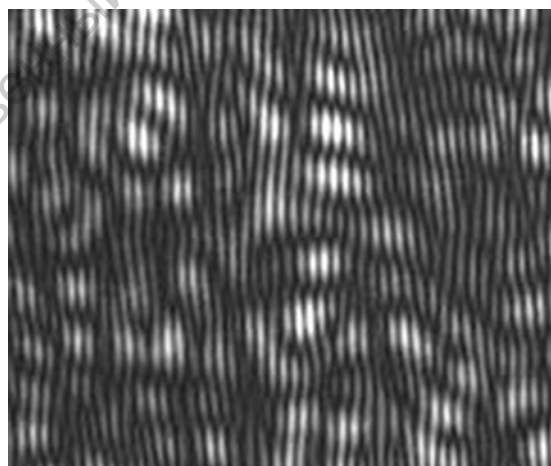


*СПЕЦИАЛЬНЫЙ
ОПТИЧЕСКИЙ
ПРАКТИКУМ*

**ЦИФРОВАЯ ОПТИЧЕСКАЯ
ГОЛОГРАФИЯ**



Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

ГОУ ВПО «Саратовский государственный университет
им. Н.Г. Чернышевского»

Научно-образовательный институт оптики и биофотоники СГУ
ГОУ ВПО «Саратовский государственный технический университет»
Институт проблем точной механики и управления РАН

Б.Б. Горбатенко, Л.А. Максимова,
О.А. Перепелицына, В.П. Рябухо

ЦИФРОВАЯ ОПТИЧЕСКАЯ ГОЛОГРАФИЯ

Учебное пособие

под редакцией профессора В.П. Рябухо

Саратов

2009 г.

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
Лабораторная работа № 1: ЦИФРОВАЯ ФУРЬЕ–ГОЛОГРАФИЯ	11
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	11
Запись и восстановление объектного поля в аналоговой голографии	13
Дифракционные преобразования волновых полей	17
Запись цифровой голограммы и численная процедура восстановления изображения объекта	22
Пространственное разрешение изображения, восстановленного с цифровой фурье-голограммы	27
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ	28
Задание 1. Разработка оптической схемы записи цифровой фурье-голограммы и расчет параметров схемы	29
Задание 2. Запись цифровой фурье-голограммы объемного рассеивающего объекта и численное восстановление его изо- бражения	30
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ	31
Лабораторная работа № 2: МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ	33
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ	33
Влияние спекл-модуляции восстановленного изображения	39
Оптические схемы записи цифровых голограмм в методе голографической интерферометрии	44
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ	47
Задание 1. Разработка оптической схемы записи цифровых фурье-голограмм для реализации метода цифровой голографической интерферометрии и расчет параметров схемы	48

Задание 2. Запись серии цифровых фурье-голограмм объекта, соответствующих различным пространственным положениям объекта, и численное восстановление голографических изображений-интерферограмм	49
Задание 3. Запись серии цифровых голограмм сфокусированного изображения объекта, соответствующих различным пространственным положениям объекта, и численное восстановление голографических изображений-интерферограмм	50
КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ	51
ПРИЛОЖЕНИЕ	52
I. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО СВОЙСТВА	52
Определения	52
Основные свойства преобразования Фурье	53
II. НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫЕ ПАРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ	55
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	56
СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	56

*Посвящается столетию
Саратовского государственного
университета*

ВВЕДЕНИЕ

Голография – это метод записи и восстановления волнового поля, основанный на регистрации картины интерференции (интерферограммы) волнового поля со вспомогательной, опорной, волной и дифракцией опорной волны на записанной интерферограмме на этапе восстановления волнового поля. Интерферограмма, образованная записываемым волновым полем и опорной волной, называется голограммой. Записываемое волновое поле может формироваться при отражении от какого-либо объекта или прохождении через него, если он прозрачный. В этом случае волновое поле несет информацию об объекте, о его форме, пространственной структуре и пространственном расположении. Такое поле называется объектным или предметным. Запись голограммы может производиться в любой области пространства распространения объектного волнового поля по отношению к объекту: в ближней или дальней областях дифракции этого поля, в области действительного изображения объекта, формируемого какой-либо изображающей системой.

Объектное волновое поле на этапе записи голограммы несет информацию об объекте. Восстановленное с голограммы дифракционное объектное поле также несет информацию о пространственных параметрах объекта и в этом поле возможно формирование объемного изображения объекта.

Возможность восстановления объемных (трехмерных) изображений объектов является одной из отличительных и замечательных свойств голографии. Однако с научной и технической точек зрения наиболее важной в методе голографии является возможность восстановления самого волнового поля со всеми его амплитудными и фазовыми пространственными распределениями. Эта возможность определяет главное значение голографии с методологической, научной и прикладной точек зрения.

Метод голографии может быть реализован для волновых полей разной природы и различных диапазонов частот – оптических, электромагнитных волн микроволнового (СВЧ) и радиодиапазонов, акустических волн ультракороткого диапазона и длинноволнового диапазона, используемых в сейсмической разведке и т.п.

Наибольшее научное и прикладное развитие, широкое распространение получил метод оптической голографии в видимом диапазоне длин световых волн. Это обусловлено и применением лазерных источников света, необходимых для записи голограмм, и совершенными фоторегистрирующими средами, обладающими необходимой высокой разрешающей способностью, и широкой областью научных и прикладных задач, в которых оптическая голография нашла эффективное и зачастую незаменимое применение.

В качестве высокоразрешающих светочувствительных сред в оптической голографии используются галогенидосеребряные фотоэмульсионные слои на стекле и полимерах – фотопластинки и фотопленки, фототермопластики (фотополимеры), фоточувствительные слои бихромированной желатины на стекле и полимерных пленках т.д.

Высокая разрешающая способность голографических сред необходима, поскольку в голографии в этих средах записывается очень мелкоструктурная картина распределения интенсивности светового поля, обра-

зованная как самим объектным полем, так и полосами интерференции объектного поля с опорной волной. Например, при наложении опорной волны на объектное поле под углом в 45° к направлению распространения, что часто используется в голографических схемах записи, период интерференционных полос Λ составляет всего $\approx 0,8$ мкм при длине волны используемого света $\lambda \approx 0,6$ мкм. Для записи голограмм в этих условиях необходима светочувствительная среда с разрешающей способностью $R > 1/0,5\Lambda \approx 2500$ линий на миллиметр. В голографии широко используются промышленно выпускаемые галогенидосеребряные фотопластинки с разрешающей способностью $R \approx 5000$ лин / мм.

Восстановление изображения объекта в голографии при записи голограммы в ближней или дальней области дифракции происходит в результате процесса дифракционного распространения восстановленного поля от голограммы до изображения. Этот дифракционный процесс распространения волнового поля формально достаточно точно описывается с помощью интегральных преобразований Френеля-Кирхгофа, Френеля или Фурье комплексной амплитуды волнового поля, восстановленного в плоскости голограммы.

Эти интегральные преобразования могут быть реализованы в численной форме с использованием компьютерных вычислительных программ. Особенно просто реализуется преобразование Фурье с использованием так называемого алгоритма быстрого Фурье-преобразования.

Таким образом, если голограмму записать в цифровом виде с использованием соответствующего средства цифровой записи, то восстановление объектного волнового поля и формирование изображения объекта возможно реализовать путем численной процедуры преобразования цифровой голограммы. Такой метод записи голограммы и восстановления с нее необ-

ходимой информации о записанном объектном волновом поле называется цифровой голографией.

Для записи цифровой голограммы в настоящее время используются ПЗС- и КНОП-камеры. Светочувствительные матрицы этих камер могут содержать более 10^7 элементов – пикселей с периодом расположения от 3 и более микрометров. Максимальная разрешающая способность таких фотоэлектрических сред составляет всего $R \leq 330 \text{ лин / мм}$, что значительно уступает средам с фотохимическим откликом, имеющим молекулярно размерную «пиксельную» структуру чувствительных элементов (зерен). Низкая разрешающая способность цифровых фотоэлектрических устройств накладывает соответствующие ограничения на параметры записи цифровых голограмм и размеры объекта записи. Угол падения опорной волны θ на матрицу должен быть достаточно малым, $\theta < 6^\circ$. Соответственно угловые размеры записываемого объекта должны быть меньше 6° .

Несмотря на эти довольно существенные ограничения, метод цифровой голографии имеет достаточно эффективную реализацию и практическое применение с использованием современных цифровых систем фотографической записи и компьютерных программных средств численного преобразования цифровых голограмм. В первую очередь следует отметить применение цифровой голографии для оптической микроскопии и высокоточных интерференционных измерений рельефа поверхности объектов, микроперемещений и деформаций объектов сложной формы, пространственных распределений показателя преломления в прозрачных средах и динамики его изменения.

Благодаря относительной простоте и, главное, скорости реализации алгоритма быстрого численного преобразования Фурье в цифровой голографии наибольшее распространение нашли схемы записи фурье-голограмм, в которых производится запись объектного поля в дальней об-

ласти его дифракции. Для получения восстановленного изображения производится численное преобразование цифровой фурье-голограммы.

В другой распространенной схеме записи цифровой голограммы записывается цифровая голограмма сфокусированного изображения объекта. В этом случае не требуются интегральные преобразования цифровой голограммы для восстановления изображения объекта, поскольку записывается непосредственно изображение объекта, а использование опорной волны позволяет записать и восстановить распределение фазы объектной волны в плоскости изображения.

Возможность восстановления фазы объектного волнового поля позволяет использовать метод голографии, в том числе и в цифровом варианте, для фазовых интерференционных исследований формы объекта, распределение показателя преломления в прозрачном объекте, величин микроперемещений и деформаций объектов. Эти измерения выполняются с точностью до долей длины волны лазерного света, составляющей, соответственно, доли микрометра, что и обеспечивает высокую точность этих измерений и использование в качестве меры длины световой волны.

Численная обработка цифровых интерферограмм позволяет восстанавливать фазовые распределения в объектном поле и, соответственно, определять форму объекта, изменения формы или изменения пространственного положения объекта с точностью до долей длины волны используемого лазерного излучения.

При освещении рассеивающего объекта лазерным пучком, имеющим высокую степень пространственной и временной когерентности, в дифракционном объектном поле и в поле изображения объекта формируется пятнистая пространственная структура – спекл-структура, в виде случайного пространственного распределения фазы, амплитуды и, соответственно, интенсивности рассеянного волнового поля. Отдельные структурные элемен-

ты этого случайного пространственного распределения – спеклы (пятна) имеют весьма малые поперечные и продольные размеры, определяемые длиной волны и угловой апертурой или рассеивающего объекта при наблюдении спеклов в свободном дифракционном поле, или выходного зрачка линзовой системы при наблюдении спеклов в плоскости изображения объекта.

