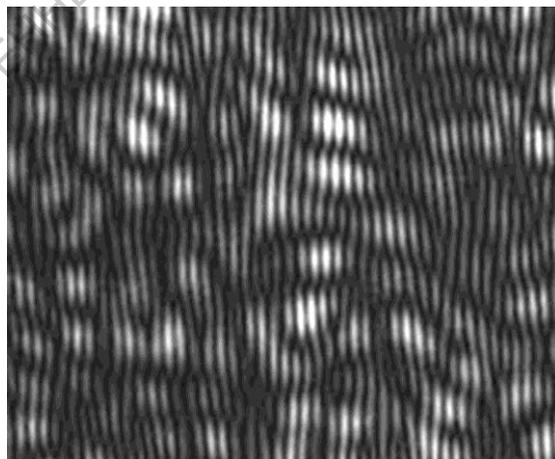


# ЦИФРОВАЯ ФУРЬЕ–ГОЛОГРАФИЯ

Учебно-методическое руководство  
к выполнению лабораторной работы



САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ГЕРНЫШЕВСКОГО

ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет  
им. Н.Г. Чернышевского»

Научно-образовательный институт оптики и биофотоники СГУ  
Институт проблем точной механики и управления РАН

В.П. Рябухо, О.А. Перепелицына, Л.А. Максимова

## ЦИФРОВАЯ ФУРЬЕ–ГОЛОГРАФИЯ

Учебно-методическое пособие

Саратов

2014 г.

Настоящее учебно-методическое пособие направлено на рассмотрение теоретических вопросов методов цифровой оптической голографии и содержит методическое руководство к выполнению лабораторной работы по цифровой фурье-голографии. Учебно-методическое пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 03.03.02 «Физика» и 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» (уровень бакалавриата и магистратуры), а также может быть использовано в аспирантуре по направлению подготовки 03.06.01 «Физика и астрономия».

## СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ .....	5
Принципы цифровой голографии .....	5
Схемы записи голограмм .....	9
Запись и восстановление объектного поля в аналоговой голографии	11
Дифракционные преобразования волновых полей .....	15
Запись цифровой голограммы и численная процедура восстановления изображения объекта.....	20
Пространственное разрешение изображения, восстановленного с цифровой фурье-голограммы.....	26
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ .....	28
Задание 1. Разработка оптической схемы записи цифровой фурье- голограммы и расчет параметров схемы.....	29
Задание 2. Запись цифровой фурье-голограммы объемного рассеивающего объекта и численное восстановление его изображения .....	30
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ .....	32
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	55

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

## ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### **Принципы цифровой голографии**

Голография – это метод записи и восстановления волнового поля, основанный на регистрации картины интерференции (интерферограммы) волнового поля со вспомогательной, опорной, волной и дифракцией опорной волны на записанной интерферограмме на этапе восстановления волнового поля. Интерферограмма, образованная записываемым волновым полем и опорной волной, называется голограммой. Записываемое волновое поле может формироваться при отражении от какого-либо объекта или прохождении через него, если он прозрачный. В этом случае волновое поле несет информацию об объекте, о его форме, пространственной структуре и пространственном расположении. Такое поле называется объектным или предметным. Запись голограммы может производиться в любой области пространства распространения объектного волнового поля по отношению к объекту: в ближней или дальней областях дифракции этого поля, в области действительного изображения объекта, формируемого какой-либо изображающей системой, или в любой области пространства изображений.

Возможность восстановления объемных (трехмерных) изображений объектов является одной из отличительных и замечательных свойств голографии. Однако с научной и технической точек зрения наиболее важной в методе голографии является возможность восстановления самого волнового поля со всеми его амплитудными и фазовыми пространственными рас-

пределениями. Эта возможность определяет главное значение голографии с методологической, научной и прикладной точек зрения.

Восстановление изображения объекта при записи голограммы в ближней или дальней области дифракции происходит в результате процесса дифракционного распространения восстановленного поля от голограммы до изображения. Этот дифракционный процесс распространения волнового поля формально – математически – достаточно точно описывается с помощью интегральных преобразований Френеля-Кирхгофа, Френеля или Фурье комплексной амплитуды волнового поля, восстановленного в плоскости голограммы.

Интегральные преобразования могут быть реализованы в численной форме с использованием компьютерных вычислительных программ. Особенно просто реализуется преобразование Фурье с использованием так называемого алгоритма быстрого Фурье-преобразования. В результате таких преобразований получают в численном виде пространственные функции комплексных амплитуд объектного волнового поля.

Таким образом, если голограмму записать в цифровом виде с использованием соответствующего средства цифровой записи, то восстановление комплексной амплитуды объектного волнового поля и формирование изображения объекта возможно реализовать путем численной процедуры преобразования цифровой голограммы. Такой метод записи голограммы и восстановления с нее необходимой информации о записанном объектном волновом поле называется цифровой голографией.

Для записи цифровой голограммы в настоящее время используются матричные фотодетекторы – ПЗС- и КМОП-матрицы (ПЗС – Прибор с Зарядовой Связью, в англоязычной литературе – CCD – Charge-Coupled Device; КМОП – Комплементарная структура Металл-Оксид-Полупроводник, в англоязычной литературе – CMOS – Complementary

Metal-Oxide-Semiconductor). Светочувствительные матрицы этих камер могут содержать более  $10^7$  элементов – пикселей с периодом расположения от 3 и более микрон. Максимальная разрешающая способность таких фотоэлектрических сред составляет всего  $R \leq 330$  лин/мм, что значительно уступает средам с фотохимическим откликом, имеющим молекулярно размерную «пиксельную» структуру чувствительных элементов (зерен). Низкая разрешающая способность цифровых фотоэлектрических устройств накладывает соответствующие ограничения на параметры записи цифровых голограмм и размеры объекта записи. Угол падения опорной волны  $\theta$  на матрицу должен быть достаточно малым,  $\theta < 6^\circ$ . Соответственно, угловые размеры записываемого объекта или ширины углового спектра объектного поля должны быть меньше  $6^\circ$ .

Несмотря на эти довольно существенные ограничения, метод цифровой голографии имеет достаточно эффективную реализацию и практическое применение с использованием современных цифровых систем фотографической записи и компьютерных программных средств численного преобразования цифровых голограмм. В первую очередь следует отметить применение цифровой голографии для оптической микроскопии и высокоточных интерференционных измерений рельефа поверхности объектов, микроперемещений и деформаций объектов сложной формы, пространственных распределений показателя преломления в прозрачных средах и динамики его изменения.

Благодаря относительной простоте и, главное, скорости реализации алгоритма быстрого численного преобразования Фурье в цифровой голографии наибольшее распространение нашли схемы записи фурье-голограмм, в которых производится запись объектного поля в дальней области его дифракции. Для получения восстановленного изображения производится численное преобразование цифровой фурье-голограммы.

В другой распространенной схеме записи цифровой голограммы записывается цифровая голограмма сфокусированного изображения объекта. Несмотря на то, что в этом случае запись голограммы осуществляется в области сфокусированного изображения объекта, для восстановления комплексной амплитуды поля изображения объекта требуется фурье-преобразование цифровой голограммы, фильтрация пространственного спектра голограммы и вторичное фурье-преобразование отфильтрованного спектра голограммы.

