ФГБОУ ВПО "Саратовский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского"

Е.Ю. Волокитина

Практические занятия по линейной алгебре и аналитической геометрии: Матрицы и системы линейных уравнений. Векторная алгебра.

Учебное пособие
для студентов механико-математического и физического факультетов

Саратов
2014

Оглавление

Предисловие

Данное пособие предназначено для студентов первого курса механико-математического и физического факультетов. Для понимания изложенного матетриала достаточна математическая подготовка в объеме обычной средней школы. Линейная алгебра и аналитическая геометрия является одной из основных дисциплин на первом курсе и тесно связана со многими другими дисциплинами. Хорошее владение материалом курса и умение решать задачи по данной тематике является очень важным для выработки требуемых компетенций студентов и дальнейшего обуения в университете.

Цель пособия – оказать помощь студентам в усвоении нового материала и овладении навыками решения основных задач. Для этого в начале каждого параграфа приведен необходимый теоретический материал, достаточно подробно изложенный, но без доказательств. (Доказательства интересующийся читатель может найти в [1]) Пособие также содержит примеры решения типовых задач. В конце каждого параграфа приведены задачи, которые могут быть использованы для решения на практических занятиях в аудитории, в качестве домашнего задания и для составления вариантов контрольных работ.

Глава 1

Матрицы. Определители. Системы линейных уравнений

1.1 Операции над матрицами. Определитель матрицы.

Матрицей размера $m \times n$, где m и n натуральные числа называется прямоугольная таблица вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Символы a_{ij} в этой таблице называются *элементами* матрицы. Это могут быть числа, векторы, функции и т.п. Если не оговорено противное будем считать элементы матрицы вещественными числами. Матрицы обычно обозначаются заглавными латинскими буквами, а их элементы соответственно маленькими латинскими буквами с нижними индексами, соответствующими номерам строки (первый индекс) и столбца (второй индекс), на пересечении которых стоит данный элемент. (Иногда номер строки пишут верхним индексом, а номер столбца нижним.) То, что элементы $a_{ij}\,(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n)$ составляют матрицу A записывают в виде $A = (a_{ij})$. Число строк и столбцов называют порядком матрицы.

Если число строк совпадает с числом столбцов матрицы, то она называется квадратной. Примером квадратной матрицы может служить *единичная* матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

По определению $E = (\delta_{ij})$, где δ_{ij} – *символ Кронекера*, принимающий значение 1, если $i = j$, и значение 0, если $i \neq j$. *Нулевой* называют матрицу, у которой все элементы равны нулю. Обозначают ее буквой O или O_{mn}, если необходимо указать порядок матрицы.

Множество элементов вида a_{ii}, $i = 1, \dots, n$ некоторой квадратной матрицы A размера $n \times n$ называют *главной диагональю*, а множество элементов вида $a_{i(n-i+1)}$, $i = 1, \dots, n$ – *побочной диагональю*. Матрицы, у которых все элементы кроме стоящих на главной диагонали равны нулю называются *диагональными*, а матрицы у которых все элементы стоящие выше главной диагонали равны нулю $(a_{ij} = 0, \text{если} i < j)$ *верхнетреугольными*.

Если столбцы матрицы A размера $m \times n$ записать в строчки с соотвествующими номерами, то получится новая матрица размера $n \times m$, называемая *транспонированной* к данной. Обозначается транспонированная матрица символом A^T.

Операции над матрицами

1. *Умножение на число.*

Матрица B размера $m \times n$ назвается произведением матрицы A размера $m \times n$ на число λ $(B = \lambda A)$, если для всех элементов матрицы B выполнены равенства $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

2. *Сложение матриц*

Матрица C размера $m \times n$ называется суммой матриц A и B $(C = A + B)$ размера $m \times n$, если для всех элементов матрицы C выполнены равенства $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

3. *Умножение матриц*

Матрица C размера $m \times n$ называется произведением матриц A и B ($C = AB$) размера $m \times k$ и $k \times n$ соотвественно, если для всех элементов матрицы C выполнены равенства $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{k} a_{is} b_{sj}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Из определения умножения матриц следует, что произведение матриц A и B зависит от порядка сомножителей, в общем случае $AB \neq BA$. Более того, если существует произведение AB, то произведение BA может не существовать. Для того, чтобы произведение двух матриц существовало необходимо, чтобы число столбцов первой матрицы равнялось числу строк второй матрицы.

Правило умножения матриц называют правилом умножения строки на столбец. Действительно, если мы распишем формулу для каждого элемента матрицы $C = AB$, то увидим, что для того чтобы получить элемент c_{ij} необходимо все элементы $i-$й строки матрицы A умножить на соответствующие элементы $j-$го столбца матрицы B (то есть первый элемент $i-$й строки матрицы A умножить на первый элемент $j-$го столбца матрицы B, второй элемент $i-$й строки матрицы A умножить на второй элемент $j-$го столбца матрицы B и т.д.) и сложить эти произведения.

Рассмотрим пример.

Пример 1.1

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A – размера 2×3, матрица B – размера 3×2, поэтому их произведение существует и является матрицей размера 2×2. Обозначим $C = AB$. По определению

$$\begin{aligned} c_{11} &= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 1 = 14 \\ c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) = 0 \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} = -2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = -19 \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} = -2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1. \end{aligned}$$

Получаем

$$C = AB = \begin{pmatrix} 14 & 0 \\ -19 & -1 \end{pmatrix}.$$

Определитель.

Перестановкой из n элементов называется взаимнооднозначное отображение $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, где n – натуральное число. Также перестановку можно представлять как последовательность $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ чисел $1, 2, \ldots, n$, расположенных в каком-либо порядке. Всего существует $n!$ перестановок из n элементов. Множество всех перестановок из n элементов будем обозначать символом S_n.

Говорят, что пара чисел образует *инверсию* в заданной перестановке, если большее из них стоит левее меньшего. Перестановка называется *четной* (соответственно *нечетной*), если число инверсий в ней четно (соответственно нечетно). Наряду с этим определяется знак перестановки, равный 1, если перестановка четная и -1, если она нечетная. Знак перестановки $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ обозначается $\operatorname{sgn}(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Пример 1.2

При $n = 3$ четные перестановки – это $(1, 2, 3)$ (нет инверсий), $(2, 3, 1)$ (две инверсии), $(3, 1, 2)$ (две инверсии), нечетные – $(1, 3, 2)$ (одна инверсия), $(3, 2, 1)$ (три инверсии), $(2, 1, 3)$ (одна инверсия).

Перемена местами двух элементов в перестановке называется *транспозицией* этих элементов. При любой транспозиции четность перестановки меняется. Четность перестановки равна количеству транспозиций, за которое она приводится к тривиальной перестановке $(1, 2, \ldots, n)$.

Пример 1.3

Определим четность перестановки $(2, 1, 5, 4, 3)$. Данную перестановку можно привести к тривиальной с помощью следующей последовательности из двух транспозиций:

$$(2, 1, 5, 4, 3) \to (1, 2, 5, 4, 3) \to (1, 2, 3, 4, 5).$$

Получаем, что перестановка $(2,1,5,4,3)$ – четная.

Определителем квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ размера $n\times n$ называется число, обозначаемое $\det A$ или $|A|$ и вычисляемое по формуле

$$|A| = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in S_n} (-1)^{\mathrm{sgn}(k_1,\ldots,k_n)} a_{1k_1}a_{2k_2}\ldots a_{nk_n}. \tag{1.1}$$

В формуле (1.1) суммирование осуществляется по всем возможным перестановкам номеров строк. Иными словами, **определитель квадратной матрицы A равен сумме произведений элементов этой матрицы, выбранных точно по одному из каждой строки и каждого столбца, причем произведения берутся со знаком равным знаку перестановки номеров столбцов, если элементы в произведении расположить в порядке возрастания номеров строк**.

Выпишем явный вид формулы (1.1) для определителя матриц 2-го и 3-го порядков.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минором порядка k для матрицы A размера $m\times n$ называется определитель квадратной матрицы порядка k, составленной из элементов матрицы A, стоящих на пересечении k строк и k столбцов. Минорами первого порядка являются элементы матрицы.

Пусть A – квадратная матрица размера n. Миноры порядка k квадратной матрицы можно получить не только пересечением k строк и столбцов, но и вычеркиванием $n-k$ строк и столбцов. Обозначим через M_{ij} минор порядка $n-1$ получающийся вычеркиванием $i-$ой строки и $j-$го столбца матрицы A.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. Справедлива следующая формула для вычисления определителя, называемая формулой разложения по строке,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}, \tag{1.2}$$

где i – фиксированный номер строки. Аналогичную формулу можно получить, если взять вместо строки столбец матрицы. Таким образом, определитель матрицы равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) матрицы на их алгебраические дополнения.

Пример 1.4

Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим формулу разложения по строке. Пусть $i = 1$, тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(1 - (-4)) - 3(2 - (-6)) - 1(4 - 3) = 5 - 24 - 1 = -20.$$

Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению элементов на главной диагонали. Вычисление определителя произвольной квадратной матрицы можно свести к вычислению определителя верхнетреугольной матрицы. Выделяют следующие *элементарные преобразования* строк (столбцов) матрицы:

1. Прибавление к элементам одной строки(столбца) элементов другой строки(столбца) умноженных на одно и то же число.

2. Перемена строк (столбцов) местами.

3. Умножение строки (столбца) на число.

При преобразованиях первого типа определитель матрицы не изменяется, при преобразованиях второго типа – меняет знак, при преобразованиях третьего типа определитель умножается на то же самое число. С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к верхнетреугольной матрице.