При интерференции рассеянного объектного поля с опорной волной образуется сложная картина – спекл-картина, модулированная интерференционными полосами (см. фото на обложке), которая и представляет собой голограммную структуру. Для цифровой записи голограммы необходимо, чтобы матрица фотоприемников разрешала эту спекл-модулированную интерференционную картину.

В настоящем учебном пособии представлены теоретические основы и методические руководства к двум лабораторным работам по цифровой голографии и цифровой спекл-интерферометрии.

В первой лабораторной работе «Цифровая фурье-голография» рассматриваются теоретические основы метода цифровой голографии с записью голограммы в дальней области дифракции и практические схемные решения для реализации этого метода.

Во второй лабораторной работе «Цифровая голографическая интерферометрия» излагаются теоретические и экспериментальные основы применения цифровой фурье-голографии и голографии сфокусированного изображения для измерения малых деформаций и смещений объекта с рассеивающей поверхностью.

Описание теоретических основ методов цифровой голографии, рассматриваемых в учебном пособии, базируется на пространственных преобразованиях Френеля и Фурье, реализуемых в оптических системах в процессе дифракционного распространения волновых полей в свободном про-

странстве и в линзовых системах, а также на численном преобразовании Фурье двумерных дискретных сигналов – цифровых голограмм. Теоретические основы оптической голографии излагаются с использованием комплексных функций для представления амплитудно-фазовых пространственных распределений комплексных амплитуд монохроматических волновых полей. В этих же представлениях описываются процессы формирования интерференционных картин в цифровой голографии и цифровой голографической интерферометрии.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов университетов специальности «Физика», студентов магистратуры направления «Физика», программа «Физика оптических явлений» и направления «Техническая физика», программа «Физика оптических явлений и квантовая электроника», а также для аспирантов специальностей «Оптика» и «Лазерная физика», физико-математические науки. Учебное пособие может быть использовано в качестве практического учебно-методического руководства при изучении специальных дисциплин: «Фурье-оптика», «Голография и оптическая обработка информации», «Лазерная интерферометрия», «Цифровые системы обработки сигналов и изображений», читаемых в рамках вышеназванных университетских программ подготовки специалистов и магистров.

Профессор В.П. Рябухо

Лабораторная работа № 1

ЦИФРОВАЯ ФУРЬЕ–ГОЛОГРАФИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Для записи оптической голограммы волнового поля, рассеянного объектом, необходимо использовать опорную волну, взаимно когерентную объектному полю для формирования картины интерференции этих двух волн. Эта интерференционная картина содержит всю информацию об амплитудном и фазовом пространственных распределениях волнового поля, достаточных для его последующего восстановления.

Одна из возможных схем записи голограммы представлена на рис. 1. Лазерный пучок света делится с помощью делителя BS на два пучка, один из которых с помощью зеркала $M1$ и собирающей линзы $L1$ направляется на объект S , а второй пучок – опорный, с помощью зеркала $M2$ и линзы $L2$ направляется непосредственно на фоторегистрирующую среду PD , например, фотопластинку в обычной аналоговой голографии, или матричный фотоприемник в цифровой голографии. Рассеянное (отраженное) объектом волновое поле также попадает на фоторегистратор и интерферирует с опорной волной.

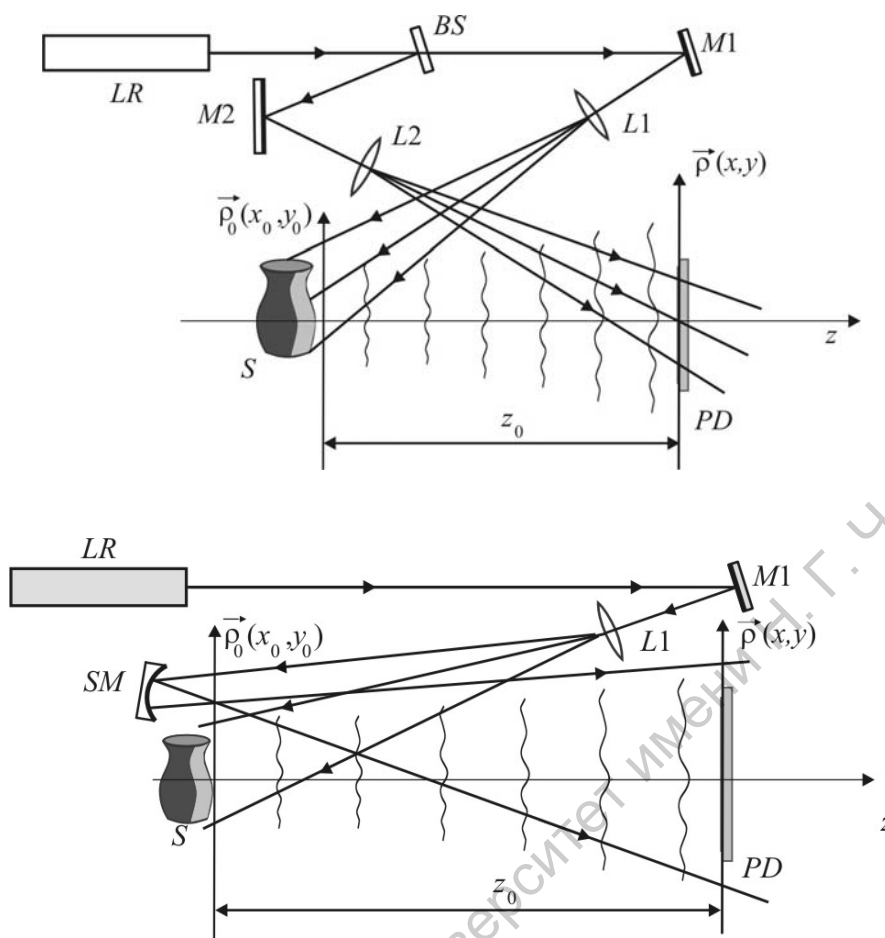


Рис. 1. Схемы записи голограммы с делением лазерного пучка на объектный и опорный по амплитуде (а) и по волновому фронту (б):

LR – лазер; BS – делитель; PD – фоторегистрирующая среда; M1 и M2 – зеркала; L1 и L2 – собирающие линзы; SM – сферическое зеркало

Записывается распределение интенсивности суммарного поля в плоскости фоторегистратора

$$I(\vec{\rho}) = |U_S(\vec{\rho}) + U_R(\vec{\rho})|^2 = |U_R|^2 + |U_S|^2 + U_S U_R^* + U_S^* U_R, \quad (1)$$

где $U_S(\vec{\rho})$ – распределение комплексной амплитуды объектного поля в плоскости $\vec{\rho}$ фоторегистратора; $U_R(\vec{\rho})$ – распределение комплексной амплитуды опорного поля в плоскости фоторегистратора:

$$\begin{aligned} U_S(\vec{\rho}) &= A_S(\vec{\rho}) \exp[i\varphi_S(\vec{\rho})], \\ U_R(\vec{\rho}) &= A_R(\vec{\rho}) \exp[i\varphi_R(\vec{\rho})], \end{aligned} \quad (2)$$

где $A_S(\vec{\rho})$, $A_R(\vec{\rho})$ – распределения амплитуды объектной и опорной волн, соответственно; $\varphi_S(\vec{\rho})$, $\varphi_R(\vec{\rho})$ – фазовые пространственные распределения в объектной и опорной волнах.

Распределение интенсивности $I(\vec{\rho})$, определяемое уравнением (1), называют голограммной структурой в формальном, математическом представлении. В цифровой голографии численное представление $I(\vec{\rho})$ также можно называть голограммной структурой или просто голограммой.

Запись и восстановление объектного поля в аналоговой голографии

В обычной аналоговой голографии фотопластинка после записи и соответствующего химического процесса проявления и закрепления становится голограммой – дифракционным оптическим элементом, амплитудное пропускание которого $\tau(\vec{\rho})$ в условиях линейной записи можно считать пропорциональным распределению интенсивности:

$$\tau(\vec{\rho}) = \gamma_p \cdot I(\vec{\rho}) \quad (3)$$

- для позитивного фоторегистратора и

$$\tau(\vec{\rho}) = \tau_0 - \gamma_n \cdot I(\vec{\rho}) \quad (4)$$

- для негативного фоторегистратора.

В (3) и (4) коэффициенты γ_p и γ_n характеризуют контрастность процесса записи, а слагаемое τ_0 определяет амплитудное пропускание голограммы при нулевой интенсивности.

В цифровой голографии регистрируемый фотоэлектрический сигнал $u_p(\vec{\rho})$ можно считать пропорциональным распределению интенсивности $I(\vec{\rho})$:

$$u_p(\vec{\rho}) = \gamma_d \cdot I(\vec{\rho}), \quad (5)$$

где сигнал $u_p(\vec{\rho})$ для простоты записан в виде непрерывной функции, тогда как в цифровой голографии этот сигнал имеет дискретные значения в дискретном массиве пространственных координат (x_i, y_j) .

В обычной голографии для восстановления объектного волнового поля голограмма освещается опорной волной (рис. 2,а), которая дифрагирует на голограмме, как на сложной дифракционной решетке, и в дифракционном поле образуется (восстанавливается) объектное волновое поле. Процесс освещения голограммы опорной волной формально записывается в виде произведения амплитудного пропускания голограммы $\tau(\vec{\rho})$ и комплексной амплитуды освещающей волны $U_R(\vec{\rho})$

$$\begin{aligned} U(\vec{\rho}) &= U_R(\vec{\rho}) \cdot \tau(\vec{\rho}) = U_R \cdot \gamma_p \cdot I(\vec{\rho}) = \\ &= U_R \cdot \gamma_p \cdot (|U_R|^2 + |U_S|^2) + \gamma_p \cdot |U_R|^2 U_S + \gamma_p \cdot U_R^2 U_S^* . \end{aligned} \quad (6)$$

Второе слагаемое в (6) $\gamma_p |U_R|^2 U_S$ пропорционально комплексной амплитуде объектного поля U_S и описывает восстановленную объектную волну, распространяющуюся в направлении от объекта.

Если осветить голограмму сопряженной опорной волной, как это показано на рис. 2, комплексную амплитуду которой следует представить в сопряженной форме $U_R^*(\vec{\rho})$, то в дифракционном поле за голограммой образуется сопряженное объектное поле $U_S^*(\vec{\rho})$, распространяющееся в обратном направлении по отношению к объектному полю $U_S(\vec{\rho})$ на этапе записи голограммы.