При освещении рассеивающего объекта лазерным пучком, имеющим высокую степень пространственной и временной когерентности, в дифракционном объектном поле и в поле изображения объекта формируется пятнистая пространственная структура – спекл-структура, в виде случайного пространственного распределения фазы, амплитуды и, соответственно, интенсивности рассеянного волнового поля. Отдельные структурные элементы этого случайного пространственного распределения – спеклы (пятна) имеют весьма малые поперечные и продольные размеры, определяемые длиной волны и угловой апертурой или рассеивающего объекта при наблюдении спеклов в свободном дифракционном поле, или выходного зрачка линзовой системы при наблюдении спеклов в плоскости изображения объекта.

При интерференции рассеянного объектного поля с опорной волной образуется сложная картина – спекл-картина, модулированная интерференционными полосами (см. фото на обложке), которая и представляет собой голограммную структуру. Для цифровой записи голограммы необходимо, чтобы матрица фотоприемников разрешала эту спекл-модулированную интерференционную картину.

## Схемы записи голограмм

Для записи оптической голограммы волнового поля, рассеянного объектом, необходимо использовать опорную волну, взаимно когерентную объектному полю, для формирования картины интерференции этих двух волн. Эта интерференционная картина содержит всю информацию об амплитудном и фазовом пространственных распределениях волнового поля, достаточную для его последующего восстановления.

Одна из возможных схем записи голограммы представлена на рис. 1.

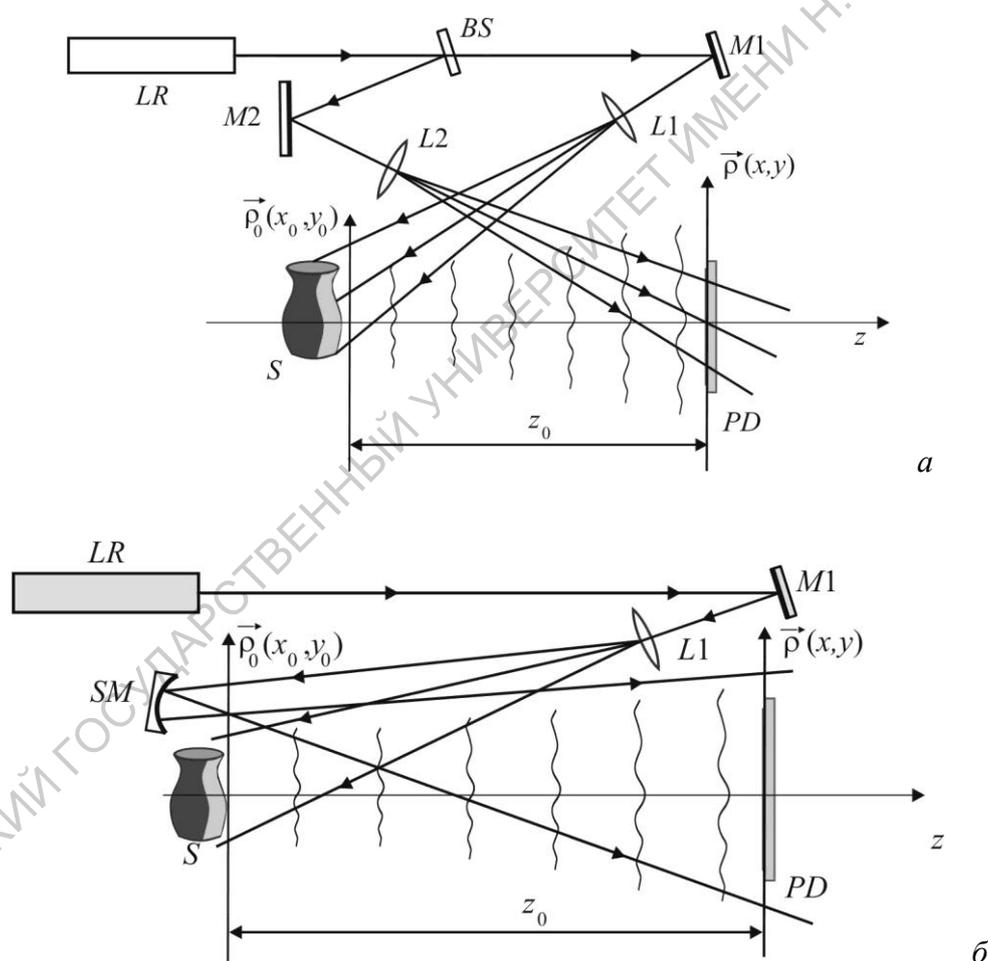


Рис. 1. Схемы записи голограммы с делением лазерного пучка на объектный и опорный по амплитуде (а) и по волновому фронту (б):

$LR$  – лазер;  $BS$  – делитель;  $PD$  – фоторегистрирующая среда;  $M1$  и  $M2$  – зеркала;  $L1$  и  $L2$  – собирающие линзы;  $SM$  – сферическое зеркало

Лазерный пучок света делится с помощью делителя  $BS$  на два пучка, один из которых с помощью зеркала  $M1$  и собирающей линзы  $L1$  направляется на объект  $S$ , а второй пучок – опорный, с помощью зеркала  $M2$  и линзы  $L2$  направляется непосредственно на фоторегистрирующую среду  $PD$ , например, фотопластинку в обычной аналоговой голографии, или матричный фотоприемник в цифровой голографии. Рассеянное (отраженное) объектом волновое поле также попадает на фоторегистратор и интерферирует с опорной волной.

Записывается распределение интенсивности суммарного интерференционного поля в плоскости фоторегистратора

$$I(\vec{\rho}) = |U_S(\vec{\rho}) + U_R(\vec{\rho})|^2 = |U_R|^2 + |U_S|^2 + U_S U_R^* + U_S^* U_R, \quad (1)$$

где  $U_S(\vec{\rho})$  – распределение комплексной амплитуды объектного поля в плоскости  $\vec{\rho}(x, y)$  фоторегистратора;  $U_R(\vec{\rho})$  – распределение комплексной амплитуды опорного поля в плоскости фоторегистратора:

$$\begin{aligned} U_S(\vec{\rho}) &= A_S(\vec{\rho}) \exp[i\varphi_S(\vec{\rho})], \\ U_R(\vec{\rho}) &= A_R(\vec{\rho}) \exp[i\varphi_R(\vec{\rho})], \end{aligned} \quad (2)$$

где  $A_S(\vec{\rho})$ ,  $A_R(\vec{\rho})$  – распределения амплитуды объектной и опорной волн, соответственно;  $\varphi_S(\vec{\rho})$ ,  $\varphi_R(\vec{\rho})$  – фазовые пространственные распределения в объектной и опорной волнах.

Распределение интенсивности  $I(\vec{\rho})$ , определяемое уравнением (1), называют голограммной структурой в формальном, математическом представлении. В цифровой голографии численное представление  $I(\vec{\rho})$  также можно называть голограммной структурой или просто голограммой.

### Запись и восстановление объектного поля в аналоговой голографии

В обычной, аналоговой голографии фотопластинка после записи и соответствующего химического процесса проявления и закрепления становится голограммой – дифракционным оптическим элементом, амплитудное пропускание которого  $\tau(\vec{\rho})$  в условиях линейной записи можно считать пропорциональным распределению интенсивности:

$$\tau(\vec{\rho}) = \tau_0 + \gamma_p \cdot I(\vec{\rho}) \quad (3)$$

- для позитивного фоторегистратора, и

$$\tau(\vec{\rho}) = \tau_0 - \gamma_n \cdot I(\vec{\rho}) \quad (4)$$

- для негативного фоторегистратора.