Пример 1.5

Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix}.$$

Элементарными преобразованиями добъемся того, чтобы ниже главной диагонали стояли нули. При этом каждое элементарное преобразование будем записывать над знаком равенства следующим образом:

1. $i^\circ + \lambda j^\circ$ ($i_\circ + \lambda j_\circ$) обозначает прибавление к $i-$ой строке (столбцу) $j-$ой строки (столбца), умноженной на λ,

2. $i^\circ \leftrightarrow j^\circ$ ($i_\circ \leftrightarrow j_\circ$) означает перемену $i-$ой и $j-$ой строк (столбцов).

3. $\dfrac{i^\circ}{\lambda}$ ($\dfrac{i_\circ}{\lambda}$) означает деление каждого элемента $i-$ой строки (столбца) на число λ.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix} \overset{1^\circ \leftrightarrow 2^\circ}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 10 \end{vmatrix} \overset{3^\circ - 2\cdot 2^\circ}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{2^\circ - 2\cdot 1^\circ}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\overset{3^\circ + 2\cdot 2^\circ}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1(-1)(-2) = -2.$$

Обратная матрица.

Обратной матрицей для квадратной матрицы A порядка n называется матрица A^{-1} порядка n такая, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Можно показать, что условие существования A^{-1} эквивалетно условию $|A| \neq 0$. Если A^{-1} существует, то ее можно найти по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A^{pr})^T, \tag{1.3}$$

где A^{pr} – матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы A.

Пример 1.6

Найти обратную для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определитель матрицы A одним из способов, описанных выше получим $|A| = -16$. Значит A^{-1} существует. Посчитаем алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Получаем

$$A^{pr} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 3 \\ -8 & 0 & -8 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = -\frac{1}{16} \begin{pmatrix} -3 & -8 & 1 \\ -4 & 0 & -4 \\ 3 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Можно найти обратную матрицу, не используя формулу (1.3). Для этого необходимо справа от матрицы A приписать единичную матрицу того же порядка и с помощью элементарных преобразований над строчками этой расширенной матрицы добиться того, чтобы единичная матрица стояла слева. Тогда матрица, стоящая справа, будет обратной для A.

Пример 1.7

Найдем обратную для матрицы A из примера 6 с помощью элементарных преобразований.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{1^\circ \leftrightarrow 2^\circ}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{2^\circ - 2\cdot 1^\circ}{\overset{3^\circ + 2^\circ}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{3^\circ - 4\cdot 2^\circ}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{3^\circ}{16}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} \end{pmatrix} \underset{1^\circ - 3^\circ}{\overset{2^\circ + 4\cdot 3^\circ}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{16} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-3}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{16} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{16} & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Задачи

1.1.1. Перемножить матрицы:

$$1)\ \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2)\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix};$$

$$5)\ \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 6)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$7)\begin{pmatrix}1&-1&3\\-1&1&-3\\2&-2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5&2\\0&3&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}^T;\quad 8)\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\-1&3\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-1&1\\1&-2&1&0\end{pmatrix}.$$

1.1.2 Вычислить:

$$1)\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}^2;\quad 2)\begin{pmatrix}1&0&-1\\-2&1&2\\3&2&-3\end{pmatrix}^3;$$

$$3)\begin{pmatrix}-\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}^n;\quad 4)\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}^n.$$

1.1.3 Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A.

$$1)f(x)=x^3-2x^2+1,\qquad A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\1&1&1\end{pmatrix};$$

$$2)f(x)=x^3-3x+2,\qquad A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}.$$

1.1.4 Вычислить e^A.

$$1)\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix};\qquad 2)\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&6\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

1.1.5 Доказать, что след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей. (След квадратной матрицы – сумма ее элементов, стоящих на главной диагонали.)

1.1.6 Определить четность перестановки.

1)(5 4 3 2 1); 2)(6 4 5 2 3 1); 3)(2 1 4 6 5 3);
4)(2 3 1 4 6 7 5 8); 5)(7 5 8 1 3 6 4 2).

1.1.7 Вычислить определитель.

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix};\quad 4)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix};\quad 5)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1.8 Сколько слагаемых входит:

1) в формулу полного разложения определителя четвертого порядка?

2) в формулу полного разложения определителя пятого порядка?

1.1.9 1) Имеются ли в формуле для вычисления определителя матрицы (a_{ij}) пятого порядка слагаемые $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$, $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$.

2) С какими знаками входят в формулу для вычисления определителя матрицы пятого порядка слагаемые $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$, $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$.

1.1.10 Вычислить определитель разложением по строке.

$$1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$4)\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ 5 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix};\quad 5)\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

1.1.11 Вычислить определитель с помощью элементарных преобразований.

$$1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix};\quad 2)\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix};\quad 3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix};\quad 4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix};$$

$$5)\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix};\quad 6)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix};\quad 7)\begin{vmatrix} 4 & 3 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1.1.12 С помощью присоединенной матрицы найти обратную к матрице:

$$1)\begin{pmatrix}2 & -4\\ 3 & 1\end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix}-5 & 6\\ 3 & -4\end{pmatrix};\quad 3)\begin{pmatrix}5 & 3 & 1\\ 1 & -3 & -2\\ -5 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$4)\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & -1\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix};\quad 5)\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 5\end{pmatrix};\quad 6)\begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

1.1.13 С помощью элементарных преобразований найти обратную к матрице:

$$1)\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix};\quad 3)\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix};$$

$$4)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix};\quad 5)\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

1.2 Ранг матрицы. Системы линейных уравнений.

Ранг матрицы.

Ранг матрицы A – это наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы. Обозначается ранг матрицы символом $\mathrm{rank}A$. Непосредственно из определения ранг матрицы можно найти следующим способом:

1. Ищем ненулевой минор первого порядка.

2. Если среди миноров первого порядка есть хотя бы один ненулевой, ищем ненулевой минор второго порядка.

3. Если среди миноров второго порядка есть хотя бы один ненулевой, ищем ненулевой минор третьего порядка и т.д.

4. Предположим, что все миноры порядка k равны нулю, тогда ранг матрицы равен $k-1$.

5. Исходная матрица квадратная и ее старший минор – определитель не равен нулю, тогда ранг матрицы равен ее порядку.

Можно найти ранг матрицы и без перебора ее миноров. Для этого элементарными преобразованиями над строками матрицу необходимо привести к так называемому *ступенчатому* виду. Ранг полученной матрицы равен номеру последней ненулевой строки и, так как при элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется, равен рангу исходной матрицы. Ступенчатой называется матрица следующего вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i_2-1} & a_{1i_2} & a_{1i_2+1} & \dots & a_{1i_k-1} & a_{1i_k} & a_{1i_k+1} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2i_2} & a_{2i_2+1} & \dots & a_{2i_k-1} & a_{2i_k} & a_{2i_k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{ki_k} & a_{ki_k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad (1.4)$$

Ранг такой матрицы, как уже указывалось выше, равен номеру последней ненулевой строки, в данном случае – k. Действительно легко указать наибольший отличный от нуля минор такой матрицы. Он состоит из элементов, лежащих на пересечении первых k строк и столбцов с номерами $1, i_2, \ldots, i_k$.

Пример 1.8

Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу A к ступенчатому виду. Для этого вычтем из четвертой строки третью, затем вычтем из второй строки первую, умноженную на 2, и вычтем из третьей строки первую, умноженную на три. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Теперь прибавим к четвертой строке третью, вычтем из третьей вторую умноженную на два, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Меняя местами третью и четвертую строки, получим искомый ступеньчатый вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последней ненулевой является третья строка, поэтому $\mathrm{rank} A = 3$.

Системы линейных уравнений. Формулы Крамера.

Системой из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$ называется следующий набор уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.5}$$

Числа a_{ij} называются *коэффициентами при неизвестных*, а числа b_j – *свободными членами*. Коэффициенты при неизвестных составляют матрицу $A = (a_{ij})$, называемую *матрицей системы*. Если к матрице системы A дописать справа столбец свободных членов, то получим, так называемую, *расширенную матрицу системы* $\widetilde{A}$. *Решением системы* называется такой набор значений неизвестных $x_1 = c_1, \ldots, x_n = c_n$, который обращает каждое уравнение в верное равенство.

Системы, где число уравнений n равно числу неизвестных m, называются *квадратными*. Определитель матрицы A квадратной системы линейных уравнений обозначают специальным символом Δ, $\Delta = |A|$. Системы, где все свободные члены равны нулю называются *однородными*. Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае система называется *несовместной*.

Квадратные системы линейных уравнений, для которых $\Delta \neq 0$ всегда совместны и имеют единственное решение, задаваемое явными формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{1.6}$$

где Δ_i определитель получаемый из Δ заменой $i-$го столбца на столбец свободны членов. Формулы (1.6) называют формулами Крамера.

Пример 1.9.

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + y - 2z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Найдем определитель матрицы системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля, значит решение существует. Найдем $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Получаем $x = \frac{4}{2} = 2$, $y = \frac{2}{2} = 1$, $z = \frac{-2}{2} = -1$. Подставив в систему найденные значения переменных x, y, z, легко убедится, что мы получили решение системы.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса позволяет найти решение произвольной системы линейных уравнений, если система совместна, или выяснить, что система несовместна. Кратко, суть метода состоит в приведении системы линейных уравнений к системе специального вида, для которой решение находится очень просто.

Две системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Если в системе линейных уравнений, мы уножим некоторое уравнение на ненулевое число, прибавим к одному уравнению другое, умноженное на число, поменяем местами два уравнения, то получим систему, эквивалентную исходной. Назовем данные преобразования над уранениями в системе *элементарными* по аналогии с элементарными преобразованиями строк матрицы. Вместо того, чтобы производить перечисленные действия над уравнениями в системе, мы можем производить действия над строками ее расширенной матрицы.