Формально процесс восстановления сопряженного объектного поля определяется следующим выражением

$$U(\vec{\rho}) = U_R^*(\vec{\rho}) \tau(\vec{\rho}) = U_R^* \gamma_p (|U_R|^2 + |U_S|^2) + \gamma_p |U_R|^2 U_S^* + \gamma_p (U_R^*)^2 U_S , \quad (7)$$

где третье слагаемое определяет восстановленную сопряженную объектную волну $U_S^*(\vec{\rho})$, распространяющуюся в обратном направлении

(рис. 2,б). Это волновое поле образует действительное изображение объекта S^* в области его расположения на этапе записи голограммы.

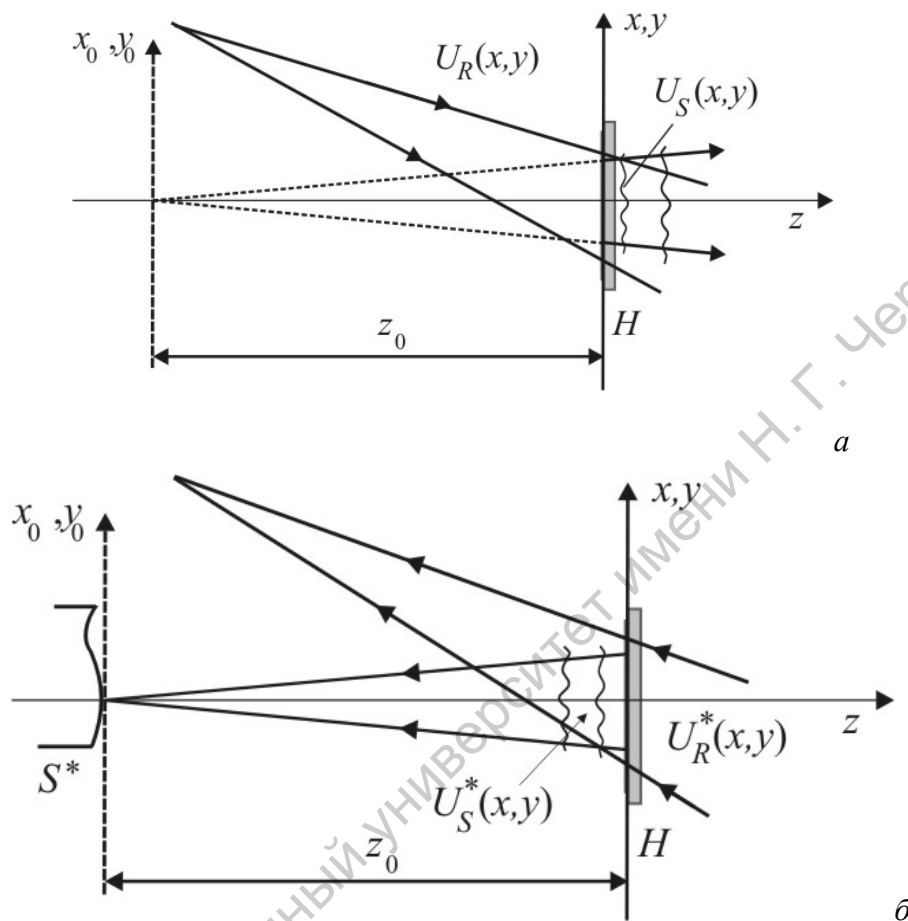


Рис. 2. Восстановление объектного поля $U_S(\vec{\rho})$ опорной волной $U_R(\vec{\rho})$ (а) и сопряженного объектного поля $U_S^*(\vec{\rho})$ сопряженной опорной волной $U_R^*(\vec{\rho})$ (б)

Физический смысл слагаемых в уравнениях (6) и (7), определяющих комплексные амплитуды волн в дифрагированном за голограммой волновом поле, можно пояснить с помощью схемных построений, представленных на рис. 3.

Первое слагаемое в (6) и (7) определяет опорный пучок, прямо прошедший через голограмму без дифракции, поскольку в качестве опорного пучка используется, как правило, волны простой формы – плоские или сферические, для которой $|U_R|^2 = const$.

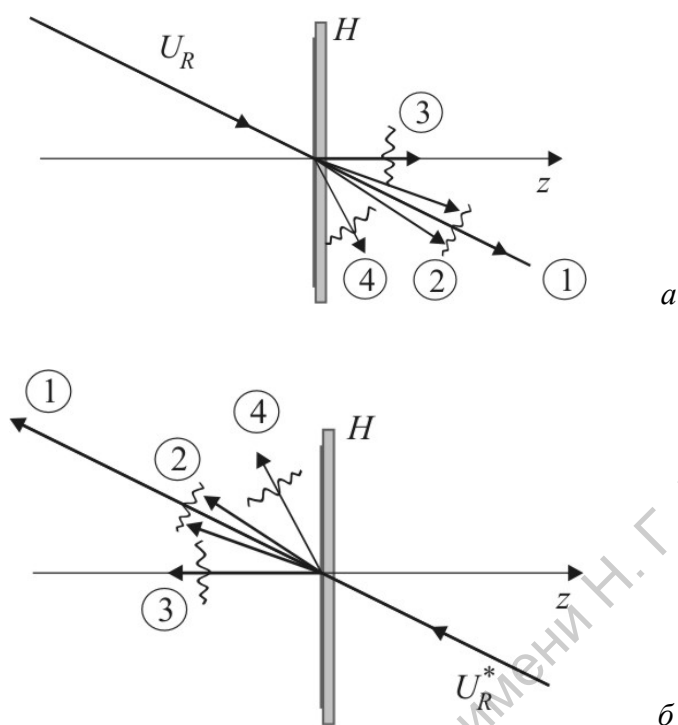


Рис. 3. Волновые поля, формирующиеся при дифракции опорной волны U_R на голограмме H (а) и при дифракции на голограмме сопряженной опорной волны (б): (1) – часть опорной волны, прошедшей через голограмму без дифракции – нулевой порядок дифракции; (2) – дифракционное гало, формирующееся в результате дифракции опорной волны на записанных на голограмме неоднородностях – спекл-структуре объектной волны; (3) – восстановленное объектное волновое поле в основном +1 порядке дифракции; (4) – восстановленное искаженное объектное волновое поле в -1 порядке дифракции

Объектное поле обычно пространственно интермодулировано из-за взаимной интерференции волн, рассеянных различными частями поверхности объекта. В сильно рассеянном когерентном поле формируется пятнистая интерференционная структура – спекл-структура. Поэтому функция $|U_S(\vec{\rho})|^2$ фактически описывает сильно неоднородное распределение интенсивности объектного поля, а второе слагаемое в (6) и (7), соответственно, определяет поле дифракции – дифракционное гало опорной волны U_R или U_R^* на соответствующей этому распределению голограммной структуре.

Третье слагаемое – самое важное в голографии, определяет комплексную амплитуду поля восстановленной объектной волны $U_S(\vec{\rho})$ в (6) или $U_S^*(\vec{\rho})$ в (7). Если $|U_R|^2 = const$, то восстанавливается неискаженное объектное поле.

Четвертое слагаемое также определяет комплексную амплитуду восстановленного объектного поля, но искаженного, распространяющегося в -1 порядке дифракции, направление которого существенно отличается от направления распространения объектного поля U_S на этапе записи, о чем свидетельствует сомножитель U_R^2 в (6) или $(U_R^*)^2$ в (7).

Дифракционные преобразования волновых полей

Если голограмма записывается в области ближнего поля дифракции (регистрирующая среда располагается в этой области), то объектное поле в плоскости записи голограммы определяется интегральным преобразованием Френеля комплексной амплитуды поля в плоскости $\vec{\rho}_0$, примыкающей к объекту S (рис. 1). Такую голограмму называют голограммой Френеля. Используя интеграл Френеля, комплексную амплитуду объектного поля $U_S(\vec{\rho})$ в плоскости записи можно записать в виде

$$U_S(\vec{\rho}) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_B(\vec{\rho}_0) \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z_0} [\vec{\rho} - \vec{\rho}_0]^2\right\} d^2 \vec{\rho}_0, \quad (8)$$

где $U_B(\vec{\rho}_0)$ – комплексная амплитуда объектного поля в плоскости $\vec{\rho}_0$; z_0 – расстояние от плоскости $\vec{\rho}_0$ до плоскости записи голограммы $\vec{\rho}$; λ – длина волны.

Если голограмма записывается в дальней области дифракции, то интеграл преобразования Френеля (8) в этом приближении сводится к интегральному преобразованию Фурье. В этом случае говорят о записи Фурье-

голограммы. Для комплексной амплитуды объектного поля в плоскости записи в дальней области дифракции можно использовать выражение

$$U_S(\vec{\rho}) \sim \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z_0}\vec{\rho}^2\right] \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_B(\vec{\rho}_0) \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z_0}\vec{\rho}\vec{\rho}_0\right] d^2\vec{\rho}_0, \quad (9)$$

где экспоненциальный множитель перед интегралом определяет параболическое распределение фазы в объектном поле, характерное для сферической параксиальной волны.

Важно показать, что восстановленное в +1 порядке дифракции объектное волновое поле $U_S(\vec{\rho})$ или $U_S^*(\vec{\rho})$ приводит к восстановлению изображения объекта, т.е. к восстановлению комплексной амплитуды $U_B(\vec{\rho}_0)$ или $U_B^*(\vec{\rho}_0)$, а значит и к восстановлению наблюдаемого распределения интенсивности $I_B(\vec{\rho}_0) = |U_B|^2$ в плоскости объекта.

Этот процесс восстановления важен для понимания принципов цифровой голографии, в которой производится процедура численного преобразования цифровой голограммы для получения изображения объекта.

Рассмотрим восстановление волнового поля в +1 порядке дифракции с использованием сопряженного опорного пучка U_R^* (рис. 2,б и 3,б) и покажем, что на расстоянии z_0 от голограммы, где был расположен объект, восстанавливается сопряженное объектное поле $U_B^*(\vec{\rho}_0)$, а значит и наблюдаемое изображение объекта $I_B(\vec{\rho}_0) = |U_B|^2$.

Комплексную амплитуду дифрагированного поля $U_d(\vec{\rho}_0)$ на некотором расстоянии z' от голограммы (рис. 4) запишем с помощью интегрального преобразования Френеля от третьего слагаемого в (7):

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \gamma_P |U_R|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int P(\vec{\rho}) U_S^*(\vec{\rho}) \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z'}[\vec{\rho}_0 - \vec{\rho}]^2\right\} d^2\vec{\rho}, \quad (10)$$

где $P(\vec{\rho}_0)$ – апертурная функция, определяющая конечные размеры голограммы – области, с которой восстанавливается объектное поле $U_S(\vec{\rho})$: $P(\vec{\rho}_0)=1$ в пределах голограммы и $P(\vec{\rho}_0)=0$ за ее пределами.