В (3) и (4) коэффициенты  $\gamma_p$  и  $\gamma_n$  характеризуют контрастность процесса записи, а слагаемое  $\tau_0$  определяет амплитудное пропускание голограммы при нулевой интенсивности.

В цифровой голографии регистрируемый фотоэлектрический сигнал  $u_p(\vec{\rho})$  можно считать пропорциональным распределению интенсивности  $I(\vec{\rho})$ :

$$u_p(\vec{\rho}) = \gamma_d \cdot I(\vec{\rho}), \quad (5)$$

где сигнал  $u_p(\vec{\rho})$  для простоты записан в виде непрерывной функции, тогда как в цифровой голографии этот сигнал имеет дискретные значения в дискретном массиве пространственных координат  $(x_i, y_j)$ .

В обычной голографии для восстановления объектного волнового поля голограмма освещается опорной волной (рис. 2,а), которая дифрагирует на голограмме, как на сложной дифракционной решетке, и в дифракционном поле образуется (восстанавливается) объектное волновое поле.

Процесс освещения голограммы опорной волной формально записывается в виде произведения амплитудного пропускания голограммы  $\tau(\vec{\rho})$  и комплексной амплитуды освещающей волны  $U_R(\vec{\rho})$

$$\begin{aligned}
 U(\vec{\rho}) &= U_R(\vec{\rho}) \cdot \tau(\vec{\rho}) = U_R \cdot \gamma_p \cdot I(\vec{\rho}) = \\
 &= U_R \cdot \gamma_p \cdot (|U_R|^2 + |U_S|^2) + \gamma_p \cdot |U_R|^2 U_S + \gamma_p \cdot U_R^2 U_S^* .
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

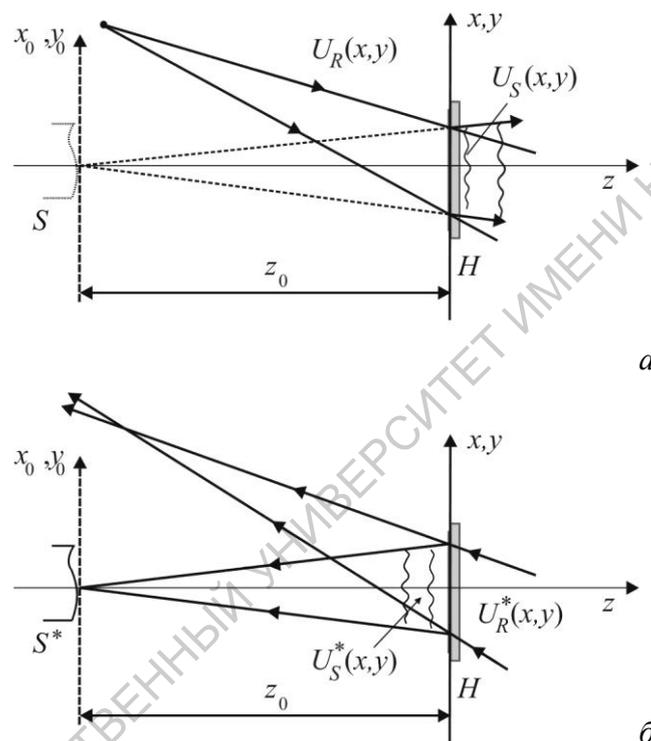


Рис. 2. Восстановление объектного поля  $U_S(\vec{\rho})$  опорной волной  $U_R(\vec{\rho})$  (а) и сопряженного объектного поля  $U_S^*(\vec{\rho})$  сопряженной опорной волной  $U_R^*(\vec{\rho})$  (б)

Третье слагаемое в (6)  $\gamma_p |U_R|^2 U_S$  пропорционально комплексной амплитуде объектного поля  $U_S$  и описывает восстановленную объектную волну, распространяющуюся в направлении от объекта.

Если осветить голограмму сопряженной опорной волной, как это показано на рис. 2,б, комплексную амплитуду которой следует представить в сопряженной форме  $U_R^*(\vec{\rho})$ , то в дифракционном поле за голограммой об-

разуется сопряженное объектное поле  $U_S^*(\vec{\rho})$ , распространяющееся в обратном направлении по отношению к объектному полю  $U_S(\vec{\rho})$  на этапе записи голограммы.

Формально процесс восстановления сопряженного объектного поля определяется следующим выражением

$$U(\vec{\rho}) = U_R^*(\vec{\rho}) \tau(\vec{\rho}) = U_R^* \gamma_p \left( |U_R|^2 + |U_S|^2 \right) + \gamma_p |U_R|^2 U_S^* + \gamma_p \left( U_R^* \right)^2 U_S, \quad (7)$$

где третье слагаемое определяет восстановленную сопряженную объектную волну  $U_S^*(\vec{\rho})$ , распространяющуюся в обратном направлении (рис. 2,б). Это волновое поле образует действительное изображение объекта  $S^*$  в области его расположения на этапе записи голограммы.

Физический смысл слагаемых в уравнениях (6) и (7), определяющих комплексные амплитуды волн в дифрагированном за голограммой волновом поле, можно пояснить с помощью схемных построений, представленных на рис. 3.

Первое слагаемое в (6) и (7) определяет опорный пучок, прямо прошедший через голограмму без дифракции, поскольку в качестве опорного пучка используется, как правило, волны простой формы – плоские или сферические, для которой  $|U_R|^2 = const$ .

Объектное поле обычно пространственно интермодулировано из-за взаимной интерференции волн, рассеянных различными частями поверхности объекта. В сильно рассеянном когерентном поле формируется пятнистая интерференционная структура – спекл-структура. Поэтому функция  $|U_S(\vec{\rho})|^2$  фактически описывает сильно неоднородное распределение интенсивности объектного поля, а второе слагаемое в (6) и (7), соответственно, определяет поле дифракции – дифракционное гало, опорной волны

$U_R$  или  $U_R^*$  на соответствующей этому распределению голограммной структуре.