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений (1.5), необходимо ее расширенную матрицу $\widetilde{A}$ с помощью элементарных преобразований над строками привести к ступенчатому виду

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1i_2-1} & c_{1i_2} & c_{1i_2+1} & \dots & c_{1i_k-1} & c_{1i_k} & c_{1i_k+1} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_{2i_2} & c_{2i_2+1} & \dots & c_{2i_k-1} & c_{2i_k} & c_{2i_k+1} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{ki_k} & c_{ki_k+1} & \dots & c_{kn} & d_k \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{k+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{pmatrix}.$$

В зависимости от точного вида получившейся матрицы возможны несколько случаев:

1)Среди чисел $d_{k+1}, \dots, d_m$ не все равны нулю. Это условие эквивалентно тому, что $\mathrm{rank} A \neq \mathrm{rank} \widetilde{A}$. В этом случае система не имеет решений.

2)$d_{k+1} = \dots = d_m = 0$, $k = n$. Это условие эквивалентно тому, что $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} \widetilde{A} = n$. Тогда у системы существует единственное решение, которое находится методом *обратного хода Гаусса*. В этом случае получившаяся после преобразований ступенчатая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n-1} & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n-1} & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \dots & c_{3n-1} & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1n-1} & c_{n-1n} & d_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{nn} & d_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Запишем систему уравнений, соответствующую матрице (1.7), опустив при этом нулевые уравнения.

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad c_{n-1n-1}x_{n-1} + c_{n-1n}x_n = d_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n. \end{cases} \tag{1.8}$$

Данная система (1.8) получена из исходной системы (1.5) элементарными преобразованиями над уравнениями и, следовательно, эквивалентна ей. Из последнего уравнения системы (1.8) найдем $x_n = \dfrac{d_n}{c_{nn}}$ и подставив его в предыдущее уравнение, найдем

$$x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - c_{n-1n}\dfrac{d_n}{c_{nn}}}{c_{n-1n-1}}.$$

Подставив найденное x_{n-1} в третье с конца уравнение системы (1.8) найдем x_{n-2} и т.д. Продвигаясь вверх от уравнения к уравнению, таким образом, найдем решение системы (1.8), а следовательно, и решение системы (1.5).

3)$d_{k+1} = \ldots = d_m = 0$, $k < n$. Это условие эквивалентно тому, что $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}\widetilde{A} < n$. Тогда система имеет бесконечное множество решений, которое можно описать параметрически, выразив одни переменные, которые назовем *базисными* или *зависимыми*, через другие переменные, которые назовем *свободными* или *независимыми*. Независиые переменные выступают в качестве параметров. Придавая им произвольные значения и подставляя их в выражения зависимых переменных, мы найдем все решения системы. Обычно зависимыми объявляют переменные $x_1, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, которые соответствуют началу каждой "ступеньки"в полученной ступенчатой матрице, остальные переменные будем считать независимыми. Зависимыми, однако, можно объявить любые переменные с номерами равными номерам столбцов, входящих в ненулевой минор старшей размерности, остальные переменные в этомм случае являются независимыми – параметрами.

Проилюстрируем третий случай на примере.

Пример 1.10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 6x_5 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Запишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 6 & 6 & 10 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

При помощи элементарных преобразований над строками данная матрица приводится к следующему ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом примере число неизвестных $n = 5$. Из полученного вида расширенной матрицы системы следует, что $k = 3 < n$, $d_{k+1} = d_4 = 0$, поэтому имеет место случай 3). Зависимыми объявим переменные x_1, x_3, x_4 (как уже было указано выше номера зависимых переменных соответсвуют номерам столбцов, в которых начинается каждая из ступенек полученной матрицы), тогда независимыми будут переменные x_2, x_5. Теперь выразим зависимые переменные через независимые, предварительно, выписав систему уравнений, соответствующую данной ступенчатой матрице.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 1 \\ -2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 2 \\ x_4 = 1 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения получаем $x_4 = 1$. Подставив это значение во второе уравнение и выразив оттуда x_3, получим $x_3 = 1 - \dfrac{3}{2}x_5$. Подставим найденные значения x_4 и x_3 в первое уравнение и выразим оттуда x_1. Получим $x_1 = \dfrac{3}{2}x_5 - x_2 - \dfrac{1}{2}$. Таким образом решение исходной системы уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}x_5 - x_2 - \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 1 - \dfrac{3}{2}x_5 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}t_2 - t_1 - \dfrac{1}{2} \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = 1 - \dfrac{3}{2}t_2 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = t_2 \end{cases}.$$

Присваивая произвольные значения переменным x_2, x_5 или параметрам t_1, t_2 получаем всевозможные решения исходной системы.

Задачи

1.2.1 Найти ранг матрицы с помощью ее миноров:

$$1) \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}; \quad 5) \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.2.2 Найти ранг матрицы с помощью элементарных преобразований:

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2)\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 17 & 7 & 1 \\ 1 & 10 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad 4)\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$1)\begin{cases} 3x + 5y = 2 \\ 5x + 9y = 4 \end{cases}; \quad 2)\begin{cases} -x + 3y = 5 \\ 3x - 2y = -1 \end{cases};$$

$$3)\begin{cases} 2x + y - z = 2 \\ 3x + y - 2z = 3 \\ x + z = 3 \end{cases}; \quad 4)\begin{cases} y + 3z = -1 \\ 2x + 3y + 5z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 6 \end{cases};$$

$$5)\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 4y + 2z = 3 \end{cases}; \quad 6)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 16 \\ x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 = 23 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 10 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}.$$

1.2.4 Решить систему однородных уравнений:

$$1)\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 4y + 4z = 0 \end{cases}; \quad 2)\begin{cases} 5x - 8y + 3z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases};$$

$$3)\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}; \quad 4)\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases};$$

$$5)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}; \quad 6)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

1.2.5 Решить систему уравнений методом Гаусса:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} -9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 10x_4 = 3 \\ -6x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} -9x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 7 \\ -4x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$;

5) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$; 6) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = -2 \\ 5x_1 + 2x_3 + 5x_4 = -2 \\ 6x_1 + x_2 + 5x_3 + 7x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$;

7) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \end{cases}$.

Глава 2

Векторная алгебра

2.1 Базис и координаты.

Связанным вектором на плоскости или в пространстве называется упорядоченная пара точек, первая из которых называется *началом вектора*, а вторая – *концом вектора*. Связанный вектор с началом в точке A и концом в точке B принято обозначать $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{AB}$ и изображать стрелкой, как показано на рисунке (Рисунок).

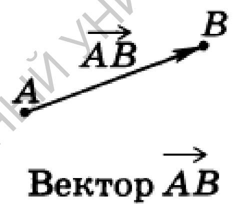


Рис. 2.1: Связанный вектор.

Длиной связанного вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначается длина вектора $\overline{AB}$ как $\left|\overline{AB}\right|$. Два вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *коллинеарными*, если соответствующие отрезки AB и CD находятся на параллельных прямых, при этом, если концы отрезков смотрят в одну сторону, то вектора назвааются *сонаправленными*, а если – в разные стороны, то – *противоположно направленными*. *Нулевым связанным вектором*, называется связанный вектор, у которого начало и конец совпадают. Нулевой связанный вектор имеет нулевую длину и не имеет направления. Углом между связанными векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ называется угол $\angle BAC$. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются перпендикулярными, если отрезки AB и CD перпендикулярны. Обозначение: $\overline{AB} \perp \overline{CD}$.

Два связанных вектора назовем *эквивалентными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Каждый нулевой связанный вектор будем считать эквивалентным самому себе.

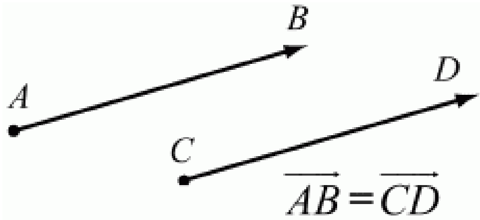


Рис. 2.2: Эквивалентные связанные векторы.

Очевидно, что

1)каждый связанный вектор эквивалентен сам себе,

2)если вектор $\overline{AB}$ эквивалентен вектору $\overline{CD}$, то $\overline{CD}$ эквивалентен $\overline{AB}$,

3)если вектор AB эквивалентен вектору $\overline{CD}$, а вектор $\overline{CD}$ эквивалентен вектору $\overline{EF}$, то вектор $\overline{AB}$ эквивалентен вектору $\overline{EF}$.

Поэтому отношение эквивалентности связанных векторов является абстрактным отношением эквивалентности и множество всех связанных векторов разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности. *Свободным вектором* называется класс эквивалентных друг другу связанных векторов. Любой связанный вектор из класса эквивалентных друг другу связанных векторов, отвечающего данному свободному вектору, называется представителем этого свободного вектора. Свободные векторы обозначаются либо строчными латинскими буквами с чертой сверху ($\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$), либо указанием какого-нибудь связанного вектора – представителя класса эквивалентности. Свободные векторы можно представлять себе как направленные отрезки, которые можно перемещать в пространстве параллельно самим себе.

Длиной и направлением свободного вектора $\overline{a}$ называется длина и направление любого его представителя. Длина свободного вектора обозначается $|\overline{a}|$. *Нулевым свободным вектором* называется класс эквивалентности связанных нулевых векторов. Обозначается нулевой свободный вектор символом $\overline{0}$.

Свободные векторы называются *коллинеарными(сонаправленными, противоположно направленными)*, если соответствующие связанные векторы коллинеарны (сонаправлены, противоположно направленны). То, что вектор $\bar{a}$ коллинеарен (сонаправлен, противоположно направлен) с вектором $\bar{b}$ обозначается как $\bar{a} \parallel \bar{b} (\bar{a} \upuparrows \bar{b}, \bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b})$.Три вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называются *компланарными*, если их представители, отложенные от одной точки располагаются в одной плоскости. Углом между свободными векторами называется угол между их представителями, отложенными из одной точки. Свободные векторы называются перпендикулярными, если их представители перпендикулярны. Обозначение: $\bar{a} \perp \bar{b}$. Далее мы будем рассматривать только свободные векторы, поэтому под термином "вектор"мы будем понимать именно свободный вектор.

