жидкость, температура которой 60°, охладится до 150°, если считать количество жидкости настолько большим, что ее температура практически остается без изменения. При этом известно, что через 10 минут после начала процесса температура тела равна 200°.

Решение.

Примем за независимую переменную время t, а за неизвестную функцию $T(t)$ - температуру тела в момент времени t. Воспользуемся полученным законом изменения температуры тела (67). В условиях задачи температура в начальный момент времени $T_0 = 300^\circ$, температура жидкости $T_1 = 60^\circ$ и температура в момент времени t будет определяться формулой

$$T(t) = 60 + (300 - 60)e^{\gamma t}; \ \Rightarrow T(t) = 60 + 240e^{\gamma t}.$$

Для определения коэффициента теплопроводности γ используем дополнительное условие задачи: при $t = 10\,мин.$ Температура тела равна 200°. Поэтому

$$200 = 60 + 240e^{\gamma\cdot 10}; \ \Rightarrow 240e^{10\gamma} = 140; \ \Rightarrow e^{10\gamma} = \frac{7}{12}; \ \Rightarrow \gamma = \frac{1}{10}(\ln 7 - \ln 12).$$

Отсюда следует, что $\gamma = -0{,}053$ и окончательно решение задачи определяется формулой

$$T(t) = 60 + 240e^{-0{,}053t}.$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, следует в это уравнение поставить $T = 150^\circ$ и определить t. После выполнения необходимых вычислений получим $t = -\dfrac{1}{0{,}053}\ln\dfrac{3}{8}$. Отсюда $t = 18{,}5\ мин.$ ■

Задача 4. В сосуд, содержащий 10 *л* воды, непрерывно поступает со скоростью 2 л в минуту раствор, в каждом литре которого содержится 0,3 *кг* соли. Поступающий в сосуд раствор перемешивается с водой, и смесь вытекает из сосуда с той же скоростью. Сколько соли будет в сосуде через 5 минут?

Решение.

Примем за независимую переменную время t, а за неизвестную функцию $y(t)$ - количество соли в момент времени t. Найдем, на сколько изменится количество соли за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. В одну минуту поступает 2 *л* раствора, а в

Δt минут- $2\cdot\Delta t$ литров. В этих $2\cdot\Delta t$ литрах содержится $0{,}3\cdot 2\cdot\Delta t = 0{,}6\cdot\Delta t$ *кг* соли.

С другой стороны, за время Δt из сосуда вытекает $2\cdot\Delta t$ литров перемешанного раствора. Здесь мы предполагаем, что раствор равномерно перемешивается по всему объему сосуда. В момент времени t во всем сосуде (10*л*) содержится $y(t)$ *кг* соли. Следовательно, в $2\cdot\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержалось бы $0{,}2\cdot\Delta t\cdot y(t)$ *кг* соли, если бы за время Δt содержание соли в сосуде не менялось. Но так как оно за это время меняется на величину $\alpha(\Delta t)$, то $2\cdot\Delta t$ литрах вытекающего раствора содержится $0{,}2\cdot\Delta t\cdot\left(y(t)+\alpha(\Delta t)\right)$ *кг* соли. Из законов физики следует, что количество соли непрерывно зависит от времени поступления раствора, следовательно, $\alpha(\Delta t)\to 0$ при $\Delta t\to 0$.

Итак, в растворе, вытекающем за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$, содержится $0{,}6\cdot\Delta t$ *кг* соли, а в вытекающем- $0{,}2\cdot\Delta t\cdot\left(y(t)+\alpha(\Delta t)\right)$ *кг*. Приращение количества соли за это время равно разности этих величин:

$$y(t+\Delta t)-y(t)=0{,}6\cdot\Delta t-0{,}2\cdot\Delta t\cdot\left(y(t)+\alpha(\Delta t)\right).$$

Разделим на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t\to 0$:

$$\frac{dy}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=0{,}6-0{,}2y(t)+0{,}2\lim_{\Delta t\to 0}\alpha(\Delta t)=0{,}6-0{,}2y(t).$$

Имеем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dt}=0{,}6-0{,}2y(t).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Решая его, получим

$$y(t)=3-Ce^{-0{,}2t}. \tag{68}$$

Так как при $t=0$ соли в сосуде не было, то $y(t)=0$. Полагая в (68) $t=0$, найдем $y(0)=3-C;\ \Rightarrow 0=3-C;\ \Rightarrow C=3$. Подставляя полученное значение C в (68) получим решение данной задачи

$$y(t)=3-3e^{-0{,}2t}.$$

Учитывая последнюю формулу легко ответить на вопрос задачи. При $t=5$ в сосуде будет

$$y(5)=3-3e^{-0{,}2\cdot 5}=3-e^{-1}\approx 1{,}9\ \text{кг соли.}\blacksquare$$

Задача 5. Цилиндрический резервуар с высотой 6 *м* и диаметром основания 4 *м* поставлен вертикально и наполнен водой. За какое время вода, заполняющая резервуар, вытечет из него через круглое отверстие, сделанное в дне резервуара радиуса $\frac{1}{12}$ *м*?

Решение.

Для решения поставленной задачи надо воспользоваться формулой Бернулли, определяющей скорость $v\ (м/с)$ истечения жидкости из отверстия в резервуаре, находящегося на h $м$ ниже свободного уровня жидкости:

$$v = \sigma\sqrt{2gh},$$

где $g = 9{,}8\ {}^{м}\!/_{с^2}$ -ускорение силы тяжести, σ -постоянный (безразмерный) коэффициент, зависящий от свойств жидкости (для воды $\sigma \approx 0{,}6$).