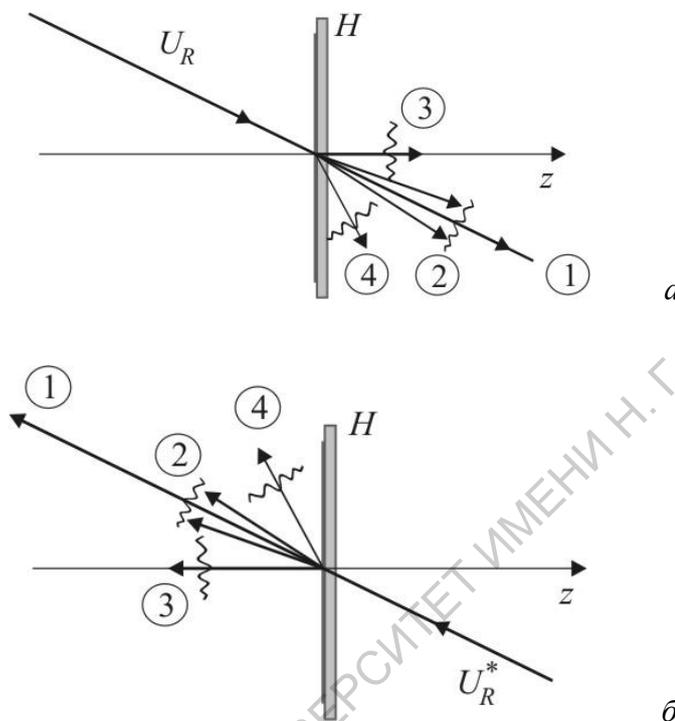


Рис. 3. Волновые поля, формирующиеся при дифракции опорной волны  $U_R$  на голограмме  $H$  (а) и при дифракции на голограмме сопряженной опорной волны (б): (1) – часть опорной волны, прошедшей через голограмму без дифракции – нулевой порядок дифракции; (2) – дифракционное гало, формирующееся в результате дифракции опорной волны на записанных на голограмме неоднородностях – спекл-структуре объектной волны; (3) – восстановленное объектное волновое поле в основном +1 порядке дифракции; (4) – восстановленное объектное волновое поле в -1 порядке дифракции

Третье слагаемое – самое важное в голографии, определяет комплексную амплитуду поля восстановленной объектной волны  $U_S(\vec{\rho})$  в (6) или  $U_S^*(\vec{\rho})$  в (7). Если  $|U_R|^2 = const$ , то восстанавливается неискаженное объектное поле.

Четвертое слагаемое также определяет комплексную амплитуду восстановленного объектного поля, распространяющегося в  $-1$  порядке дифракции, направление которого существенно отличается от направления

распространения объектного поля  $U_S$  на этапе записи, о чем свидетельствует сомножитель  $U_R^2$  в (6) или  $(U_R^*)^2$  в (7).

### Дифракционные преобразования волновых полей

Если голограмма записывается в области ближнего поля дифракции (регистрирующая среда располагается в этой области), то объектное поле в плоскости записи голограммы определяется интегральным преобразованием Френеля комплексной амплитуды поля в плоскости  $\vec{\rho}_0$ , примыкающей к объекту  $S$  (рис. 1). Такую голограмму называют голограммой Френеля. Используя интеграл Френеля, комплексную амплитуду объектного поля  $U_S(\vec{\rho})$  в плоскости записи можно записать в виде

$$U_S(\vec{\rho}) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_B(\vec{\rho}_0) \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z_0} [\vec{\rho} - \vec{\rho}_0]^2\right\} d^2 \vec{\rho}_0, \quad (8)$$

где  $U_B(\vec{\rho}_0)$  – комплексная амплитуда объектного поля в плоскости  $\vec{\rho}_0$ ;  $z_0$  – расстояние от плоскости  $\vec{\rho}_0$  до плоскости записи голограммы  $\vec{\rho}$ ;  $\lambda$  – длина волны.

Если голограмма записывается в дальней области дифракции, то интеграл преобразования Френеля (8) в этом приближении сводится к интегральному преобразованию Фурье:

$$U_S(\vec{\rho}) \sim \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda z_0} \vec{\rho}^2\right] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_B(\vec{\rho}_0) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda z_0} \vec{\rho} \vec{\rho}_0\right] d^2 \vec{\rho}_0, \quad (9)$$

В этом случае говорят о записи фурье-голограммы. Экспоненциальный множитель перед интегралом в выражениях (8) и (9) определяет параболическое распределение фазы в объектном поле, характерное для сферической параксиальной волны.

Важно показать, что восстановленное в +1 порядке дифракции объектное волновое поле  $U_S(\vec{\rho})$  или  $U_S^*(\vec{\rho})$  приводит к восстановлению изображения объекта, т.е. к восстановлению комплексной амплитуды  $U_B(\vec{\rho}_0)$  или  $U_B^*(\vec{\rho}_0)$ , а значит и к восстановлению наблюдаемого распределения интенсивности  $I_B(\vec{\rho}_0) = |U_B(\vec{\rho}_0)|^2$  в плоскости объекта.

Этот процесс восстановления важен для понимания принципов цифровой голографии, в которой производится процедура численного преобразования цифровой голограммы для получения изображения объекта.

Рассмотрим восстановление волнового поля в +1 порядке дифракции с использованием сопряженного опорного пучка  $U_R^*$  (рис. 2,б и 3,б) и покажем, что на расстоянии  $z_0$  от голограммы, где был расположен объект, восстанавливается сопряженное объектное поле  $U_B^*(\vec{\rho}_0)$ , а значит и наблюдаемое изображение объекта  $I_B(\vec{\rho}_0) = |U_B(\vec{\rho}_0)|^2$ .

Комплексную амплитуду дифрагированного поля  $U_d(\vec{\rho}_0)$  на некотором расстоянии  $z'$  от голограммы (рис. 4) запишем с помощью интегрального преобразования Френеля от третьего слагаемого в (7):

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \gamma_P |U_R|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{\rho}_0) U_S^*(\vec{\rho}) \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z'} [\vec{\rho}_0 - \vec{\rho}]^2\right\} d^2 \vec{\rho}, \quad (10)$$

где  $P(\vec{\rho}_0)$  – апертурная функция, определяющая конечные размеры голограммы – области, с которой восстанавливается объектное поле  $U_S^*(\vec{\rho})$ :  $P(\vec{\rho}_0) = 1$  в пределах голограммы и  $P(\vec{\rho}_0) = 0$  за ее пределами.

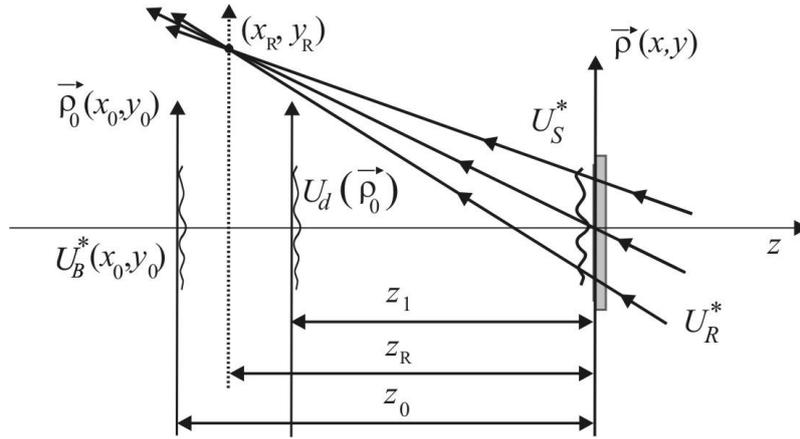


Рис. 4. Восстановление изображения объекта в области его расположения при записи голограммы

Подставляя в (10) выражение (8) для  $U_S^*$  и опуская постоянные множители  $\gamma_P$  и  $|U_R|^2$ , получаем довольно громоздкое выражение, которое, однако, несложно преобразуется к следующему относительно простому виду

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{\rho}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_B^*(\vec{\rho}') \exp\left\{-i \frac{\pi}{\lambda z_0} [\vec{\rho} - \vec{\rho}']^2\right\} d^2 \vec{\rho}' \times \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z'} [\vec{\rho}_0 - \vec{\rho}]^2\right\} d^2 \vec{\rho}. \quad (11)$$