Операции над векторами.

1. *Умножение на числа.* Пусть $\bar{a}$ – некоторый вектор, λ – число.

1.а). $\lambda > 0$, тогда вектор $\lambda\bar{a}$ имеет длину $\lambda|\bar{a}|$ и сонаправлен с вектором $\bar{a}$.

2.б). $\lambda < 0$, тогда вектор $\lambda\bar{a}$ имеет длину $|\lambda||\bar{a}|$ и противоположно направлен с вектором $\bar{a}$.

3.в). $\lambda = 0$, тогда вектор $\lambda\bar{a} = \bar{0}$.

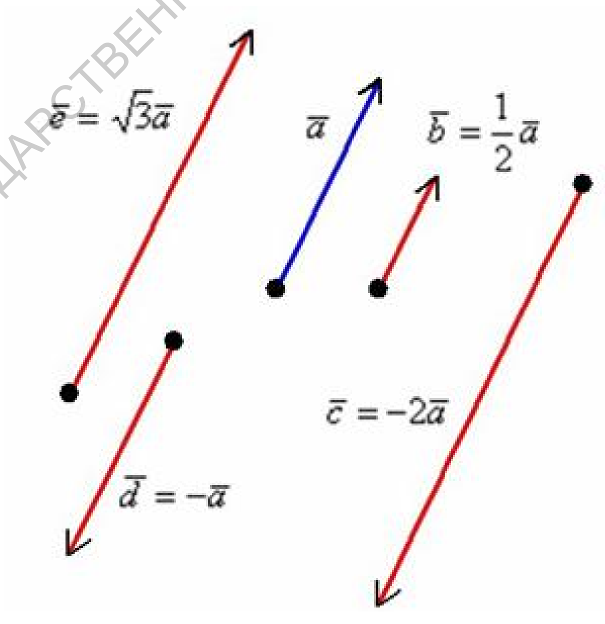


Рис. 2.3: Умножение векторов на числа.

2. *Сложение векторов* Даны два вектора $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$. Существуют два способа получения вектора $\bar{a} + \bar{b}$.

Способ а. (*Правило треугольника для суммы*) Отложим вектор $\bar{b}$ от конца вектора $\bar{a}$, тогда суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($\bar{a} + \bar{b}$) будет вектор, соединяющий начало вектора $\bar{a}$ и конец вектора $\bar{b}$ и направленный в сторону конца вектора $\bar{b}$.

Способ б. (*Правило параллелограмма*) Отложим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из одной точки и достроим до параллелограмма, тогда $\bar{a}+\bar{b}$ – вектор, идущий по диагонали параллелограмма с началом в той же точке.

Пусть теперь $\bar{b} = \bar{0}$, тогда $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$.

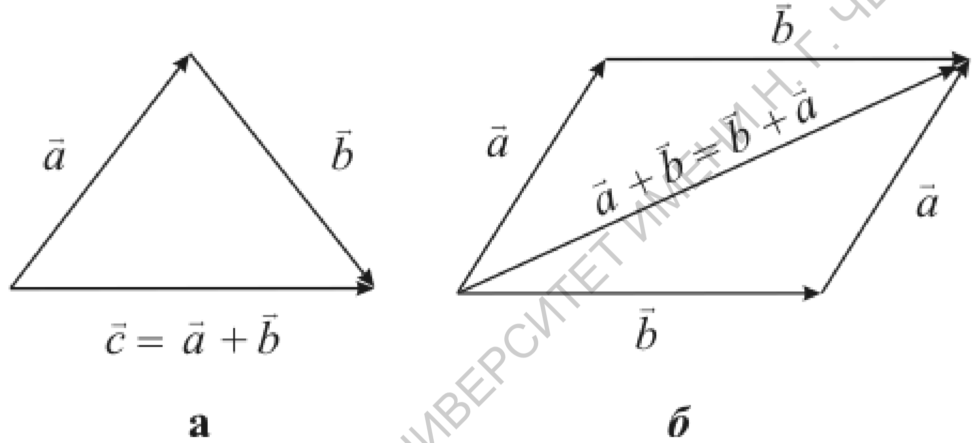


Рис. 2.4: Правила сложения векторов.

Сформулируем явное правило для нахождения суммы произвольного числа векторов, оно называется *правилом многоугольника.* Чтобы найти сумму векторов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ ($\bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_n$), необходимо отложить второй вектор $\bar{a}_2$ от конца первого вектора $\bar{a}_1$, третий вектор $\bar{a}_3$ от конца второго вектора $\bar{a}_2$ и так далее. Тогда вектор $\bar{a}_1+\ldots+\bar{a}_n$ – это вектор, соединяющий начало первого вектора $\bar{a}_1$ и конец последнего вектора $\bar{a}_n$ и направленный в сторону конца последнего вектора.

3. *Разность векторов* (*Правило треугольника для разности*). Разность векторов можно получить с помощью предыдущих операций как $\bar{a}-\bar{b} = \bar{a}+(-1)\bar{b}$. Можно однако указать и явное правило. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$. Отложим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ из одного начала и достроим эту конструкцию до треугольника (возможно вырожденного), соединив концы векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, тогда начало вектора $\bar{a} - \bar{b}$ совпадает с концом вектора $\bar{b}$, а конец с концом вектора $\bar{a}$.

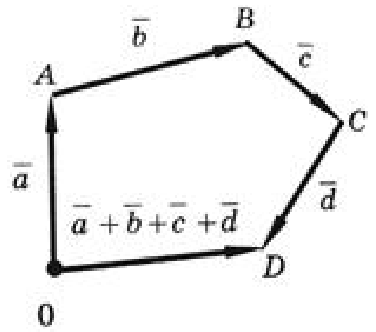


Рис. 2.5: Правило многоугольника.

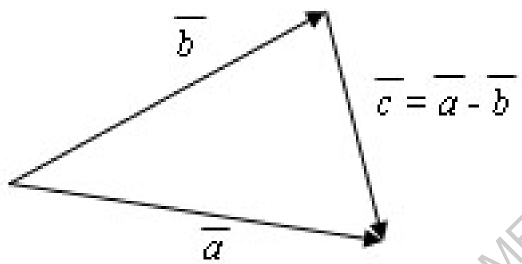


Рис. 2.6: Разность векторов.

Замечание Правила сложения и вычитания векторов можно запомнить следующим образом: если дан треугольник ABC, то $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ и $\overline{AC} = \overline{BC} - \overline{BA}$

Каждому ненулевому вектору $\bar{a}$ мы можем поставить в соответствие сонаправленный с ним вектор единичной длины, обозначаемый $\bar{a}^\circ$ и равный $\dfrac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Он называется ортом вектора $\bar{a}$.

Из определения коллинеарности векторов и правила умножения векторов на числа следует, что из того что $\bar{a} \parallel \bar{b}$ следует, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, для некоторого числа λ. При этом, если $\bar{a} \upuparrows \bar{b}$, то $\lambda > 0$, и если $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$, то $\lambda < 0$.

Базис и координаты.

Вектор $\bar{b}$ называется *линейной комбинацией векторов* $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$, если $\bar{b} = \alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$, для некоторых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Линейная комбинация $\alpha_1\bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{a}_n$ называется тривиальной, если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ называется *линейно зависимыми*, если существует их нетривиальная линейная комбинация равная нулевому вектору, то есть существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю ($|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| > 0$), такие, что $\alpha_1 \bar{a}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}$. В противном случае векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ называются *линейно независимыми.*

Базисом на плоскости (в пространстве) называется любая максимальная по числу векторов система линейно независимых векторов на плоскости (в пространстве). Можно показать, что максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум, а в пространстве – трем. Два вектора на плоскости будут линейно зависимыми, если они коллинеарны и, соответсвенно, линейно независимыми, если они не коллинеарны, три вектора в пространстве будут линейно зависимыми, если они компланарны, и, соответственно, линейно независимыми, если они не компланарны. Тогда можно сформулировать эквивалентное определение базиса на плоскости и в пространстве.

Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов, *базисом в пространстве* называется тройка некомпланрных векторов. Обычно базис на плоскости обозначается как $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, а базис в пространстве обозначается как $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Любой вектор на плоскости или в пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов. Рассмотрим для определенности случай пространства. Пусть $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – базис, $\bar{a}$ – произвольный вектор, тогда существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, что $\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \alpha_3 \bar{e}_3$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *координатами вектора* $\bar{a}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Координаты вектора обычно записывают рядом с обозначением вектора в круглых скобках, через запятую.

Пусть даны два вектора $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, координаты которых заданы в одном и том же базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ и число λ. Тогда в том же базисе вектор $\lambda\bar{a}$ имеет координаты $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$, вектор $\bar{a} + \bar{b}$ имеет координаты $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$, а вектор $\bar{a} - \bar{b}$ имеет координаты $(\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3)$. Условие коллинеарности векторов равносильно пропорциональности их координат, причем для сонаправленных векторов коэффициент пропорциональности положителен, а для противоположно направленных – отрицательный.