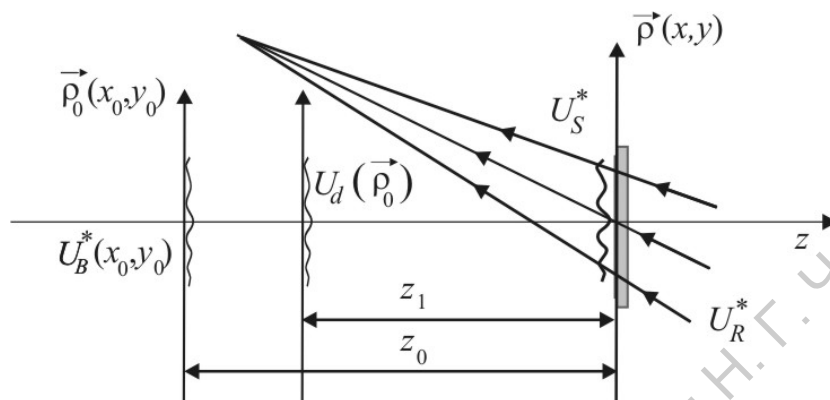


Рис. 4. Восстановление изображения объекта в области его расположения при записи голограммы

Подставляя в (10) выражение (8) для U_S^* и опуская постоянные множители γ_P и $|U_R|^2$, получаем довольно громоздкое выражение, которое, однако, несложно преобразуется к следующему относительно простому виду

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{\rho}) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_B^*(\vec{\rho}'_0) \exp\left\{-i \frac{\pi}{\lambda z_0} [\vec{\rho} - \vec{\rho}'_0]^2\right\} d^2 \vec{\rho}'_0 \times \exp\left\{i \frac{\pi}{\lambda z'} [\vec{\rho}_0 - \vec{\rho}]^2\right\} d^2 \vec{\rho}. \quad (11)$$

Интеграл по переменной $\vec{\rho}$ в (11) определяет важную функцию в процессе формирования изображения, которую называют импульсным откликом оптической системы:

$$h(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}'_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\vec{\rho}) \exp\left\{-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z'}\right) \vec{\rho}^2\right\} \exp\left\{i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{1}{z_0} \vec{\rho}'_0 - \frac{1}{z'} \vec{\rho}_0\right) \vec{\rho}\right\} d\vec{\rho}. \quad (12)$$

Используя (12) выражение (11) можно записать в виде

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z'} \vec{\rho}_0^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_B^*(\vec{\rho}') \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}')^2\right] h(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}') d\vec{\rho}'. \quad (13)$$

Совершенно очевидно из анализа (12) и (13), что при $z' \neq z_0$ функции $U_d(\vec{\rho}_0) \neq U_B^*(\vec{\rho}_0)$, и не происходит восстановления изображения.

Если $z' = z_0$, то (12) существенно упрощается и принимает форму интеграла Фурье от апертурной функции $P(\vec{\rho})$

$$h(\vec{\rho}', \vec{\rho}_0) = h(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int P(\vec{\rho}) \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0) \vec{\rho}\right] d\vec{\rho}. \quad (14)$$

При достаточно большой апертуре голограммы - апертурная функция $P(\vec{\rho})$ широкая и интеграл (14), можно считать, определяет δ -функцию Дирака

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0) \vec{\rho}\right] d\vec{\rho} \sim \delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0). \quad (15)$$

Следовательно, при достаточно большой апертуре голограммы импульсный отклик рассматриваемой системы формирования изображения, можно считать, равен δ -функции

$$h(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0) = \delta(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0). \quad (16)$$

Используя подстановку (16) в (13) при условии $z' = z_0$ и фильтрующее свойство δ -функции, получаем

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z_0} \vec{\rho}_0^2\right) U_B^*(\vec{\rho}_0) \exp\left(-i \frac{\pi}{\lambda z_0} \vec{\rho}_0^2\right) = U_B^*(\vec{\rho}_0). \quad (17)$$

– восстановленное дифракционное поле $U_d(\vec{\rho}_0)$ в плоскости расположения объекта оказывается точной копией сопряженного объектного поля $U_B^*(\vec{\rho}_0)$, $U_d(\vec{\rho}_0) = U_B^*(\vec{\rho}_0)$.

Если апертура голограммы конечна – имеет сравнительно малые размеры, то импульсный отклик системы уже не может считаться δ -функцией. Тогда для восстановленного дифракционного поля $U_d(\vec{\rho}_0)$ на

расстоянии z_0 от голограммы следует использовать выражение, подобное выражению (13),

$$U_d(\vec{\rho}_0) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \int U_B^*(\vec{\rho}_0) \exp\left[-i \frac{\pi}{\lambda z_0} (\vec{\rho}'^2 - \vec{\rho}_0^2)\right] h(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0) d\vec{\rho}', \quad (18)$$

из которого следует, что точного восстановления объектного поля не происходит.

Интеграл свертки (18) показывает, что чем меньше размеры голограммы и, соответственно, шире импульсный отклик $h(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0)$, тем большее несоответствие возникает между восстановленным и реальным полем.

В частности для прямоугольной голограммы с размерами a и b для импульсного отклика, используя (14), получаем явную функцию в следующем виде

$$\begin{aligned} h(\vec{\rho}' - \vec{\rho}_0) &= h(x'_0 - x_0, y'_0 - y_0) = \\ &= ab \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda z_0} a(x'_0 - x_0)\right]}{\frac{\pi}{\lambda z_0} a(x'_0 - x_0)} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{\lambda z_0} b(y'_0 - y_0)\right]}{\frac{\pi}{\lambda z_0} b(y'_0 - y_0)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Из (19) следует, что ширина импульсного отклика

$$\delta x_0 = \frac{\lambda z_0}{a}, \quad \delta y_0 = \frac{\lambda z_0}{b}$$

обратно пропорциональна размерам голограммы, a и b . Величины δx_0 и δy_0 фактически определяют размер элемента (пятна) разрешения восстановленного изображения.

Запись цифровой голограммы и численная процедура восстановления изображения объекта

Для записи голограммы с помощью матричного приемника, например, ПЗС-камеры, могут использоваться те же оптические схемы, что и при записи обычных голограмм на аналоговые светочувствительные среды (см., например, рис. 1). Отличительная особенность может носить только количественный характер, связанный с относительно низкой разрешающей способностью ПЗС-матрицы, составляющей в лучшем случае $R \approx 300 \text{ лин/мм}$. Это определяет необходимость использования достаточно малого угла падения θ опорного пучка на матрицу, поскольку полосы интерференции объектной и опорной волны должны отчетливо разрешаться пиксельной структурой матрицы. Поскольку период полос Λ определяется углом падения опорной волны θ , $\Lambda = \lambda / \sin \theta$, и необходимо, чтобы на этот период приходилось не менее 3-х пикселей матрицы, то для угла θ получаем оценку $\theta \leq 0,3\lambda R \times 10^{-3} \text{ рад}$.

Существенное отличие от обычного метода в цифровой голографии возникает на этапе восстановления изображения. На этом этапе используется численная процедура дифракционного преобразования записанной цифровой голограммы, представленной в виде матрицы дискретных числовых значений распределения интенсивности $I(\vec{\rho})$, определяемого соотношением (1). При условии линейной цифровой записи распределения интенсивности $I(\vec{\rho})$ получаемая числовая матрица и является цифровой (численной) голограммой - цифровым изображением аналоговой голограммной структуры $I(\vec{\rho})$.

Численный процесс восстановления комплексной амплитуды объектного поля заключается в умножении функции $I(\vec{\rho})$ на функцию ком-

плексной амплитуды восстанавливающей опорной волны $U_R(\vec{\rho})$ или $U_R^*(\vec{\rho})$, которую необходимо задать в явном виде. Если используется плоская опорная волна, падающая на этапе записи голограммы под углом θ в плоскости x, z на светочувствительную матрицу, то $U_R(\vec{\rho})$ следует задать в виде

$$U_R(\vec{\rho}) = U_R(x, y) = A_R \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta\right). \quad (20)$$

Если используется сферическая опорная волна с наклонным падением на плоскость матрицы, то $U_R(\vec{\rho})$ можно задавать в виде

$$U_R(\vec{\rho}) = A_R \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta\right) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z_R} \vec{\rho}^2\right), \quad (21)$$

где z_R – расстояние от опорного источника до плоскости матрицы.

В результате получается комплексная амплитуда поля в плоскости голограммы

$$U(\vec{\rho}) = I(\vec{\rho}) U_R(\vec{\rho}) \quad \text{или} \quad U(\vec{\rho}) = I(\vec{\rho}) U_R^*(\vec{\rho}) \quad (22)$$

Это поле следует подвергнуть численному интегральному преобразованию Френеля или Фурье в зависимости от того, какой вид голограммы был записан на ПЗС-матрице.

С практической точки зрения наиболее удобным является численный алгоритм быстрого преобразования Фурье. Поэтому целесообразнее на практике использовать запись голограммы Фурье. В этом случае для восстановления комплексной амплитуды поля изображения объекта $U_B(\vec{\rho})$ необходимо подвергнуть Фурье-преобразованию функцию $U(\vec{\rho})$, определяемую уравнением (22)

$$U_D(\vec{\rho}_0) = F\{U(\vec{\rho})\}, \quad (23)$$

где $F\{\dots\}$ – символ Фурье-преобразования, $U_D(\vec{\rho}_0)$ – комплексная амплитуда полного дифракционного поля, включающего все его составляющие.

Подставляя (21) в (23) и используя теорему о Фурье-преобразовании произведения функций, получаем следующее выражение для восстановленного объектного поля

$$U_D(\vec{\rho}_0) = F\{I(\vec{\rho})\} \otimes F\{U_R(\vec{\rho})\}, \quad (24)$$

где \otimes – символ свертки.

Для плоской опорной волны фурье-преобразование ее комплексной амплитуды U_R приводит к смещенной δ -функции $F\{U_R\} = \delta(x_0 + z_0 \sin \theta)$.

Поэтому (24) можно записать в виде

$$U_D(\vec{\rho}_0) = F\{I(\vec{\rho})\} \otimes \delta(x_0 + z_0 \sin \theta). \quad (25)$$

Свертка со смещенной δ -функцией в силу фильтрующего действия δ -функции приводит к смещению вдоль оси x_0 всего распределения $F\{I(\vec{\rho})\}$ на ту же величину $\Delta x_0 = z_0 \sin \theta$.