Интеграл по переменной  $\vec{\rho}$  в (11) определяет важную функцию в процессе формирования изображения, которую называют импульсным откликом оптической системы:

$$h(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{\rho}) \exp\left\{-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z'}\right) \vec{\rho}^2\right\} \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{z_0} \vec{\rho}' - \frac{1}{z'} \vec{\rho}_0\right) \vec{\rho}\right\} d^2 \vec{\rho}. \quad (12)$$

Используя (12), выражение (11) можно записать в виде

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z'} \vec{\rho}_0^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_B^*(\vec{\rho}') \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}')^2\right] h(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') d^2 \vec{\rho}'. \quad (13)$$

Если  $z' = z_0$ , то выражение для импульсного отклика (12) существенно упрощается и принимает форму интеграла Фурье от апертурной функции  $P(\vec{\rho})$ :

$$h(\vec{\rho}'_0, \vec{\rho}_0) = h(\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int P(\vec{\rho}) \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0) \vec{\rho} \right] d^2 \vec{\rho}. \quad (14)$$

При достаточно больших размерах голограммы апертурная функция  $P(\vec{\rho})$  широкая, и интеграл (14), можно считать, определяет  $\delta$ -функцию Дирака

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0) \vec{\rho} \right] d^2 \vec{\rho} \sim \delta(\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0). \quad (15)$$

Следовательно, при достаточно большой апертуре голограммы импульсный отклик рассматриваемой системы формирования изображения, можно считать, равен  $\delta$ -функции:

$$h(\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0) = \delta(\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0). \quad (16)$$

Используя подстановку (16) в (13) при условии  $z' = z_0$  и фильтрующее свойство  $\delta$ -функции, получаем

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \exp \left( i \frac{\pi}{\lambda z_0} \vec{\rho}_0^2 \right) U_B^*(\vec{\rho}_0) \exp \left( -i \frac{\pi}{\lambda z_0} \vec{\rho}_0^2 \right) = U_B^*(\vec{\rho}_0). \quad (17)$$

– восстановленное дифракционное поле  $U_d(\vec{\rho}_0)$  в плоскости расположения объекта оказывается точной копией сопряженного объектного поля  $U_B^*(\vec{\rho}_0)$ ,  $U_d(\vec{\rho}_0) = U_B^*(\vec{\rho}_0)$ .

Если апертура голограммы конечна – имеет сравнительно малые размеры, то импульсный отклик системы уже не может считаться  $\delta$ -функцией. Тогда для восстановленного дифракционного поля  $U_d(\vec{\rho}_0)$  на расстоянии  $z_0$  от голограммы выражение (13) принимает вид:

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_B^*(\vec{\rho}_0) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}'_0{}^2 - \vec{\rho}_0^2)\right] h(\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0) d^2 \vec{\rho}'_0, \quad (18)$$

из которого следует, что точного восстановления объектного поля не происходит.

Интеграл свертки (18) показывает, что чем меньше размеры голограммы и, соответственно, шире импульсный отклик  $h(\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0)$ , тем большее несоответствие возникает между восстановленным и реальным полем.

В частности для прямоугольной голограммы с размерами  $a$  и  $b$  для импульсного отклика, используя (14), получаем явную функцию в следующем виде

$$\begin{aligned} h(\vec{\rho}'_0 - \vec{\rho}_0) &= h(x'_0 - x_0, y'_0 - y_0) = \\ &= ab \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda z_0} a (x'_0 - x_0)\right] \sin\left[\frac{\pi}{\lambda z_0} b (y'_0 - y_0)\right]}{\frac{\pi}{\lambda z_0} a (x'_0 - x_0) \frac{\pi}{\lambda z_0} b (y'_0 - y_0)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) следует, что ширина импульсного отклика

$$\delta x_0 = \frac{\lambda z_0}{a}, \quad \delta y_0 = \frac{\lambda z_0}{b}$$

обратно пропорциональна размерам голограммы  $a$  и  $b$ . Величины  $\delta x_0$  и  $\delta y_0$  фактически определяют размер элемента (пятна) разрешения восстановленного изображения.

Из вышеприведенного анализа понятно, что при  $z' \neq z_0$  выполняется условие  $U_d(\vec{\rho}_0) \neq U_B^*(\vec{\rho}_0)$ , и не происходит восстановления изображения.

## Запись цифровой голограммы и численная процедура восстановления изображения объекта

Для записи голограммы с помощью матричного приемника, например, ПЗС-камеры, могут использоваться те же оптические схемы, что и при записи обычных голограмм на аналоговые светочувствительные среды (см., например, рис. 1). Отличительная особенность в схеме может носить только количественный характер, связанный с относительно низкой разрешающей способностью ПЗС-матрицы, составляющей в лучшем случае  $R \approx 300 \text{ лин/мм}$ . Это определяет необходимость использования достаточно малого угла падения  $\theta$  опорного пучка на матрицу, поскольку полосы интерференции объектной и опорной волны должны отчетливо разрешаться пиксельной структурой матрицы. Поскольку период полос  $\Lambda$  определяется углом падения опорной волны  $\theta$ ,  $\Lambda = \lambda / \sin \theta$ , и необходимо, чтобы на этот период приходилось не менее 3-х пикселей матрицы, то для угла  $\theta$  получаем оценку  $\theta \leq 0,3\lambda R \times 10^{-3} \text{ рад}$ .

Существенное отличие цифровой голографии от обычного, аналогового метода возникает на этапе восстановления изображения. На этом этапе используется численная процедура дифракционного преобразования записанной цифровой голограммы, представленной в виде матрицы дискретных числовых значений распределения интенсивности  $I(\vec{\rho})$ , определяемого соотношением (1). При условии линейной цифровой записи распределения интенсивности  $I(\vec{\rho})$  получаемая числовая матрица и является цифровой (численной) голограммой – цифровым изображением аналогового голограммной структуры  $I(\vec{\rho})$ .

Численный процесс восстановления комплексной амплитуды объектного поля заключается в умножении функции  $I(\vec{\rho})$  на функцию ком-

плексной амплитуды восстанавливающей опорной волны  $U_R(\vec{\rho})$  или  $U_R^*(\vec{\rho})$ , которую необходимо задать в явном виде. Если используется плоская опорная волна, падающая на этапе записи голограммы под углом  $\theta$  в плоскости  $x, z$  на светочувствительную матрицу, то  $U_R(\vec{\rho})$  следует задать в виде

$$U_R(\vec{\rho}) = U_R(x, y) = A_R \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta\right). \quad (20)$$

Если используется сферическая опорная волна с наклонным падением на плоскость матрицы, то  $U_R(\vec{\rho})$  с точностью до постоянного фазового множителя можно задавать следующим образом:

$$U_R(\vec{\rho}) = A_R \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda z_R} x_R x\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda z_R} y_R y\right) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z_R} \vec{\rho}^2\right), \quad (21)$$

где  $(x_R, y_R, z_R)$  – координаты опорного источника. В цифровой голографии обычно выполняется условие  $z_R \gg x_R$  и  $z_R \gg y_R$ . Поэтому выражение (21) легко привести к виду:

$$U_R(\vec{\rho}) = A_R \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta_x\right) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} y \sin \theta_y\right) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z_R} \vec{\rho}^2\right). \quad (22)$$

В результате комплексная амплитуда объектного поля в плоскости голограммы принимает вид:

$$U(\vec{\rho}) = I(\vec{\rho}) U_R(\vec{\rho}) \quad \text{или} \quad U(\vec{\rho}) = I(\vec{\rho}) U_R^*(\vec{\rho}). \quad (23)$$

Это поле следует подвергнуть численному интегральному преобразованию Френеля или Фурье в зависимости от того, какой вид голограммы был записан на ПЗС-матрице.