Для того, чтобы три вектора $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\bar{c}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, координаты которых заданы в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, сами образовывали базис необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов не был равен нулю

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ называется ортонормированным, если $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = 1$ и $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$, $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_3$, $\bar{e}_2 \perp \bar{e}_3$. Ортонормированный базис на плоскости определяется аналогично. Ортонормированный базис обычно обозначают $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

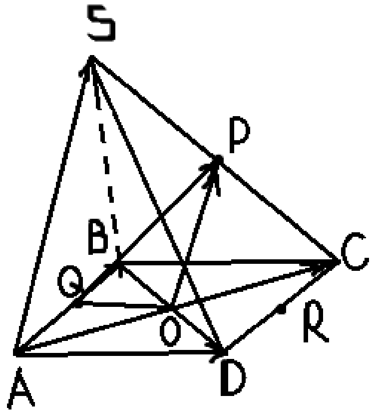
Пусть выбрана точка O – начало, *радиус-вектором* точки M называется вектор $\overline{OM}$. *Системой координат на плоскости* называется совокупность из выбранной точки этой плоскости – начала координат и некоторого базиса на плоскости. Обозначение: $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, где O – начало, $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – базис. *Системой координат в пространстве* называется совокупность из выбранной точки – начала координат и некоторого базиса в пространстве. Обозначение: $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Система координат называется ортонормированной или декартовой, если соответсвующий базис – ортонормированный. *Координатами* точки M в системе координат $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OM}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. (Для случая плоскости координаты точки определяются аналогично). Как и координаты вектора координаты точки пишутся рядом с обозначением точки в круглых скобках через запятую.

Пусть дана система координат $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ и точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ с координатами в данной системе, тогда вектор $\overline{AB}$ будет иметь координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Пример 2.1.

Рассмотрим следующую задачу: Дана четырехугольная пирамида $SABCD$, основание которой $ABCD$ – параллелограмм, P – середина SC, Q – середина AB, R – середина CD, O – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$. Найти координаты векторов $\overline{BD}$, $\overline{SC}$, $\overline{OP}$, $\overline{PQ}$ в базисе $\{\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AS}\}$ и координаты точек P, R в системе координат $\{A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AS}\}$.

По правилу вычитания векторов $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$. По определению



координат вектора (коэффициенты перед базисными векторами в разложении вектора по базису) вектор $\overline{BD}$ имеет координаты $(-1, 1, 0)$.

$\overline{SC} = \overline{AC} - \overline{AS}$, по правилу параллелограмма $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$, тогда $\overline{SC} = \overline{AB} + \overline{AD} - \overline{AS}$. Получаем, что вектор $\overline{SC}$ имеет координаты $(1, 1, -1)$.

По правилу треугольника сложения векторов $\overline{OP} = \overline{OC} + \overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{CS}$. $\overline{AC}(1, 1, 0)$, $\overline{CS}(-1, -1, 1)$, так как координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат, а при умножении вектора на число каждая координата умножается на это число, получаем $\overline{OP}\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

$\overline{PQ} = \overline{OQ} - \overline{OP}$, $\overline{OQ} = \frac{1}{2}\overline{DA} = -\frac{1}{2}\overline{AD}$, $\overline{OQ}\left(0, -\frac{1}{2}, 0\right)$. Получаем $\overline{PQ}\left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

По определению координаты точки – это координаты ее радиус-вектора. Радиус-вектор точки P – $\overline{AP} = \overline{AO} + \overline{OP}$. $\overline{AO}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, поэтому $\overline{AP}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, а значит $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Радиус-вектор точки R – $\overline{AR} = \overline{AD} + \overline{DR} = \overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AB}$, поэтому $R\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$.

Задачи.

2.1.1. Доказать, что для любых трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha\bar{a} - \beta\bar{b}$, $\gamma\bar{b} - \alpha\bar{c}$, $\beta\bar{c} - \gamma\bar{a}$ линейно зависимы.

2.1.2. Даны четыре вектора $\bar{a}(3,0,-2)$, $\bar{b}(1,2,-5)$, $\bar{c}(-1,1,1)$, $\bar{d}(8,4,1)$ найти координаты векторов $-5\bar{a}+\bar{b}-6\bar{c}+\bar{d}$ и $3\bar{a}-\bar{b}-\bar{c}-\bar{d}$.

2.1.3. Вектор $\bar{a}$ имеет в некотором базисе координаты $(x, 1-x)$, а вектор $\bar{b}$ координаты (x^2-2x, x^2-2x+1). При каких x векторы коллинеарны, одинаково направлены?

2.1.4. Даны четыре вектора $\bar{a}(4,1,-1)$, $\bar{b}(3,-1,0)$, $\bar{c}(-1,1,1)$, $\bar{d}(-1,3,4)$. Найти числа α, β, γ такие, что $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}+\bar{d}=\bar{0}$.

2.1.5. Проверить, что векторы $\bar{a}(4,1,-1)$, $\bar{b}(1,2,-5)$, $\bar{c}(-1,1,1)$ образуют базис в пространстве и найти в этом базисе координаты векторов $\bar{l}(4,4,-5)$, $\bar{m}(2,4,-10)$, $\bar{n}(0,3,-4)$.

2.1.6. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина отрезка BC и точка O – точка пересечения диагоналей. Принимая за базис $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$, найти координаты векторов $\overline{BD}, \overline{CO}, \overline{KD}$.

2.1.7. $ABCD$ – параллелограмм. Найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ в базисе $\{\overline{AC}, \overline{BD}\}$.

2.1.8. В треугольнике ABC точка M – середина отрезка AB и точка O – точка пересечения медиан. Найти координаты векторов $\overline{AM}, \overline{AO}, \overline{MO}$ в базисе $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

2.1.9. В четырехугольнике $ABCD$ положим $\overline{AB}=\bar{m}$, $\overline{BC}=\bar{n}$, $\overline{CD}=\bar{p}$, $\overline{DA}=\bar{q}$. Найти вектор $\overline{EF}$, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

2.1.10. В трапеции ABCD длины оснований AD и BC относятся как $3:2$. O – точка пересечения диагоналей трапеции, S – точка пересечения продолжений боковых сторон. Найти координаты векторов $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ в базисе $\{\overline{AC}, \overline{BD}\}$.

2.1.11. В трапеции ABCD длины оснований AD и BC относятся как $3:1$. O – точка пересечения диагоналей трапеции, S – точка пересечения продолжений боковых сторон. Найти координаты векторов $\overline{AC}, \overline{AO}, \overline{AS}$ в базисе $\{\overline{AD}, \overline{AB}\}$.

2.1.12. В тетраэдре $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q – середины ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC соотвественно, S – точка пересечения медиан треугольника ABC. $\{\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}\}$ – базис. Найти координаты векторов:

1) $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$;

2) $\overline{KL}, \overline{PQ}, \overline{CN}, \overline{MP}, \overline{KQ}$;

3) $\overline{OS}$ и $\overline{KS}$.

2.1.13. Точка M лежит на отрезке AB и $AM : BM = m : n = \lambda$.

1) Выразить радиус-вектор точки M – $\overline{OM}$ через радиус-векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$, если O – точка, не лежащая на одной прямой с точками A и B.

2) Найти координаты точки M, если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$.

2.1.14. В треугольнике ABC проведена биссектрисса AD. Найти координаты вектора $\overline{AD}$ в базисе $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.

2.1.15. Точки F и E – середины сторон AB и CD четерехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overline{FE} = \dfrac{\overline{BC} + \overline{AD}}{2}$.

2.1.16. На сторонах треугольника ABC построены произвольные параллеллограммы $ABML$, $BCPN$, $ACQR$. Доказать, что из отрезков RL, MN, PQ можно составить треугольник.

2.1.17. Проверить, что векторы, совпадающие с медианами любого треугольника могут служить сторонами другого треугольника.

2.1.18. В трапеции ABCD длины оснований AD и BC относятся как $4 : 1$. O – точка пересечения диагоналей трапеции, S – точка пересечения продолжений боковых сторон. Найти координаты точек O и S в системе координат $\{A, \overline{AD}, \overline{AB}\}$.

2.1.19. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В системе координат $A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1}$ найти координаты точек:

1) C, B_1, C_1;

2) K и L – середин ребер A_1B_1 и CC_1 соотвественно;

3) M и N – точек пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1 соответсвенно;

4) O – точки пересечения диагоналей параллелепипеда.

2.1.20. Три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, не лежащие на одной прямой, являются последовательными вершинами параллелограмма. Найти координаты четвертой вершины D этого параллелограмма.

2.1.21. Доказать, что если диагонали четерехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм.

2.1.22. Изменится ли сумма компланарных векторов, если все слагаемые векторы повернуть на один и тот же угол?

2.1.23. Доказать, что сумма векторов, соединяющих центр правильного n-угольника с его вершинами, равна нулевому вектору.

2.1.24. Точки K и L – середины сторон AB и BC параллелограмма $OABC$. Доказать, что точка пересечения диагоналей $OABC$ совпадает с точкой пересечения медиан треугольника OKL.

2.1.25. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, проходят через одну и ту же точку и делятся в ней пополам.

2.1.26. Доказать, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке.

2.2 Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.

Проекцией вектора $\bar{a}$ *на орт* $\bar{e}^{\circ}$ называется число равное $|\bar{a}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{e}^{\circ}})$. Обозначение: $pr_{\bar{e}^{\circ}}\bar{a}$. Если дан ортонормированный базис $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, то координаты вектора $\bar{a}$ совпадают с проекциями этого вектора на соответствующие базисные векторы.

Скалярное произведение.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$$(\bar{a},\bar{b}) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}}), \quad \text{если } \bar{a}\neq 0,\ \bar{b}\neq\bar{0},$$
$$(\bar{a},\bar{b}) = 0, \quad \text{если } \bar{a}=\bar{0} \text{ или } \bar{b}=\bar{0}.$$

Скалярное произведение также обозначается как $\bar{a}\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения.

1) *Коммутативность*: $(\bar{a},\bar{b}) = (\bar{b},\bar{a})$.

2) *Линейность*:

$$(\alpha_1\bar{a}_1+\alpha_2\bar{a}_2,\bar{b}) = \alpha_1(\bar{a}_1,\bar{b})+\alpha_2(\bar{a}_2,\bar{b}),$$
$$(\bar{a},\beta_1\bar{b}_1+\beta_2\bar{b}_2) = \beta_1(\bar{a},\bar{b}_1)+\beta_2(\bar{a},\bar{b}_2).$$

3) Равенство нулю: $(\bar{a},\bar{b})=0 \Leftrightarrow \bar{a}\perp\bar{b}$.