Пусть через t $с$ после начала истечения воды уровень оставшейся в резервуаре воды был равен h $м$ и за время dt $с$ понизился на dh $м$ $(dh < 0)$. Подсчитаем объем воды, вытекший за этот бесконечно малый промежуток времени dt, двумя способами.

С одной стороны, этот объем dw равен объему цилиндрического слоя с высотой $|dh|$ и радиусом, равным радиусу R основания резервуара $(R = 2\ м)$. Таким образом,

$$dw = \pi R^2 |dh|;\ \Rightarrow dw = -\pi R^2 dh\ .$$

С другой стороны, этот объем равен объему цилиндра, основанием которого служит отверстие в дне резервуара r $(r = \frac{1}{12}\ м)$, а высота равна $v\,dt$. Тогда

$$dw = \pi r^2 v dt;\ \Rightarrow dw = \pi r^2 \sigma\sqrt{2gh}dt\ .$$

Приравнивая полученные выражения для одного и того же объема, приходим к уравнению

$$-R^2 dh = r^2 \sigma\sqrt{2gh}dt\ .$$

Разделяя переменные и интегрируя, получаем

$$dt = -\frac{R^2}{\sigma r^2\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}};\ \Rightarrow t = C - \frac{2R^2}{\sigma r^2\sqrt{2g}}\sqrt{h}\ .$$

При $t = 0$ имеем $h = h_0 = 6\ м$. Отсюда находим

$$C = \frac{2R^2}{\sigma r^2\sqrt{2g}}\sqrt{h_0}\ .$$

Таким образом, связь между t и h определяется уравнением

$$t = \frac{2R^2}{\sigma r^2\sqrt{2g}}\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h}\right).$$

Полное время истечения жидкости T найдем, полагая в этой формуле $h = 0$:

$$T = \frac{2R^2\sqrt{h_0}}{\sigma r^2\sqrt{2g}}.$$

Используя данные задачи, $R = 2\ м$, $h_0 = 6\ м$, $\sigma = 0{,}6$, $r = \frac{1}{12}\ м$, $g = 9{,}8\ ^{м}\!/_{с^2}$, находим $T \approx 1062\ с = 17{,}7\ мин$.■

Задачи для самостоятельного решения.

1. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?
2. Согласно опытам, в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 *мг*. Через сколько лет распадется половина имеющегося количества?
3. Тело охладилось за 10 *мин.* от 100° до 60°. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20°. Когда тело остынет до 25°?
4. В сосуд, содержащий 1 *кг* воды при температуре 20°, опущен алюминиевый предмет массой 0,5 *кг*, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75°. Через минуту вода нагрелась на 2°. Когда температура воды и предмета будут отличаться на 1°? Потерями тепла при нагревании сосуда и прочими пренебречь.
5. В баке находится 100 *л* раствора, содержащего 10 *кг* соли. В бак непрерывно подается вода со скоростью 5 литров в минуту, которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли в баке останется через час?
6. В воздухе комнаты объемом $200\ м^3$ содержится 0,15% углекислого газа (CO_2). Вентиляция подает в минуту $20\ м^3$ воздуха, содержащего 0,04% CO_2. Через какое время количество углекислого газа в воздухе комнаты уменьшится втрое?

Ответы и указания.

1. $t = \dfrac{60}{\lg 2} \approx 200$ дней.
2. $t = \dfrac{\ln 0{,}5}{\ln(1 - 0{,}00044)} \approx 1600$ лет.
3. $t = 40$ *мин.*
4. $t = \dfrac{\ln 55}{\ln 5 - \ln 3} \approx 8$ *мин.*
5. Количество соли $y(60) = 10e^{-3} \approx 1{,}5$ *кг.*
6. $t = 10 \ln 11 \approx 24$ *мин.*

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным уравнением?
2. Какое уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением $n-ого$ порядка?
3. Что называется общим решением обыкновенного дифференциального уравнения $n-ого$ порядка?
4. Что называется частным решением обыкновенного дифференциального уравнения $n-ого$ порядка?
5. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
6. Какая задача называется задачей Коши?
7. Что называется особым решением обыкновенного дифференциального уравнения $n-ого$ порядка?
8. Какой вид имеет уравнение с разделяющимися переменными?
9. Какая функция называется однородной степени m?
10. Какое дифференциальное уравнение называется однородным?
11. В каком случае уравнение приводится к однородному?
12. Какое уравнение является уравнением в полных дифференциалах?
13. Какой вид имеет линейное уравнение первого порядка?
14. В чем заключается метод Лагранжа решения неоднородного линейного уравнения первого порядка?
15. Какие уравнения интегрируются в параметрической форме?
16. Какое уравнение называется линейным уравнением второго порядка?
17. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения второго порядка?
18. Как зависит фундаментальная система решений линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами от корней характеристического уравнения?
19. Какой вид имеет общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка?
20. В каком случае можно применить метод неопределенных коэффициентов для отыскания частного решения линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?
21. Какое уравнение называется уравнением Эйлера второго порядка?
22. Какой метод решения уравнения Эйлера?
23. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
24. Какой вид имеет система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
25. Представить матричную форму записи системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Список рекомендованной литературы

Данко П.Е. , Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

Демидович В.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

Лунгу К.Н., Макаров Е.В. Высшая математика [Текст]: рук. к решению задач. М.: МГОУ, 2003.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление [Текст]: учеб. пособие для втузов: в 2 т. М.: Интеграл-Пресс, 2004.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.