С практической точки зрения наиболее удобным является численный алгоритм быстрого преобразования Фурье. Поэтому целесообразнее на практике использовать запись голограммы Фурье. В этом случае для восстановления комплексной амплитуды поля изображения объекта  $U_B(\vec{\rho})$

необходимо подвергнуть фурье-преобразованию функцию  $U(\vec{\rho})$ , определяемую уравнением (23)

$$U_D(\vec{\rho}_0) = F\{U(\vec{\rho})\}, \quad (24)$$

где  $F\{\dots\}$  – символ фурье-преобразования,  $U_D(\vec{\rho}_0)$  – комплексная амплитуда полного дифракционного поля, включающего все его составляющие.

Подставляя (21) в (24) и используя теорему о фурье-преобразовании произведения функций, получаем следующее выражение для восстановленного объектного поля:

$$U_D(\vec{\rho}_0) = F\{I(\vec{\rho})\} \otimes F\{U_R(\vec{\rho})\}, \quad (25)$$

где  $\otimes$  – символ свертки.

Для плоской наклонной опорной волны фурье-преобразование ее комплексной амплитуды  $U_R$  приводит к смещению  $\delta$ -функции  $F\{U_R\} = \delta(x_0 + z_0 \sin \theta)$ . Поэтому (25) можно записать в виде

$$U_D(\vec{\rho}_0) = U_D(x_0, y_0) = F\{I(x_0, y_0)\} \otimes \delta(x_0 + \Delta x_0, y_0), \quad (26)$$

где  $\Delta x_0 = z_0 \sin \theta$ .

Свертка со смещенной  $\delta$ -функцией в силу фильтрующего действия  $\delta$ -функции приводит к смещению вдоль оси  $x_0$  всего распределения  $F\{I(\vec{\rho})\}$  на ту же величину  $\Delta x_0 = z_0 \sin \theta$ .

Используя уравнение (1) для  $I(\vec{\rho})$ , фурье-преобразование этого распределения можно записать в следующем развернутом виде

$$\begin{aligned} F\{I(\vec{\rho})\} &= F\{|U_R|^2\} + F\{|U_S|^2\} + F\{U_S U_R^*\} + F\{U_S^* U_R\} = \\ &= F\{A_R^2\} + F\{U_S\} \otimes F\{U_S^*\} + F\{U_S\} \otimes F\{U_R^*\} + F\{U_S^*\} \otimes F\{U_R\} = \\ &= A_R^2 \delta(x_0, y_0) + U_B(x_0, y_0) \otimes U_B^*(-x_0, -y_0) + \\ &+ U_B(x_0, y_0) \otimes \delta(x_0 - \Delta x_0, y_0) + U_B^*(x_0, y_0) \otimes \delta(x_0 + \Delta x_0, y_0). \end{aligned} \quad (27)$$

На рис. 5,а в схематичной графической форме представлено распределение (27).

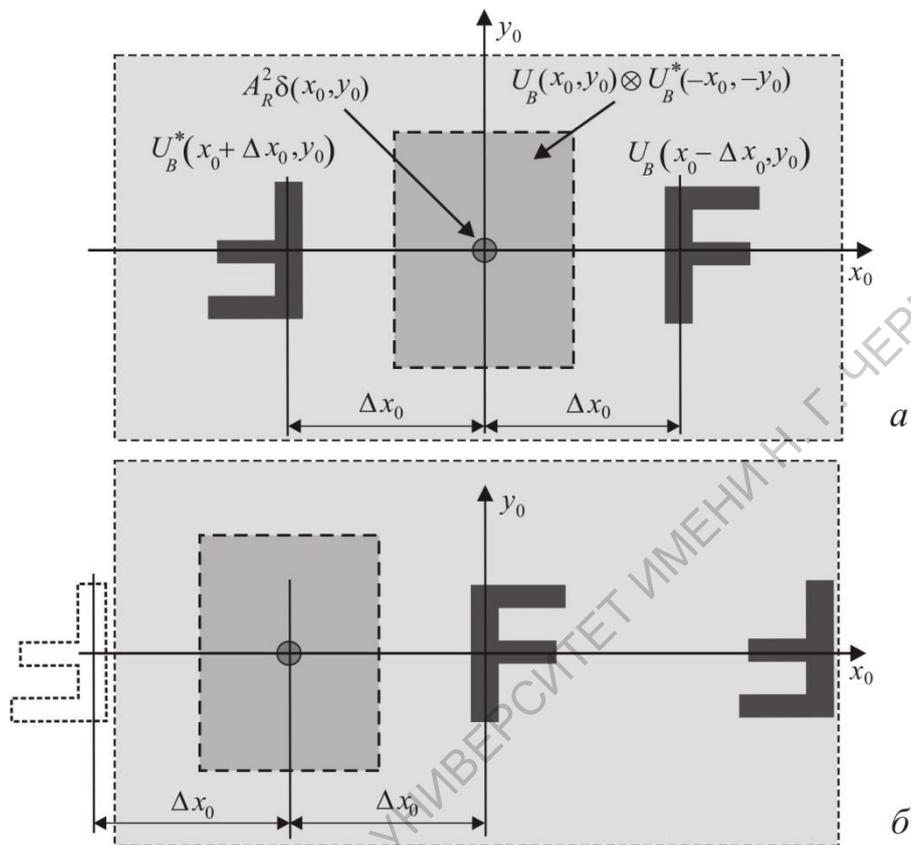


Рис. 5. Фурье-образы численной фурье-голограммы  $I(\vec{\rho})$  (а) и произведения  $I(\vec{\rho})$  и комплексной амплитуды опорной волны  $U_R(\vec{\rho})$  (б)

Для правильной физической интерпретации выражения (27) необходимо понимать, что пространственное фурье-преобразование  $F\{I(\vec{\rho})\}$  определяет пространственно-частотный спектр функции  $I(\vec{\rho})$  – голограммной структуры (численной голограммы). Поэтому первое слагаемое – фурье-образ постоянной интенсивности опорной волны, определяется  $\delta$ -функцией, поскольку постоянная составляющая имеет одну, нулевую пространственную частоту.

Второе слагаемое, имеющее вид функции автокорреляции комплексной амплитуды объектного поля  $U_B(\vec{\rho}_0)$ , определяет пространственный спектр распределения интенсивности объектного поля в плоскости записи

голограммы. Эту составляющую пространственного спектра голограммы называют еще дифракционным гало. В обычной аналоговой голографии это дифракционное гало является дальним полем дифракции опорного пучка на записанной на голограмме пространственно неоднородной структуре интенсивности объектного поля (спекл-структуре)  $I_S(\vec{\rho}) = |U_S(\vec{\rho})|^2$ .

Третье и четвертое слагаемые в (27) определяют смещенные в противоположные стороны относительно центра на  $\Delta x_0 = z_0 \sin \theta$  комплексно сопряженные объектные поля  $U_B(\vec{\rho}_0)$  и  $U_B^*(\vec{\rho}_0)$ .