4) Длина вектора: $|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{\bar{a}^2}$, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Пользуясь линейностью скалярного произведения можно получить выражение для скалярного произведения векторов $\bar{a}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $\bar{b}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, координаты которых заданы в базисе $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$, через координаты и скалярные произведения базисных векторов.

$$(\bar{a},\bar{b}) = \sum_{i,j=1}^{3}\alpha_i\beta_j(\bar{e}_i,\bar{e}_j) = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i\bar{e}_i^2 + \sum_{1\le i<j\le 3}(\alpha_i\beta_j+\alpha_j\beta_i)(\bar{e}_i,\bar{e}_j).$$

Если базис ортонормированный $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, то $(\bar{i},\bar{j}) = (\bar{i},\bar{k}) = (\bar{j},\bar{k}) = 0$, $\bar{i}^2=\bar{j}^2=\bar{k}^2=1$, поэтому для векторов $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$ и $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$

$$(\bar{a},\bar{b}) = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Используя свойство 4), можно получить формулу модуля вектора $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ с координатами в ортонормированном базисе

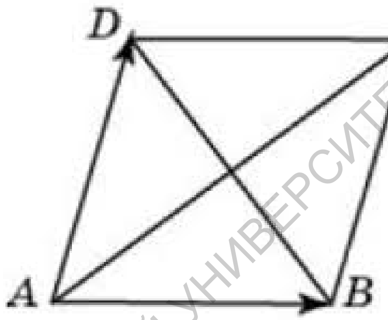
$$|\bar{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Из определения скалярного произведения получим следующую формулу для вычисления угла между векторами

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

Пример 2.2.

Рассмотрим следующую задачу: Доказать, что диагонали ромба перпендикулярны.



Для решения воспользуемся свойством 3) скалярного произведения и докажем, что $(\overline{AC}, \overline{BD}) = 0$. Выберем в качестве базиса $\{\overline{AB}, \overline{AD}\}$, тогда $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB}$, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$. $(\overline{AC}, \overline{BD}) = (\overline{AB} + \overline{AD}, \overline{AD} - \overline{AB}) =$ по линейности скалярного произведения $= (\overline{AB}, \overline{AD}) - (\overline{AB}, \overline{AB}) + (\overline{AD}, \overline{AD}) - (\overline{AD}, \overline{AB}) =$ по коммутативности скалярного произведения $= (\overline{AB}, \overline{AB}) - (\overline{AD}, \overline{AD})$. По свойству 4) скалярного произведения $(\overline{AB}, \overline{AB}) = \left|\overline{AB}\right|^2$, $(\overline{AD}, \overline{AD}) = \left|\overline{AD}\right|^2$, . Так как $ABCD$ – ромб, то $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{AD}\right|$. Получаем $(\overline{AC}, \overline{BD}) = \left|\overline{AD}\right|^2 - \left|\overline{AB}\right|^2 = 0$. Что и требовалось доказать.

Векторное и смешанное произведение.

Тройка векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ называется *правой (левой)*, если, смотря с конца третьего вектора $\bar{e}_3$, мы видим, что направление поворота от

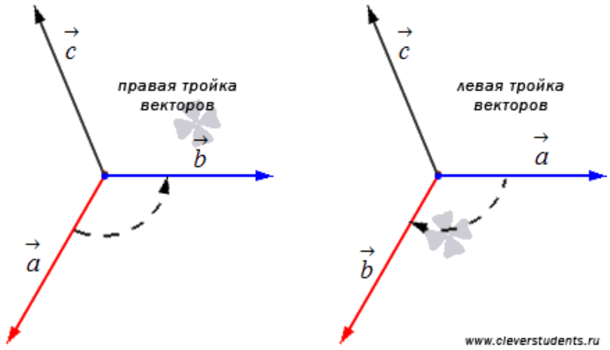


Рис. 2.7: Правая и левая тройки.

первого вектора $\bar{e}_1$ ко второму $\bar{e}_2$ против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Векторным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $[\bar{a}, \bar{b}]$, который определяется следующими условиями:

1) $\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$,

2) $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}$, $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{b}$ и тройка векторов $\{\bar{a}, \bar{b}, [\bar{a}, \bar{b}]\}$ – правая.

Свойства векторного произведения.

1) *Антикоммутативность*: $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

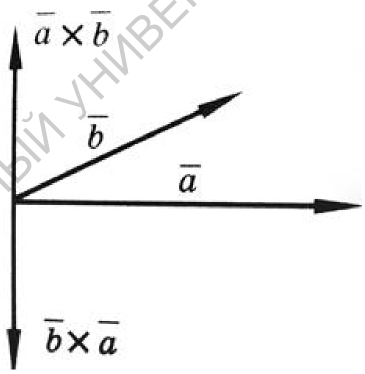


Рис. 2.8: Антикоммутативность векторного произведения.

2) *Линейность*:

$$[\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2, \bar{b}] = \alpha_1 [\bar{a}_1, \bar{b}] + \alpha_2 [\bar{a}_2, \bar{b}],$$
$$[\bar{a}, \beta_1 \bar{b}_1 + \beta_2 \bar{b}_2] = \beta_1 [\bar{a}, \bar{b}_1] + \beta_2 [\bar{a}, \bar{b}_2].$$

3) Равенство нулю: $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$.

4) Геометрический смысл модуля векторного произведения: *модуль вектора векторного произведния равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах, отложенных из одного начала.*

Пользуясь линейностью векторного произведения, можно получить выражение для векторного произведения векторов $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, координаты которых заданы в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, через координаты и векторные произведения базисных векторов. Так как $[\bar{e}_i, \bar{e}_i] = \bar{0}$, $[\bar{e}_i, \bar{e}_j] = -[\bar{e}_j, \bar{e}_i] \quad i, j = 1, 2, 3$, то

$$[\bar{a}, \bar{b}] = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\bar{e}_2, \bar{e}_3].$$

Если дан ортонормированный базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, то $[\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k}$, $[\bar{i}, \bar{k}] = -\bar{j}$, $[\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i}$, поэтому для векторов $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{aligned}[\bar{a}, \bar{b}] &= (y_1z_2 - y_2z_1)\bar{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\bar{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\bar{k} = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \big([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}\big)$.

Свойства смешанного произведения.

1)$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$.

2) *Линейность*:

$$\begin{aligned}(\alpha_1\bar{a}_1 + \alpha_2\bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}) &= \alpha_1(\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c}) + \alpha_2(\bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}), \\ (\bar{a}, \beta_1\bar{b}_1 + \beta_2\bar{b}_2, \bar{c}) &= \beta_1(\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{c}) + \beta_2(\bar{a}, \bar{b}_2, \bar{c}), \\ (\bar{a}, \bar{b}, \gamma_1\bar{c}_1 + \gamma_2\bar{c}_2) &= \gamma_1(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_1) + \gamma_2(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}_2).\end{aligned}$$

3) Равенство нулю: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ компаланарны.

4) Геометрический смысл модуля смешанного произведения: модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных из одного начала.

Пользуясь свойствами 1), 2) и 3) смешанного произведения, можно получить выражение для смешанного произведения векторов $\bar{a}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ и $\bar{c}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, координаты которых заданы в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, через координаты и смешанное произведение базисных векторов.

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = (\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{vmatrix}.$$

Если дан ортонормированный базис $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, то $(\bar{i},\bar{j},\bar{k}) = 1$, поэтому для векторов $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$ и $\bar{c}(x_3,y_3,z_3)$ получим

$$(\bar{a},\bar{b},\bar{c}) = \begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Задачи.

2.2.1. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если

1) $|\bar{a}| = 3,\ |\bar{b}| = 1,\ (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 45^\circ$;

2) $|\bar{a}| = 6,\ |\bar{b}| = 7,\ (\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = 120^\circ$

3) $|\bar{a}| = 5,\ |\bar{b}| = 1$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены;

4) $|\bar{a}| = 5,\ |\bar{b}| = 1$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ противоположно направлены.

2.2.2. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами:

1) $\bar{a}(4,-1)$, $\bar{b}(-1,-7)$;

2) $\bar{a}(2,1)$, $\bar{b}(1,-3)$.

2.2.3. Найти угол между векторами, заданными своими координатами:

1) $\bar{a}(1,2)$, $\bar{b}(2,4)$;

2) $\bar{a}(1,-1)$, $\bar{b}(-4,2)$.

2.2.4. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(-1,2)$, $B(5,10)$;

2) $A(3,-2)$, $B(3,3)$.

2.2.5. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами:

1) $\bar{a}(3,2,-5)$, $\bar{b}(10,1,2)$;

2) $\bar{a}(1,0,3)$, $\bar{b}(-4,15,1)$.

2.2.6. Найти угол между векторами, заданными своими координатами:

1) $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b}(5,1,1)$;

2) $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b}(-2,2,-2)$.

2.2.7. Найти расстояние между точками A и B, заданными своими координатами:

1) $A(4,-2,3)$, $B(4,5,2)$;

2) $A(-3,1,-1)$, $B(-1,1,-1)$.

2.2.8. Даны три вектора $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b}(5,1,1)$, $c(0,3,-2)$. Вычислить:

1) $\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\bar{b})$;

2) $|\bar{a}|^2+|\bar{c}|^2-(\bar{a},\bar{b})(\bar{b},\bar{c})$;

3) $(\bar{a},\bar{c})(\bar{a},\bar{b})-|\bar{a}|^2(\bar{b},\bar{c})$.

2.2.9. Доказать, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\bar{b})$ перпендикулярны.

2.2.10. Доказать тождества:

1) $(\bar{a}+\bar{b})^2=\bar{a}^2+2(\bar{a},\bar{b})+\bar{b}^2$;

2) $(\bar{a}-\bar{b})^2=\bar{a}^2-2(\bar{a},\bar{b})+\bar{b}^2$.