Используя уравнение (1) для $I(\vec{\rho})$, фурье-преобразование этого распределения можно записать в следующем развернутом виде

$$\begin{aligned} F\{I(\vec{\rho})\} &= F\{|U_R|^2\} + F\{|U_S|^2\} + F\{U_S U_R^*\} + F\{U_S^* U_R\} = \\ &= F\{A_R^2\} + F\{U_S\} \otimes F\{U_S^*\} + F\{U_S\} \otimes F\{U_R^*\} + F\{U_S^*\} \otimes F\{U_R\} = \\ &= A_R^2 \delta(\vec{\rho}_0) + U_B(\vec{\rho}_0) \otimes U_B^*(-\vec{\rho}_0) + U_B(\vec{\rho}_0) \otimes \delta(x_0 - z_0 \sin \theta) + \\ &+ U_B^*(\vec{\rho}_0) \otimes \delta(x_0 + z_0 \sin \theta). \end{aligned} \quad (26)$$

На рис. 5,а в схематичной графической форме представлено распределений (26).

Для правильной физической интерпретации выражения (26) необходимо понимать, что пространственное фурье-преобразование $F\{I(\vec{\rho})\}$ определяет пространственно-частотный спектр функции $I(\vec{\rho})$ – голограммной структуры (численной голограммы). Поэтому первое слагаемое – фурье-образ постоянной интенсивности опорной волны, определяется δ -функцией, поскольку постоянная составляющая имеет одну, нулевую пространственную частоту.

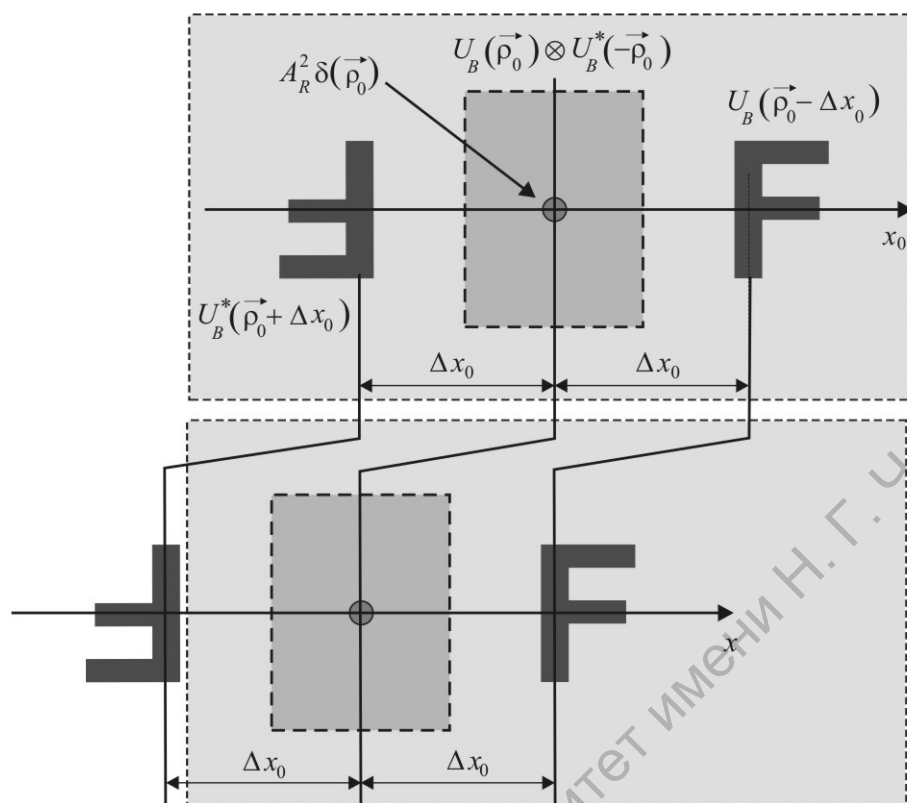


Рис. 5. Фурье-образы численной фурье-голограммы $I(\vec{\rho})$ (a) и произведения $I(\vec{\rho})$ и комплексной амплитуды опорной волны $U_R(\vec{\rho})$ (б)

Второе слагаемое, имеющее вид функции автокорреляции комплексной амплитуды объектного поля $U_B(\vec{\rho}_0)$, определяет пространственный спектр распределения интенсивности объектного поля в плоскости записи голограммы. Эту составляющую пространственного спектра голограммы называют еще дифракционным гало. В обычной аналоговой голографии это дифракционное гало является дальним полем дифракции опорного пучка на записанной на голограмме пространственно неоднородной структуре интенсивности объектного поля (спекл-структуре) $I_S(\vec{\rho}) = |U_S(\vec{\rho})|^2$.

Третье и четвертое слагаемые в (26) определяют смещенные в противоположные стороны относительно центра на $\Delta x_0 = z_0 \sin \theta$ комплексно сопряженные объектные поля $U_B(\vec{\rho}_0)$ и $U_B^*(\vec{\rho}_0)$.

Если на стадии восстановления комплексной амплитуды объектного поля с численной голограммы используется комплексная амплитуда наклонного опорного пучка, определяемая (20), то весь пространственный спектр численной голограммы сдвигается на величину $\Delta x_0 = z_0 \sin \theta$ вдоль оси x_0 , как это схематично показано на рис. 5,б. В этом случае в центре координат восстановленного поля будет находиться одно из изображений объекта $U_B(\vec{\rho})$ или $U_B^*(\vec{\rho})$.

Алгоритм быстрого фурье-преобразования имеет такое свойство, что размер (число элементов) численной матрицы фурье-образа $M \times N$ равен размеру преобразуемой матрицы $M \times N$. В варианте цифровой голографии $M \times N$ – число светочувствительных пикселей ПЗС-матрицы. Ограниченность размера фурье-образа голограммы может привести к тому, что в восстановленном поле $U_D(\vec{\rho}_0)$ не наблюдаются какие-либо составляющие этого поля, определяемые уравнением (26). На рис. 5,а и б ограниченный размер фурье-образа показан пунктирной рамкой, в которую, как показано на рис. 5,б, не попадает восстановленное сопряженное изображение объекта $U_B^*(\vec{\rho}_0)$.

Поскольку разрешение изображения определяется фурье-образом апертуры голограммы, совпадающей с апертурой ПЗС-матрицы, то размер элемента изображения – один пиксел, совпадает с размером элемента разрешения изображения $\delta x_0 \times \delta y_0$.

Для увеличения размеров фурье-образа голограммы можно априори увеличить размер матрицы голограммы путем добавления новых элементов – пиксельных столбцов и строк с постоянными числовыми значениями. Однако этот прием не приведет к увеличению разрешения восстановленного изображения: на элемент разрешения изображения $\delta x_0 \times \delta y_0$ будет приходиться несколько пикселей цифрового изображения.

Пространственное разрешение изображения, восстановленного с цифровой фурье-голограммы

Пространственное разрешение восстановленного с голограммы изображения определяется в основном двумя факторами – поперечными размерами ПЗС-матрицы, количеством в ней пикселей $M \times N$ и точностью реализации оптического (аналогового) фурье-преобразования объектного поля на этапе записи цифровой фурье-голограммы.

Фурье-образ апертурной функции матрицы $P(\vec{\rho})$, как показано в (14) и (19), определяет импульсный отклик системы формирования изображения $h(\vec{\rho}_0)$, а его ширина – размеры пятна разрешения

$$\delta x_0 \times \delta y_0 = \frac{\lambda z_0}{a} \times \frac{\lambda z_0}{b}, \quad (27)$$

где $a \times b$ – линейные размеры ПЗС-матрицы.

Однако импульсный отклик системы формирования изображения определяется также и не точностью выполнения фурье-преобразования на этапе записи цифровой голограммы. Если объект имеет недостаточно малые размеры и находится на недостаточно большом расстоянии от плоскости ПЗС-матрицы, то записывается не фурье-голограмма а голограмма Френеля. Следовательно, не равны параметры интегральных преобразований z_0 и z' , используемых на этапе записи голограммы (8) и на этапе восстановления (10). В этом случае импульсный отклик системы определяется не выражением (14), а выражением (12), учитывающим не только размер матрицы (апертурную функцию $P(\vec{\rho})$), но и неравенство параметров z_0 и z' , что аналогично с физической точки зрения эффекту расфокусировки изображения.

В экспериментальной части настоящей работы предлагается оценить влияние обоих вышеупомянутых факторов на разрешение восстанавливаемых цифровых изображений.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Цели экспериментальной работы: в натурном эксперименте изучить физические принципы и технические особенности записи цифровых оптических голограмм с использованием ПЗС-матрицы; изучить характеристики и функциональные возможности ПЗС-камеры, изучить принципы компьютерной обработки численных голограмм для восстановления волнового объектного поля в численной форме и восстановления изображения объекта в форме графического образа; определение факторов, ограничивающих разрешение восстановленного цифрового голографического изображения.

Приборы и принадлежности: виброзащитный стенд для голографических и интерференционных исследований, *He-Ne* лазер, делитель пучка, микрообъективы и линзы для расширения лазерного пучка, светофильтры, поляризатор, плоские и сферические металлизированные зеркала, объекты для записи их голографических изображений, прецизионные механические устройства для крепления и юстировки оптических элементов в голографической схеме, ПЗС-камера, компьютер.

Задание 1. Разработка оптической схемы записи цифровой фурье-голограммы и расчет параметров схемы

Порядок выполнения задания:

1. Изучить по описанию к ПЗС-камере ее характеристики и параметры, условия эксплуатации, программные возможности, программный интерфейс.
2. Рассчитать максимально возможный угол падения опорного пучка на ПЗС-матрицу, принимая во внимание величину межпиксельного расстояния матрицы.
3. Определить максимально возможный угловой размер объекта для записи его фурье-голограммы и возможное его положение относительно плоскости записи ПЗС-матрицы.
4. Спроектировать схему записи цифровой фурье-голограммы, ориентируясь на схемы, приведенные на рис. 1 или рис. 2, исходя из возможности разрешения ПЗС-матрицей голограммной структуры – картины интерференции объектной и опорной волн, и с учетом возможного расположения оптических элементов схемы на рабочей поверхности виброзащитного стенда.
5. Согласовать эскиз спроектированной схемы с преподавателем.
6. Собрать схему записи цифровой фурье-голограммы рассеивающего объекта.