Если на стадии восстановления комплексной амплитуды объектного поля с численной голограммы используется комплексная амплитуда наклонного опорного пучка, определяемая (20), то весь пространственный спектр численной голограммы сдвигается на величину  $\Delta x_0 = z_0 \sin \theta$  вдоль оси  $x_0$ , как это схематично показано на рис. 5,б. В этом случае в центре координат восстановленного поля будет находиться одно из изображений объекта  $U_B(\vec{\rho})$  или  $U_B^*(\vec{\rho})$  в зависимости от знака угла  $\theta$ .

На рис. 6 представлены распределения интенсивности комплексной амплитуды объектного поля, восстановленного с синтезированной цифровой голограммы Фурье, при различных углах падения реконструирующей световой волны.

Алгоритм быстрого фурье-преобразования имеет такое свойство, что размер (число элементов) численной матрицы фурье-образа  $M \times N$  равен размеру преобразуемой матрицы  $M \times N$ . В варианте цифровой голографии  $M \times N$  – число светочувствительных пикселей ПЗС-матрицы. На рис. 5,а и б ограниченный размер фурье-образа голограммы показан пунктирной рамкой. Поскольку пиксели ПЗС-матрицы образуют двумерную периодическую структуру, то при численной реконструкции предметного поля с цифровой голограммы происходит дифракция всех световых волн, форми-

рующихся непосредственно за голограммой (см. выражение (1)), на такой двумерной дифракционной решетке. Поэтому по мере увеличения величины угла падения реконструирующей световой волны в ограниченном окне фурье-образа голограммы одно из изображений (основное или дополнительное) будет постепенно заменяться таким же изображением, но принадлежащим другому дифракционному порядку (рис.6).

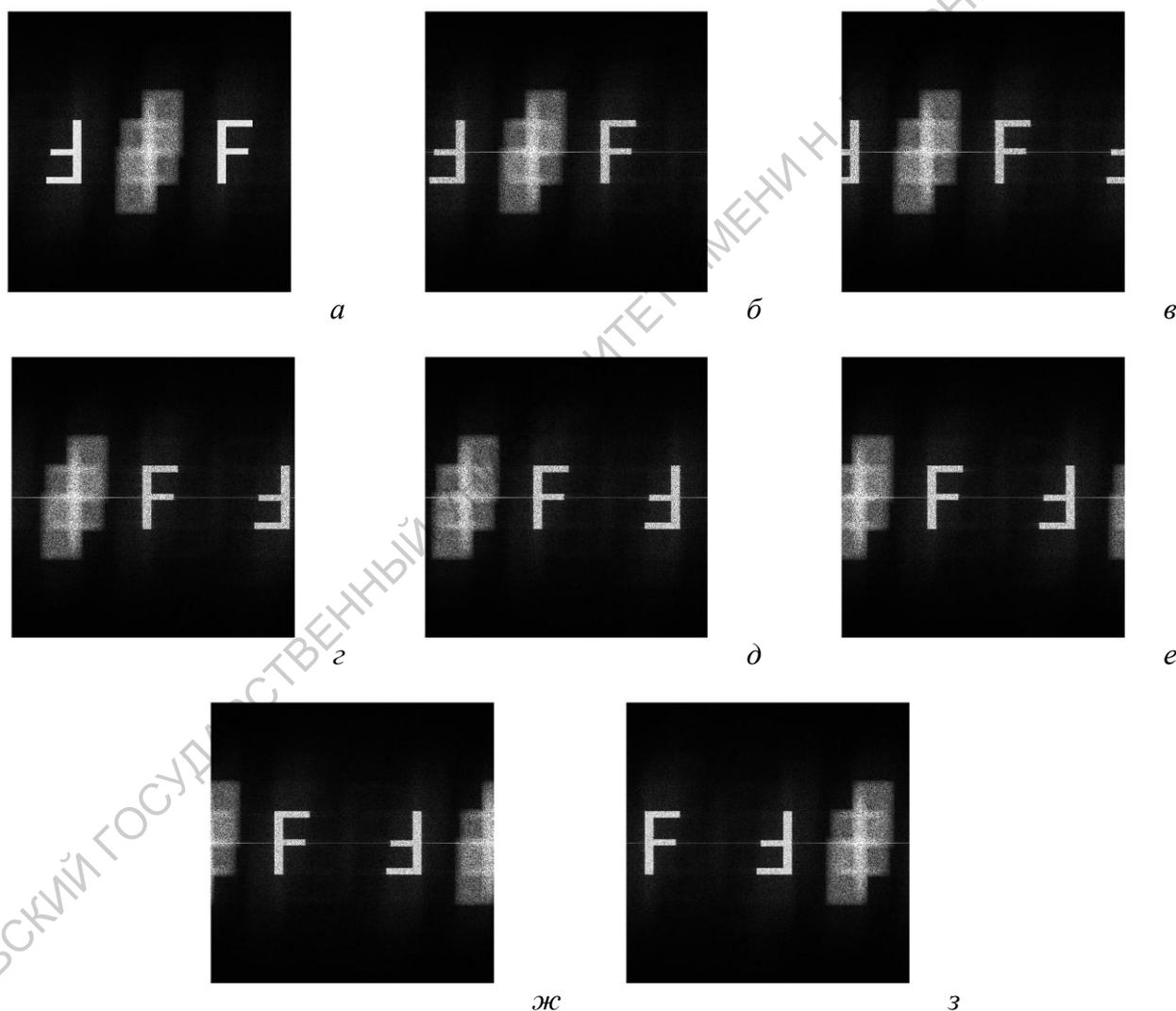


Рис. 6. Распределения интенсивности комплексной амплитуды объектного поля, восстановленного с синтезированной цифровой голограммы Фурье, при различных углах падения реконструирующей световой волны. Изображения приведены в порядке увеличения угла падения

На рис. 5,б показано, что восстановленное сопряженное изображение объекта  $U_B^*(\vec{\rho}_0)$  нулевого порядка дифракции (оно показано пунктирной линией) не попадает в окно фурье-образа голограммы, но там появляется сопряженное изображение объекта, соответствующее первому порядку.

Поскольку разрешение изображения определяется фурье-образом апертуры голограммы, совпадающей с апертурой ПЗС-матрицы, то размер элемента изображения – один пиксель, совпадает с размером элемента разрешения изображения  $\delta x_0 \times \delta y_0$ .

Для увеличения размеров фурье-образа голограммы можно априори увеличить размер матрицы голограммы путем добавления новых элементов – пиксельных столбцов и строк с постоянными числовыми значениями. Однако этот прием не приведет к увеличению разрешения восстановленного изображения: на элемент разрешения изображения  $\delta x_0 \times \delta y_0$  будет приходиться несколько пикселей цифрового изображения.

### **Пространственное разрешение изображения, восстановленного с цифровой фурье-голограммы**

Пространственное разрешение восстановленного с голограммы изображения определяется в основном двумя факторами – поперечными размерами ПЗС-матрицы, количеством в ней пикселей  $M \times N$  и точностью реализации оптического (аналогового) фурье-преобразования объектного поля на этапе записи цифровой фурье-голограммы.