2.2.11. Даны три вектора $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ такие, что $|\bar{a}|=|\bar{b}|=|\bar{c}|=1$, $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$. Вычислить $(\bar{a},\bar{b})+(\bar{b},\bar{c})+(\bar{c},\bar{a})$.

2.2.12. В треугольнике ABC даны длины сторон. Найти скалярное произведение $\overline{AC},\overline{BC}$, если:

1) $|AB|=5,\ |BC|=3,\ |AC|=4$;

2) $|AB|=7,\ |BC|=4,\ |AC|=5$;

3) $|AB|=3,\ |BC|=2,\ |AC|=3$.

2.2.13. Дан треугольник ABC. Выразить через $\bar{b}=\overline{AB}$ и $\bar{c}=\overline{AC}$:

1) длину стороны BC;

2) длину медианы AM;

3) площадь треугольника.

2.2.14. Доказать, что для произвольного треугольника ABC и произвольной точки O выполнено равенство $(\overline{AB},\overline{OC})+(\overline{BC},\overline{OA})+(\overline{CA},\overline{OB})=0$.

2.2.15. Доказать, что для произвольного прямоугольника $ABCD$ и для произвольной точки M имеют место равенства:

1) $(\overline{MA},\overline{MC})=(\overline{MB},\overline{MD})$;

2) $|MA|^2+|MC|^2=|MB|^2+|MD|^2$.

2.2.16. Дан базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ такой, что $|\bar{e}_1| = \sqrt{2}$, $|\bar{e}_2| = 1$, $(\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2}) = 45^\circ$. Найти длины диагоналей и углы параллелограмма, построенного на векторах, имеющих в этом базисе координаты $(2, 2)$ и $(-1, 4)$.

2.2.17. Дана система координат $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ такая, что $|\bar{e}_1| = 4$, $|\bar{e}_2| = 2$, $(\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2}) = 120^\circ$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника $A(-2, 2)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 0)$. Найти длины сторон и углы треугольника.

2.2.18. Дан базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ такой, что $|\bar{e}_1| = 3$, $|\bar{e}_2| = \sqrt{2}$, $|\bar{e}_3| = 4$, $(\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_2}) = (\widehat{\bar{e}_2, \bar{e}_3}) = 45^\circ$, $(\widehat{\bar{e}_1, \bar{e}_3}) = 60^\circ$. Вычислить длины сторон и углы параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}(1, -3, 0)$ и $\bar{b}(-1, 2, 1)$.

2.2.19. Даны два вектора $\bar{a} \neq \bar{0}$ и $\bar{b}$. Выразить через $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональную проекцию вектора $\bar{b}$ на прямую, направление которой определяется вектором $\bar{b}$.

2.2.20. Дан равнобедренный треугольник $ABC\,(AB = BC)$. Доказать, что биссектриса угла B является и высотой.

2.2.21. Доказать, что угол, опирающийся на диаметр круга, – прямой.

2.2.22. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Найти отношение λ, в котором точка H делит отрезок AB.

2.2.23. Даны три вектора $\bar{a}(4, 1, 5)$, $\bar{b}(0, 5, 2)$, $\bar{c}(-6, 2, 3)$. Найти вектор $\bar{x}$, такой что $(\bar{x}, \bar{a}) = 18$, $(\bar{x}, \bar{b}) = 1$, $(\bar{x}, \bar{c}) = 1$.

2.2.24. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти углы треугольника.

2.2.25. Длины соседних сторон параллелограмма относятся как $m : n$, а угол между этими сторонами равен α. Найти угол между диагоналями параллелограмма.

2.2.26. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а отношение длин оснований равно $m : n$ $(m > n)$. Найти:

1) отношение длин боковых сторон;

2) отношение длин диагоналей;

3) величину острого угла трапеции.

2.2.27. В параллелограмме $ABCD$ точки K и L – середины сторон BC и CD соответственно. Найти длину стороны AD, если $AK = 6$, $AL = 3$, а угол KAL равен 60°.

2.2.28. Длины сторон треугольника связаны соотношением $a^2+b^2=5c^2$. Доказать, что две медианы треугольника перпендикулярны.

2.2.29. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Доказать, что если перпендикулярны ребра AB и CD и ребра AC и BD, то ребра BC и AD тоже перпендикулярны.

2.2.30. Найти углы, которые образует диагональ куба с его ребром, диагонали двух граней, исходящие из одной точки.

2.2.31. Найти векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, заданных своими координтантами.:

1) $\bar{a}(3,-1,2)$, $\bar{b}(2,-3,-5)$;

2) $\bar{a}(2,-1,1)$, $\bar{b}(-4,2,-2)$.

2.2.32. Упростить выражения:

1) $[\bar{a}+\bar{b},\bar{a}-\bar{b}]$;

2) $[\bar{a}-\bar{b}+\dfrac{\bar{c}}{2},-\bar{a}+2\bar{b}-5\bar{c}]$.

2.2.33. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны. При каких заначениях скаляра λ коллинеарны векторы $\lambda\bar{a}+\bar{b}$ и $3\bar{a}+\lambda\bar{b}$.

2.2.34. На векторах $\bar{a}(2,3,1)$ и $\bar{b}(-1,1,2)$ отложенных из одной точки построен треугольник. Найти площадь треугольника и длины его высот. Система координат декартова.

2.2.35. Дана система координат $\{O,\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ такая, что $|\bar{e}_1|=3$, $|\bar{e}_2|=2$, $(\widehat{\bar{e}_1,\bar{e}_2})=30^\circ$. В этой системе координат заданы координаты трех последовательных вершин параллелограмма$(1,3)$, $(1,0)$, $(-1,2)$. Найти площадь параллелограмма.

2.2.36. Даны два вектора $\bar{a}(1,-1,1)$ и $\bar{b}(5,1,1)$. Найти вектор $\bar{c}$ единичной длины, перпендикулярный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

2.2.37. Доказать тождества:

$$1)\ \big|[\bar{a},\bar{b}]\big|^2=\begin{vmatrix}(\bar{a},\bar{a}) & (\bar{a},\bar{b})\\ (\bar{a},\bar{b}) & (\bar{b},\bar{b})\end{vmatrix}.$$

2) $\big[\bar{a},[\bar{b},\bar{c}]\big]=\bar{b}(\bar{a},\bar{c})-\bar{c}(\bar{a},\bar{b})$.

2.2.38. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $\dfrac{1}{2}\big|[\overline{AC},\overline{BD}]\big|$.

2.2.39. Найти смешанное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, заданных своими координатами:

1) $\bar{a}(1,-1,1)$, $\bar{b}(7,3,-5)$, $\bar{c}(-2,2,-2)$;

2) $\bar{a}(3,5,1)$, $\bar{b}(4,0,-1)$, $\bar{c}(2,1,1)$.

2.2.40. Проверить компланарны ли векторы, заданные своими координатами в произвольном базисе:

1) $\bar{a}(2,3,5)$, $\bar{b}(7,1,-1)$, $\bar{c}(3,-5,-11)$;

2) $\bar{a}(2,0,1)$, $\bar{b}(5,3,-3)$, $\bar{c}(3,3,10)$.

2.2.41. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ некомпланарны. При каких значениях скаляра λ компланарны векторы $\bar{a}+2\bar{b}+\lambda\bar{c}$, $4\bar{a}+5\bar{b}+6\bar{c}$, $7\bar{a}+8\bar{b}+\lambda^2\bar{c}$?

2.2.42. Даны точки $A(2,1,-1)$, $B(3,0,2)$, $C(5,1,1)$, $D(0,-1,3)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найти объем тетраэдра и высоту, опущенную из вершины B.

2.2.43. Даны координаты точек $A(1,0,2)$, $B(-2,3,0)$, $C(,-1,3,1)$, $D(0,1,-4)$. Доказать, что четырехугольник $ABCD$ – плоский и найти его площадь.

2.2.44. Доказать тождества:

1) $\big[[\bar{a},\bar{b}],[\bar{c},\bar{d}]\big]=\bar{c}(\bar{a},\bar{b},\bar{d})-\bar{d}(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$;

2) $\bar{d}(\bar{a},\bar{b},\bar{c})=\bar{a}(\bar{b},\bar{c},\bar{d})+\bar{b}(\bar{c},\bar{a},\bar{d})+\bar{c}(\bar{a},\bar{b},\bar{d})$;

3) $\big([\bar{a},\bar{b}],[\bar{b},\bar{c}],[\bar{c},\bar{a}]\big)=(\bar{a},\bar{b},\bar{c})^2$.

2.2.45. Доказать что:

1) если векторы $[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{b},\bar{c}]$, $[\bar{c},\bar{a}]$ компланарны, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны;

2) если векторы $[\bar{a},\bar{b}]$, $[\bar{b},\bar{c}]$, $[\bar{c},\bar{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

2.2.46. Даны три вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$. Найти проекцию вектора $\bar{c}$ на плоскость векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Ответы к задачам.