Задание 2. Запись цифровой фурье-голограммы объемного рассеивающего объекта и численное восстановление его изображения

Порядок выполнения задания:

1. Проверить соединение ПЗС-камеры с компьютером через специальный кабель.
2. Включить компьютер и запустить специализированную программу записи кадров цифровых изображений с ПЗС-камеры.
3. Используя интерфейс программы ПЗС-камеры, установленной в схеме записи голограммы, произвести настройку режима записи цифровой голограммы при засветке матрицы камеры одновременно объектным и опорным полями.
4. Записать кадр цифровой голограммы в форме графического файла на жесткий диск компьютера в директорию (папку), выделенную для выполнения данной лабораторной работы.
5. Используя специализированную компьютерную программу обработки цифровых изображений, основанную на алгоритме быстрого преобразования Фурье, произвести численную обработку файла цифровой голограммы и восстановить голографическое изображение объекта.
6. Записать программно восстановленное изображение объекта в отдельный файл графического формата и определить размеры этого изображения с учетом параметров схемы записи голограммы, размеров и структурных особенностей объекта записи, используя ту или иную универсальную программу просмотра и обработки цифровых изображений.

7. Принимая во внимание линейные размеры объекта, его форму и размерные характеристики его структуры, определить разрешение изображения объекта.
8. Проанализировать и сравнить полученные количественные характеристики разрешения с их теоретическими оценками, учитывающими параметры схемы записи голограммы и параметры ПЗС-матрицы; сделать вывод об основных физических источниках и причинах ограничения разрешения восстановленного цифрового изображения.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дать определение методу оптической голографии.
2. В чем состоит принципиальное отличие методов аналоговой и цифровой голографии?
3. Нарисовать схему записи цифровой голограммы и проанализировать алгоритм восстановления цифрового изображения с голограммы.
4. Определить необходимую разрешающую способность ПЗС-матрицы для записи цифровой голограммы при заданных значениях длины волны лазерного излучения, размеров объекта и угла падения опорного пучка на голограмму.
5. Записать уравнение для комплексной амплитуды оптического поля в плоскости ПЗС-матрицы при записи фурье-голограммы, используя двумерное преобразование Фурье комплексной амплитуды поля в плоскости объекта $U(\vec{\rho}_0)$ при расположении точечного опорного источника в той же плоскости $\vec{\rho}_0(x_0, y_0)$.

6. Какими параметрами схемы записи и ПЗС-матрицы ограничивается пространственное разрешение изображения, восстановленного с цифровой фурье-голограммы?
7. При условии, что на этапе записи фурье-голограммы точно выполняется преобразование Фурье в оптическом тракте, записать выражение для комплексной амплитуды и интенсивности численного изображения, восстановленного с фурье-голограммы.

Лабораторная работа № 2

МЕТОДЫ ЦИФРОВОЙ ГОЛОГРАФИЧЕСКОЙ ИНТЕРФЕРОМЕТРИИ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Интерферометрия – это совокупность методов и средств измерения и обработки информации, основанных на интерференции волн. В аналоговой голографической интерферометрии по крайней мере одна из интерферирующих волн восстанавливается с голограммы, а другая волна – реальная от исследуемого объекта. В этом случае говорят о голографической интерферометрии реального времени. В двухэкспозиционной голографической интерферометрии обе интерферирующие волны восстанавливаются с голограммы.

Очевидно, в цифровой голографии возможна реализация только двухэкспозиционного метода голографической интерферометрии, поскольку в цифровой голографии не восстанавливается реальная волна, а восстанавливается только ее математический образ в числовой форме представления.

Согласно этому методу записываются цифровые голограммы одного и того же объекта в его различных состояниях, отличающихся или про-

пространственным положением, или измененной формой поверхности вследствие деформации и т.п. Можно записать довольно большое число таких голограмм, соответствующих многим последовательным состояниям объекта, а не только две голограммы на один и тот же фоторегистратор, как в аналоговой голографии.

С каждой цифровой голограммы возможно восстановление в числовой форме комплексной амплитуды поля на поверхности объекта:

$$U_j(\vec{\rho}_0) = A_j(\vec{\rho}_0) \exp[i\varphi_j(\vec{\rho}_0)], \quad (1)$$

где индекс j обозначает номер состояния объекта.

Комплексные амплитуды объектного поля, соответствующие различным состояниям объекта, отличаются из-за изменения пространственного положения объекта.

В реальном аналоговом процессе интерференция волн проявляется в наблюдении изменения интенсивности суммарного волнового поля в зависимости от разности фаз этих волн. С математической точки зрения интенсивность монохроматического поля определяется как квадрат модуля комплексной амплитуды суммарного поля

$$\begin{aligned} I_{\Sigma}(\vec{\rho}_0) &= |U_j(\vec{\rho}_0) + U_k(\vec{\rho}_0)|^2 = |U_j|^2 + |U_k|^2 + 2 \operatorname{Re} U_j U_k = \\ &= I_j + I_k + 2 A_j A_k \cos[\varphi_j(\vec{\rho}_0) - \varphi_k(\vec{\rho}_0)], \end{aligned} \quad (2)$$

где j и k определяют различные состояния объекта.

Если амплитуды и, соответственно, интенсивности полей не изменяются, а изменяются только фазы полей, по уравнение (1) упрощается и принимает вид

$$I_{\Sigma}(\vec{\rho}_0) = 2I_1(\vec{\rho}_0) [1 + \cos[\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0)]], \quad (3)$$

где $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0) = \varphi_j(\vec{\rho}_0) - \varphi_k(\vec{\rho}_0)$ – пространственное распределение разности фаз объектных полей, соответствующих различным состояниям объекта.

Таким образом, в варианте цифровой голографии для реализации метода голографической интерферометрии вычисляется квадрат модуля суммы восстановленных комплексных амплитуд объектных полей, соответствующих различным пространственным состояниям объекта.

Получаемое действительное числовое изображение $I_\Sigma(\vec{\rho}_0)$ согласно уравнениям (1) и (2) оказывается промодулированным косинусоидальной функцией, зависящей от разности фаз $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0)$ объектных полей. В аналоговой голографической интерферометрии эта модуляция проявляется в виде системы интерференционных полос, образующихся на восстановленном голографическом изображении. В цифровой голографической интерферометрии эта модуляция на графическом изображении имеет совершенно аналогичный вид: суммарное изображение объекта покрыто системой интерференционных полос – восстанавливается голографическое изображение-интерферограмма. На рис. 1 приведены голографические суммарные изображения с интерференционными полосами, восстановленные с двухэкспозиционной аналоговой голограммы и полученные в результате численной обработки цифровых голограмм.

Система интерференционных полос, их форма, пространственная частота определяются величиной и видом пространственного смещения поверхности отражающего объекта, поскольку величина разности фаз $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0)$ для каждой точки поверхности объекта определяется величиной и направлением смещения этой точки – вектором смещения $\vec{g}(\vec{\rho}_0)$. На рис. 2 приведена схема хода лучей для определения $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0)$ в зависимости от $\vec{g}(\vec{\rho}_0)$.

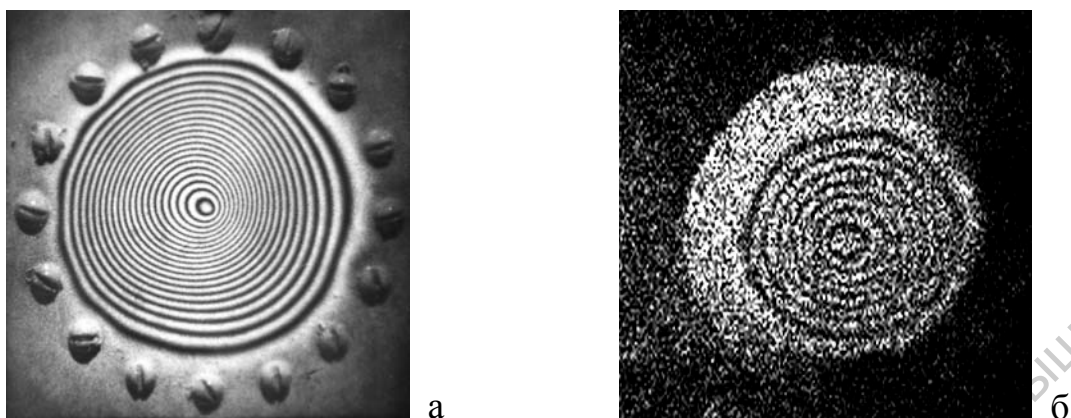


Рис. 1. Аналоговая (а) и цифровая (б) голографические изображения-интерферограммы деформации мембраны под действием сосредоточенной силы

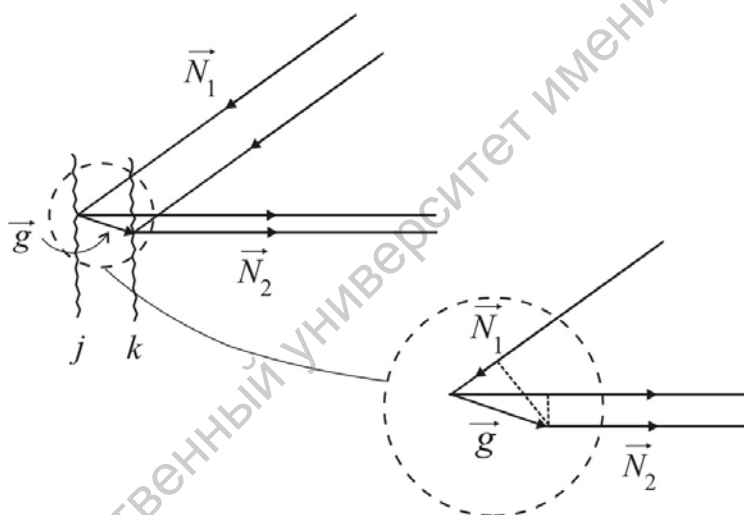


Рис. 2. К расчету разности фаз объектных полей, возникающей при смещении поверхности объекта: \vec{g} – вектор смещения точки поверхности; j и k – два положения поверхности объекта; \vec{N}_1 и \vec{N}_2 – единичные векторы освещающей волны и отраженной в данном направлении

Сумма проекций вектора \vec{g} на направление освещения \vec{N}_1 и направление отражения \vec{N}_2 определяет разность хода волн от источника фоторе- гистратора,

$$\Delta_{jk} = -\vec{g}\vec{N}_1 + \vec{g}\vec{N}_2, \quad (4)$$

где учтены направления векторов \vec{N}_1 и \vec{N}_2 . Отсюда для разности фаз получаем выражение:

$$\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0) = \frac{2\pi}{\lambda} g(\vec{\rho}_0) [\vec{N}_2 - \vec{N}_1], \quad (5)$$

где λ – длина волны используемого света.