Фурье-образ апертурной функции матрицы  $P(\vec{\rho})$ , как показано в (14) и (19), определяет импульсный отклик системы формирования изображения  $h(\vec{\rho}_0)$ , а его ширина – размеры пятна разрешения

$$\delta x_0 \times \delta y_0 = \frac{\lambda z_0}{a} \times \frac{\lambda z_0}{b}, \quad (28)$$

где  $a \times b$  – линейные размеры ПЗС-матрицы.

Однако импульсный отклик системы формирования изображения определяется также и неточностью выполнения фурье-преобразования на этапе записи цифровой голограммы. Если объект имеет недостаточно малые размеры и находится на недостаточно большом расстоянии от плоскости ПЗС-матрицы, то записывается не фурье-голограмма а голограмма Френеля. Следовательно, не равны параметры интегральных преобразований  $z_0$  и  $z'$ , используемых на этапе записи голограммы (8) и на этапе восстановления (10). В этом случае импульсный отклик системы определяется не выражением (14), а выражением (12), учитывающим не только размер матрицы (апертурную функцию  $P(\vec{\rho})$ ), но и неравенство параметров  $z_0$  и  $z'$ , что аналогично с физической точки зрения эффекту расфокусировки изображения.

В экспериментальной части настоящей работы предлагается оценить влияние обоих вышеупомянутых факторов на разрешение восстанавливаемых цифровых изображений.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Цели экспериментальной работы: в натурном эксперименте изучить физические принципы и технические особенности записи цифровых оптических голограмм с использованием ПЗС-матрицы; изучить характеристики и функциональные возможности ПЗС-камеры, изучить принципы компьютерной обработки численных голограмм для восстановления волнового объектного поля в численной форме и восстановления изображения объекта в форме графического образа; определение факторов, ограничивающих разрешение восстановленного цифрового голографического изображения.

Приборы и принадлежности: виброзащитный стенд для голографических и интерференционных исследований, *He-Ne* лазер, делитель пучка, микрообъективы и линзы для расширения лазерного пучка, светофильтры, поляроид, плоские и сферические металлизированные зеркала, объекты для записи их голографических изображений, прецизионные механические устройства для крепления и юстировки оптических элементов в голографической схеме, ПЗС-камера, компьютер.

## **Задание 1. Разработка оптической схемы записи цифровой фурье-голограммы и расчет параметров схемы**

Порядок выполнения задания:

1. Изучить по описанию к ПЗС-камере ее характеристики и параметры, условия эксплуатации, программные возможности, программный интерфейс.
2. Рассчитать максимально возможный угол падения опорного пучка на ПЗС-матрицу, принимая во внимание величину межпиксельного расстояния матрицы.
3. Определить максимально возможный угловой размер объекта для записи его фурье-голограммы и возможное его положение относительно плоскости записи ПЗС-матрицы.
4. Спроектировать схему записи цифровой фурье-голограммы, ориентируясь на схемы, приведенные на рис. 1 или рис. 2, исходя из возможности разрешения ПЗС-матрицей голограммной структуры – картины интерференции объектной и опорной волн, и с учетом возможного расположения оптических элементов схемы на рабочей поверхности виброзащитного стенда.
5. Согласовать эскиз спроектированной схемы с преподавателем.
6. Собрать схему записи цифровой фурье-голограммы рассеивающего объекта.

---

**Задание 2. Запись цифровой фурье-голограммы объемного рассеивающего объекта и численное восстановление его изображения**

Порядок выполнения задания:

1. Проверить соединение ПЗС-камеры с компьютером через специальный кабель.
2. Включить компьютер и запустить специализированную программу записи кадров цифровых изображений с ПЗС-камеры.
3. Используя интерфейс программы ПЗС-камеры, установленной в схеме записи голограммы, произвести настройку режима записи цифровой голограммы при засветке матрицы камеры одновременно объектным и опорным полями.
4. Записать кадр цифровой голограммы в форме графического файла на жесткий диск компьютера в директорию (папку), выделенную для выполнения данной лабораторной работы.
5. Используя специализированную компьютерную программу обработки цифровых изображений, основанную на алгоритме быстрого преобразования Фурье, произвести численную обработку файла цифровой голограммы и восстановить голографическое изображение объекта.
6. Записать программно восстановленное изображение объекта в отдельный файл графического формата и определить размеры этого изображения с учетом параметров схемы записи голограммы, размеров и структурных особенностей объекта записи, используя ту или иную универсальную программу просмотра и обработки цифровых изображений.

7. Принимая во внимание линейные размеры объекта, его форму и размерные характеристики его структуры, определить разрешение изображения объекта.
8. Проанализировать и сравнить полученные количественные характеристики разрешения с их теоретическими оценками, учитывающими параметры схемы записи голограммы и параметры ПЗС-матрицы; сделать вывод об основных физических источниках и причинах ограничения разрешения восстановленного цифрового изображения.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дать определение методу оптической голографии.
2. В чем состоит принципиальное отличие методов аналоговой и цифровой голографии?
3. Нарисовать схему записи цифровой голограммы и проанализировать алгоритм восстановления цифрового изображения с голограммы.
4. Определить необходимую разрешающую способность ПЗС-матрицы для записи цифровой голограммы при заданных значениях длины волны лазерного излучения, размеров объекта и угла падения опорного пучка на голограмму.
5. Записать уравнение для комплексной амплитуды оптического поля в плоскости ПЗС-матрицы при записи фурье-голограммы, используя двумерное преобразование Фурье комплексной амплитуды поля в плоскости объекта  $U(\vec{\rho}_0)$  при расположении точечного опорного источника в той же плоскости  $\vec{\rho}_0(x_0, y_0)$ .
6. Какими параметрами схемы записи и ПЗС-матрицы ограничивается пространственное разрешение изображения, восстановленного с цифровой фурье-голограммы?
7. При условии, что на этапе записи фурье-голограммы точно выполняется преобразование Фурье в оптическом тракте, записать выражение для комплексной амплитуды и интенсивности численного изображения, восстановленного с фурье-голограммы.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Локшин Г.Р. Основы радиооптики. – М.: Интеллект, 2009. - 344 с.
2. Голубенцева Л.И., Рябухо В.П., Перепелицына О.А. Специальный оптический практикум: Оптическая голография: Учебное пособие. Под ред. В.П.Рябухо. – Саратов, 2009. – 117 с.  
[http://library.sgu.ru/uch\\_lit/3.pdf](http://library.sgu.ru/uch_lit/3.pdf).
3. Андреева О.В. Прикладная голография. Учебное пособие. – Спб.: СпбГУИТМО, 2008. – 184 с.  
<http://books.ifmo.ru/file/pdf/431.pdf>

## СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балтийский С.А., Гуров И.П., Де Никола С., Коппола Д., Ферраро П. Современные методы цифровой голографии. – В кн.: Проблемы когерентной и нелинейной оптики /Под ред. И.П. Гурова и С.А. Козлова. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2004. С. 91-117.
2. Schnars U., Jueptner W. Digital holography. Digital hologram recording, numerical reconstruction and related techniques. – Springer Verlag, 2004. – 164 p.
3. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1973. – 688 с.
4. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. / Пер. с англ. – М.: Мир, 1970. – 364 с.
5. Рябухо В.П. Спекл-интерферометрия. Соросовский образовательный журнал. – 2001. – Т. 7. – № 5. – С. 102-109.