1.1.1.

$$1)\begin{pmatrix}-1 & -14\\ 8 & 2\end{pmatrix};\quad 2)\begin{pmatrix}10 & 0\\ -1 & 1\\ -6 & -9\end{pmatrix};\quad 3)\begin{pmatrix}21 & 7 & 6\\ -5 & 6 & -8\end{pmatrix};$$

$$4)\begin{pmatrix}5 & 3\\ 0 & 17\end{pmatrix};5)\begin{pmatrix}0 & -1 & -5\\ 26 & 11 & 23\end{pmatrix};\quad 6)\begin{pmatrix}5 & 8 & 5\\ 8 & 19 & 8\\ 5 & 8 & 5\end{pmatrix};$$

$$7)\begin{pmatrix}2 & -6 & -2\\ -2 & 6 & 2\\ 4 & -12 & -4\end{pmatrix};\quad 8)\begin{pmatrix}4 & -4 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 1 & -6 & 4 & -1\\ 3 & 2 & -3 & 2\end{pmatrix}.$$

1.1.2.

$$1)\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix}-1 & 2 & -2\\ 0 & -3 & 6\\ 8 & -4 & -5\end{pmatrix};\ 3)\begin{pmatrix}\cos n\alpha & \sin n\alpha\\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha\end{pmatrix};\ 4)\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0\lambda^n & \end{pmatrix}$$

1.1.3. $1)\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix}18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\\ 18 & 18 & 18\end{pmatrix}.$ **1.1.4.** $1)\begin{pmatrix}3 & 1\\ -4 & -1\end{pmatrix};\ 2)\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

1.1.6. 1)Четная; 2)нечетная; 3)нечетная; 4)четная; 5)нечетная. **1.1.7.** 1)11; 2)-26; 3)-46; 4)-78; 5)14. **1.1.10.** 1)-1; 2)43; 3)-77; 4)144; 5)-138.

1.1.11. 1)-5; 2)18; 3)7; 4)0; 5)198; 6)-8.

1.1.12. 1) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$; 3)$\dfrac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 9 & 10 & 11 \\ -13 & -25 & -18 \end{pmatrix}$;

4)$\dfrac{1}{63}\begin{pmatrix} 12 & 11 & -5 \\ -21 & 7 & 14 \\ 22 & -5 & 8 \end{pmatrix}$; 5)$\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 19 & -1 & -11 \\ -18 & 2 & 1 \\ -11 & 10 & 7 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.1.13. 1) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & -\frac{9}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

1.2.1. 1)2; 2)3; 3)2; 4)3; 5)2; 6)3. **1.2.2.** 1)2; 2)3; 3)3; 4)4. **1.2.3.** 1)(-1,1); 2)(1,2); 3)(2,-1,1); 4)(1,2,-1); 5)(3,2,1); 6)(1,3,0,1). **1.2.4.** 1)$x = y = t,\ z = -2t$; 2)$x = y = z = t$; 3)$x = z = t,\ y = -2t$; 4)$x_1 = t_1 + 10t_2,\ x_2 = t_1 + 7t_2,\ x_3 = t_1,\ x_4 = 2t_2$; 5)$x_1 = 0,\ x_2 = x_4 = t,\ x_3 = -t$; 6)$x_1 = -2t_1 - 3t_2,\ x_2 = t_1,\ x_3 = t_2,\ x_4 = 0$. **1.2.5.** 1)$x_1 = -4 + 3t_1 - 2t_2,\ x_2 = 3 - 2t_1 + t_2,\ x_3 = t_1,\ x_4 = t_2$; 2)$x_1 = t_1,\ x_2 = t_2,\ x_3 = \dfrac{t_1 - 9t_2 - 2}{11},\ x_4 = \dfrac{-5t_1 + t_2 + 10}{11}$; 3)$x_1 = \dfrac{2}{3}t_1 + \dfrac{1}{24}t_2 - \dfrac{1}{3},\ x_2 = t_1,\ x_3 = -\dfrac{11}{8}t_2,\ x_4 = t_2$; 4) Система несовместна; 5)$x_1 = -2 - t,\ x_2 = t,\ x_3 = 2 + t,\ x_4 = 1$; 6)$x_1 = x_3 = -1 - 5t,\ x_2 = 6t,\ x_4 = 1 + 7t$; 7)$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1$; 8)$x_1 = t_1,\ x_2 = t_2,\ x_3 = 13,\ x_4 = 19 - 3t_1 - 2t_2,\ x_5 = -34$.

2.1.2. $(0,0,0),\ (1,-7,-3)$; **2.1.3.** $x = 0, 1, \dfrac{3}{2}$; **2.1.4.** $\lambda = 0,\ \beta = -1,\ \gamma = -4$; **2.1.5.** $\bar{l}(1,1,1),\ \bar{m}(0,2,0),\ \bar{n}(0,1,1)$; **2.1.6.** $\overline{BD}(-1,1)$, $\overline{CO}(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$, $\overline{KD}(-1, \dfrac{1}{2})$; **2.1.7.**

$\overline{AB}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\overline{BC}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\overline{CD}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\overline{DA}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$; **2.1.8.** $\overline{AM}\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\overline{AO}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\overline{MO}\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$; **2.1.9.** $\overline{EF} = \frac{\bar{m}+\bar{p}}{2} = -\frac{\bar{n}+\bar{q}}{2}$; **2.1.10.** $\overline{AB}\left(\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)$, $\overline{BC}\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$, $\overline{CD}\left(-\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$, $\overline{DA}\left(-\frac{3}{5},-\frac{3}{5}\right)$; **2.1.11.** $\overline{AC}\left(\frac{1}{3},1\right)$, $\overline{AO}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, $\overline{AS}(0,\frac{3}{2})$; **2.1.12.** 1) $\overline{AB}(-1,1,0)$, $\overline{BC}(0,-1,1)$, $\overline{AC}(-1,0,1)$; 2)$\overline{KL}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, $\overline{PQ}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$, $\overline{CN}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\right)$, $\overline{MP}\left(\frac{1}{2},0,0\right)$, $\overline{KQ}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; 3)$\overline{OS}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\overline{KS}\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. **2.1.13.** $\overline{OM}\left(\frac{n}{m+n},\frac{m}{n+m}\right)$; **2.1.14.** $\left(\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|+|\overline{AC}|},\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{AB}|+|\overline{AC}|}\right)$; **2.1.18.** $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C\left(\frac{1}{4},1\right)$, $D(1,0)$, $M\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right)$, $S\left(0,\frac{4}{3}\right)$; **2.1.19.** $C(1,1,0)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(1,1,1)$, $K\left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $L\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$, $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$, $N\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $O\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$; **2.1.20.** $D(x_1-x_2+x_3, y_1-y_2+y_3)$;

2.2.1. 1)$\frac{3}{\sqrt{2}}$; 2)-21; 3)5; 4)-6; **2.2.2.** 1)3; 2)-1; **2.2.3.** 1)0; 2)$\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$; **2.2.4.** 1)10; 2)5; **2.2.5.** 1)22; 2)-1; **2.2.6.** 1)$\arccos\left(\frac{5}{9}\right)$; 2)180°; **2.2.7.** 1)$5\sqrt{2}$; 2)2; **2.2.8.** 1) (-25,-20,5); 2)11, 3)-28; **2.2.11.** $-\frac{3}{2}$; **2.2.12.** 1)0; 2)-4; 3)2; **2.2.13.** 1)$\sqrt{|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2-2(\bar{b},\bar{c})}$; 2)$\frac{1}{2}\sqrt{|\bar{b}|^2+|\bar{c}|^2+2(\bar{b},\bar{c})}$; 3)$\frac{1}{2}\sqrt{|\bar{b}|^2|\bar{c}|^2-(\bar{b},\bar{c})^2}$; **2.2.16.** $5\sqrt{2}$ и 10, 45°; **2.2.17.** $AB = 6$, $AC = 4\sqrt{3}$, $BC = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 60°$; **2.2.18.** 3 и 5, острый угол – $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$; **2.2.22.** $\lambda = \frac{CA^2}{CB^2}$; **2.2.23.** (1,-1,3); **2.2.24.** Угол при вершине $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$;

2.2.25. Острый угол $\arccos\left(\dfrac{|m^2-n^2|}{\sqrt{M^4+n^4-2m^2n^2\cos 2\alpha}}\right)$; **2.2.26.** 1) $\left(\dfrac{m^2+n^2-mn}{nm}\right)^{\frac{1}{2}}$; 2) $\sqrt{m}\div\sqrt{n}$; 3) $\arcsin\left(\dfrac{mn}{m^2+n^2-mn}\right)^{\frac{1}{2}}$; **2.2.27.** 4; **2.2.30.** $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $60°$; **2.2.31.** 1) (11,19,-7); 2) (0,0,0); **2.2.32.** 1) $2[\bar{b},\bar{a}]$; 2) $[\bar{a},\bar{b}]+4[\bar{b},\bar{c}]+\dfrac{9}{2}[\bar{c},\bar{a}]$; **2.2.33.** $\lambda=\pm\sqrt{3}$; **2.2.34.** $S=\dfrac{5}{2}\sqrt{3}$, высоты – $5\sqrt{3/14}$, $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$, $5\sqrt{3/14}$; **2.2.35.** 18; **2.2.36.** Два решения: $\pm\dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,-2,-3)$; **2.2.39.** 1)0; 2)-23; **2.2.40.** 1)Да; 2)Нет; **2.2.41.** $\lambda=3$, $\lambda=-4$; **2.2.42.** Объем – $\dfrac{1}{3}$, высота – $\dfrac{1}{\sqrt{30}}$; **2.2.43.** $5\sqrt{3}$.

Литература

[1] В.Б. Поплавский Линейная алгебра и геометрия. Лекции. Часть 1. — Саратов: Изд-во ЗАО "Сигма-плюс 2001.

[2] Ю.Е. Пензов, Н.Ф. Ржехина, А.В. Гохман, Н.И. Кабанов, Ю. К. Коноплева, М.В. Лосик, М.А. Спивак Сборник задач по векторной алгебре. — Саратов: Изд-во Саратовского университета. — М.: Мир, 1972.

[3] Э. Б. Винберг Курс алгебры. — М.: Изд-во "Факториал Пресс 2001.

[4] Л.А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И.А. Чубаров Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. — М.: Физматлит, 2001.

[5] А.И. Кострикин Сборник задач по алгебре. — М.: Физматлиз 2001.

[6] А.Г. Курош Курс Высшей алгебры. — М.: Изд-во "Наука 1968..

[7] А.И. Кострикин, Ю.И. Манин Линейная алгебра и геометрия. — М.: Наука, 1986.