Поскольку в общем случае вектор смещения различных точек поверхности $\vec{g}(\vec{\rho}_0)$ может быть различным и по величине, и по направлению, то разность фаз $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0)$ оказывается зависимой от координат $\vec{\rho}_0(x_0, y_0)$. Пространственное изменение $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0)$ влечет за собой и пространственное изменение интенсивности суммарного поля согласно (1) или (2) и появление светлых и темных полос на восстановленном суммарном изображении объекта. Светлые полосы появляются там, где $\Delta\varphi_{jk} = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и темные, где $\Delta\varphi_{jk} = (2m + 1)\pi$.

Основной задачей голографической интерферометрии является определение вектора смещения $\vec{g}(\vec{\rho}_0) = \vec{g}_0(x_0, y_0)$ по поверхности объекта по системе интерференционных полос, наблюдаемых на голографическом изображении объекта. В общем случае, когда априори не известно направление смещения \vec{g} и положение несмещенных точек, где $\vec{g} = 0$, то решение этой обратной задачи невозможно однозначно. В простых случаях, когда заранее известны некоторые параметры смещения поверхности, эта задача решается однозначно. Например, при наклоне (повороте) объекта в известном направлении на малый угол α вокруг оси, лежащей на поверхности объекта (рис. 3а).

Если поверхность объекта перпендикулярна оси z , совпадающей с направлением на центр ПЗС-матрицы, то вектор смещения \vec{g} можно считать также параллельным этой оси. При угле падения γ освещающего пуч-

ка на поверхность объекта для разности фаз $\Delta\varphi_{jk}(x_0)$ согласно (3) получим:

$$\Delta\varphi_{jk}(x_0) = \frac{2\pi}{\lambda} g(x_0)(1 + \cos\gamma) = \frac{2\pi}{\lambda} x_0 \cdot \alpha(1 + \cos\gamma), \quad (6)$$

где полагается, что ось поворота параллельна оси y_0 и проходит через начало координаты x_0 .

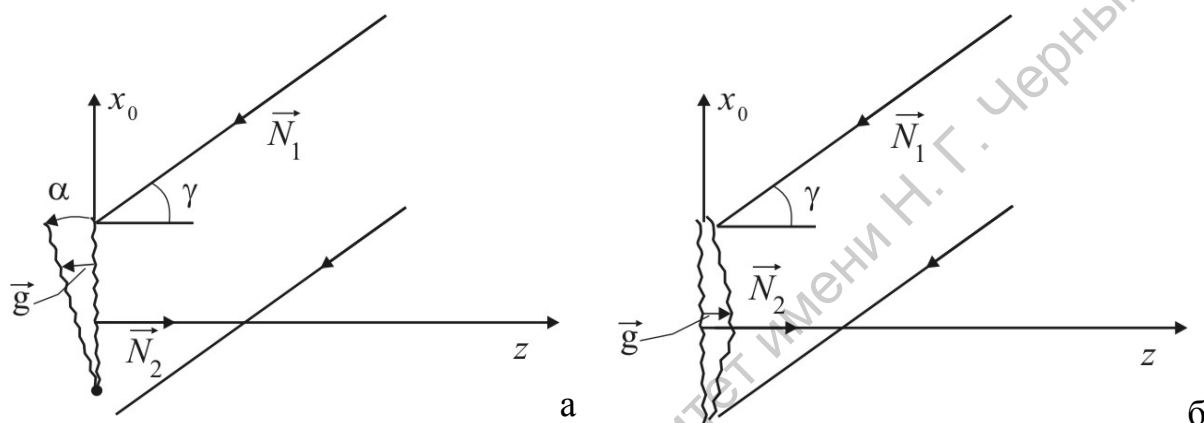


Рис. 3. К расчету разности фаз $\Delta\varphi_{jk}(x_0)$ при повороте объекта на малый угол α (а) и при деформации изгиба (б)

Уравнение (4) позволяет по периоду полос Λ определить угол поворота α . Также просто решается задача определения смещений поверхности $\bar{g}(x_0, y_0)$ при консольном изгибе поверхности или при изгибе мембраны (см. рис. 1), жестко закрепленной по контуру, под действием сосредоточенной или распределенной силы (рис.3б).

Влияние спекл-модуляции восстановленного изображения

Если объект имеет рассеивающую поверхность, то отраженное от него когерентное оптическое поле приобретает случайную пространственную амплитудно-фазовую модуляцию. Комплексная амплитуда этого поля $U_s(\vec{\rho}, z)$ становится случайной функцией пространственных координат

$$U_s(\vec{\rho}, z) = A_s(\vec{\rho}, z) \exp[i\Phi_s(\vec{\rho}, z)], \quad (7)$$

где амплитуда $A_s(\vec{\rho}, z)$ и фаза $\Phi_s(\vec{\rho}, z)$ – случайные пространственные функции.

Интенсивность этого поля $I_s(\vec{\rho}, z) = |U_s(\vec{\rho}, z)|^2 = A_s^2(\vec{\rho}, z)$ также случайная пространственная функция. Визуально, случайное распределение интенсивности $I_s(\vec{\rho}, z)$ воспринимается в виде системы светлых и темных пятен – спеклов (рис. 4,а). При наложении на это спекл-модулированное поле когерентной опорной волны возникает интерференционная картина в виде системы полос, наблюдаемых в пределах отдельных спеклов (рис.4,б).

Поперечные размеры спеклов определяются величиной угловой апертуры рассеяния поля:

$$\varepsilon_{\perp} \approx \frac{\lambda}{2\theta_s}, \quad (8)$$

где $2\theta_s \approx D/z$, D – поперечный размер рассеивающего объекта, z – расстояние от объекта до плоскости наблюдения (плоскости записи).

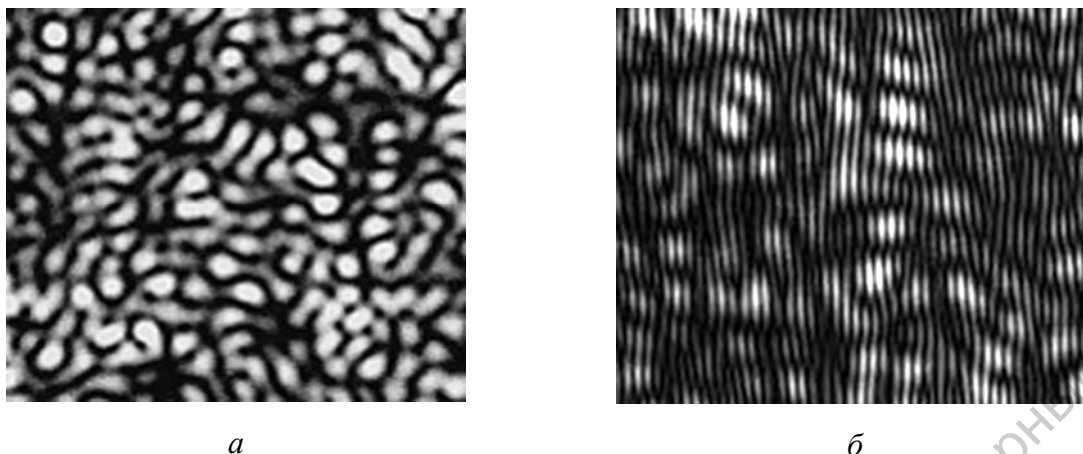


Рис. 4. Спекл-картина в поперечном сечении поля рассеянного лазерного пучка (а) и при наложении на это поле когерентной опорной волны (б)

Продольные размеры спеклов $\varepsilon_{//}$ существенно больше поперечных, особенно при малой угловой апертуре поля $2\theta_s$:

$$\varepsilon_{//} \approx \frac{2\lambda^2}{\theta_s^2}. \quad (9)$$

Период интерференционных полос внутри спеклов определяется углом падения опорного пучка θ

$$\Lambda_H = \frac{\lambda}{2 \sin \theta/2}. \quad (10)$$

В цифровой голографии на ПЗС-матрице записывается небольшой фрагмент $P(\vec{\rho})$ рассеянного поля $U(\vec{\rho}, z)$. Необходимо, чтобы спеклы этого поля и интерференционные полосы внутри них разрешались пиксельными элементами матрицы – межпиксельное расстояние должно быть по крайней мере в несколько раз меньше поперечных размеров спеклов ε_{\perp} .

В пределах спеклов комплексная амплитуда поля имеет детерминированное значение, а при переходе от спекла к спеклу меняется случайным образом. Отдельный спекл можно рассматривать в качестве области корреляции рассеянного поля.

Поскольку на голограмме записывается спекл-модулированное поле, следовательно, восстанавливается также спекл-модулированное поле с комплексной амплитудой $U_s(\vec{\rho})$ случайного характера. Фурье-преобразование этой случайной функции приводит к случайной функции – случайной комплексной амплитуде поля в плоскости $\vec{\rho}_0(x_0, y_0)$ изображения объекта

$$U(\vec{\rho}_0) = A(\vec{\rho}_0) \exp[i\Phi(\vec{\rho}_0)], \quad (11)$$

где $A(\vec{\rho}_0)$ – случайное распределение амплитуды, $\Phi(\vec{\rho}_0)$ – случайное распределение фазы, среднее значение которой $\langle \Phi(\vec{\rho}_0) \rangle$ определяет детерминированное фазовое распределение, которое изменяется при смещении или изменении формы поверхности объекта, $\Phi(\vec{\rho}_0) = \psi(\vec{\rho}_0) + \varphi(\vec{\rho}_0)$, где $\psi(\vec{\rho}_0)$ – чисто случайная составляющая фазы.

Следовательно, восстановленное изображение объекта $I(\vec{\rho}_0)$ будет содержать спекл-структуру - функция $I(\vec{\rho}_0)$ – случайная функция, (см. например, рис. 1,б).

Размеры спеклов в изображении, восстановленном с цифровой голограммы, определяются размерами ПЗС-матрицы. В соответствии с алгоритмом быстрого фурье-преобразования спеклы изображения будут совпадать по размеру с пикселями изображения – 1 спекл \approx 1 пиксель.

Спекл-модуляция изображения влияет на вид интерференционной картины, формируемой в методе цифровой голографической интерферометрии. Если период полос окажется приблизительно равным размеру спекла, то такие полосы будут практически не разрешимы. Кроме того, если объект между последовательными записями голограммы смещается на величину, превышающую размер спекла в изображении, то возникает эф-

фekt декорреляции комплексных амплитуд полей $U_j(\vec{\rho}_0)$ и $U_k(\vec{\rho}_0)$, соответствующих этим положениям объекта.

Для распределения интенсивности $I_\Sigma(\vec{\rho}_0)$ в суммарном изображении аналогично уравнению (2) получаем:

$$\begin{aligned}
 I_\Sigma(\vec{\rho}_0) &= |U_j(\vec{\rho}_0) + U_k(\vec{\rho}_0 - \vec{g})|^2 = \\
 &= I_j(\vec{\rho}_0) + I_k(\vec{\rho}_0 - \vec{g}) + 2A_j(\vec{\rho}_0)A_k(\vec{\rho}_0 - \vec{g}) \times \\
 &\times \cos[\psi(\vec{\rho}_0) - \psi(\vec{\rho}_0 - \vec{g}) + \varphi_j(\vec{\rho}_0) - \varphi_k(\vec{\rho}_0, \vec{g})], \quad (12)
 \end{aligned}$$

где \vec{g} – вектор смещения точек поверхности объекта.

В (12) предполагается, что в результате смещения \vec{g} спекл-структура также смещается, но не претерпевает каких-либо других изменений. В зависимости фазы $\varphi_k(\vec{\rho}_0, \vec{g})$ от \vec{g} отражено изменение среднего фазового распределения поля $\langle \Phi(\vec{\rho}_0) \rangle = \varphi(\vec{\rho}_0)$ от величины смещения.

Если величина \vec{g} превышает размер спеклов, то $\psi(\vec{\rho}_0) \neq \psi(\vec{\rho}_0 - \vec{g})$ и в (12) под знаком косинуса оказывается случайная разность фаз $\Delta\psi(\vec{\rho}_0) = \psi(\vec{\rho}_0) - \psi(\vec{\rho}_0 - \vec{g})$, которая разрушает детерминированное изменение косинуса и, следовательно, приводит к случайному изменению от координат третьего слагаемого в (12).

Это приводит к разрушению регулярной интерференционной картины в зависимости от фазового сдвига $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0, \vec{g})$. В наибольшей степени на эффект разрушения интерференционной картины влияют поперечные смещения поверхности, когда \vec{g} перпендикулярен оси z . В этом случае средняя разность фаз $\Delta\varphi_{jk}$ слабо зависит от \vec{g} , что следует из уравнения (4), а эффект декорреляции, наоборот, сильно зависит от \vec{g} , поскольку в поперечном направлении спеклы имеют наименьший размер.

В продольном направлении спеклы имеют больший размер, поэтому нормальное смещение \vec{g} точек поверхности – вдоль оси z , практически не приводит к эффектам декорреляции спекл-структур – спекл-структуры обоих изображений совпадают. Поэтому в уравнении (12) можем положить $\psi(\vec{\rho}_0) \approx \psi(\vec{\rho}_0 - \vec{g})$ и под знаком косинуса случайные фазовые сдвиги вычитаются и остается только детерминированная разность фаз $\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0, \vec{g})$.

В этом случае уравнение (12) можно переписать в виде:

$$I_{\Sigma}(\vec{\rho}_0) \approx 2I_j(\vec{\rho}_0) [1 + \cos(\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0, \vec{g}))], \quad (13)$$

которое показывает, что спекл-структура отдельного изображения объекта $I_j(\vec{\rho}_0)$, промодулировано осциллирующей функцией $2[1 + \cos(\Delta\varphi_{jk}(\vec{\rho}_0, \vec{g}))]$, которая определяет картину интерференционных полос на фоне спекл-модулированного изображения.

Из (13) следует, что если средний период изменения функции $I_j(\vec{\rho}_0)$, определяющий размер спекла, равен периоду модулирующей функции – периоду интерференционных полос Λ , то полосы перестают проявляться в изображении.

Фактически, в этом эффекте заложено ограничение на диапазон измеряемых величин \vec{g} , вернее, на величины изменения \vec{g} по поверхности объекта, $\partial g / \partial x_0$ и $\partial g / \partial y_0$.

Оптические схемы записи цифровых голограмм в методе голографической интерферометрии

Для реализации метода цифровой голографической интерферометрии могут быть использованы схемы записи голограмм в дифракционном поле – ближней или дальней областях дифракции, а также схема записи голограммы сфокусированного изображения. Поскольку на этапе восстановления предпочтительнее использовать быстрое преобразование Фурье, то и схема записи голограммы должна обеспечивать аналоговое оптическое преобразование Фурье. На рис. 5 представлены две схемы записи фурье-голограмм с различными способами формирования опорного пучка света.

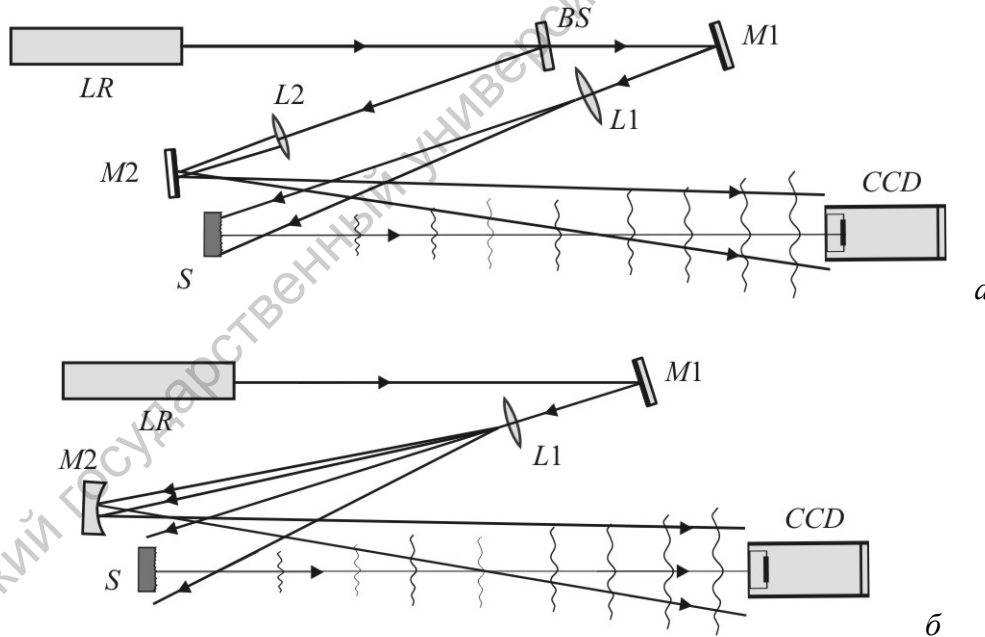


Рис. 5. Оптические схемы записи цифровых голограмм с формированием опорного пучка делением по амплитуде лазерного пучка (а) и делением расширенного лазерного пучка по волновому фронту (б): LR – лазер; BS – делитель; M1 и M2 – зеркала; L1 и L2 – собирающие линзы; SM – сферическое зеркало; CCD – ПЗС-камера

На рис. 6 приведены схемы записи цифровой голограммы сфокусированного изображения с амплитудным делением лазерного пучка на опорный и объектный. В схеме на рис.6а в опорном канале используется длиннофокусная линза $L3$ и плоское зеркало $M2$, тогда как в схеме на рис.6б вместо этих оптических элементов используется сферическое зеркало $M3$.

В схеме записи голограммы сфокусированного изображения можно использовать и схему с делением расширенного лазерного пучка по волновому фронту, аналогичной схеме, приведенной на рис.5б.

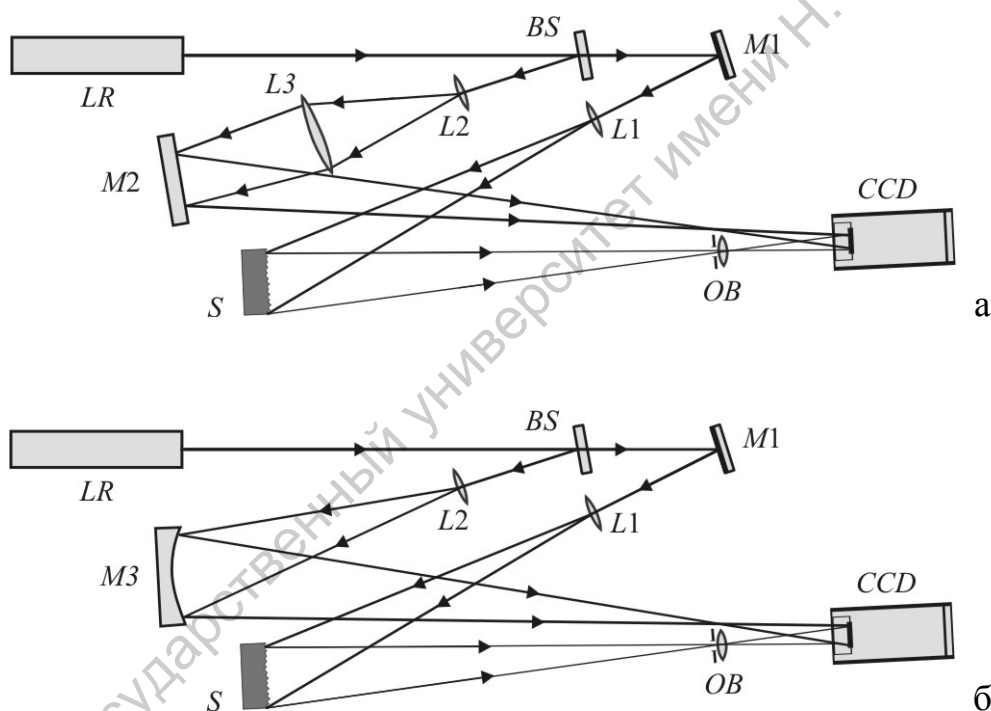


Рис. 6. Схемы записи цифровой голограммы сфокусированного изображения:
 LR – лазер; BS – делитель; M1 и M2 – плоские зеркала; L1, L2, L3 – собирающие линзы; M3 – сферическое зеркало; OB – объектив; CCD – ПЗС-камера

При записи цифровой голограммы сфокусированного изображения отсутствует необходимость численного дифракционного преобразования голограммы для восстановления комплексной амплитуды изображения поверхности объекта, поскольку это изображение на этапе записи голограммы совпадает с плоскостью ПЗС-матрицы.

Особенности записи цифровых голограмм сфокусированных изображений обусловлены необходимостью разрешения спекл-структуры изображения объекта и голограммной интерференционной структуры, образованной опорной и предметной волнами.

Размеры спеклов в пространстве изображений определяются угловой апертурой $2\theta'_s$ выходного пучка изображающей системы (объектива) $L3$, $\varepsilon_{\perp} \approx \lambda/2\theta'_s$. Следовательно, необходимо использовать малую апертурную диафрагму Da объектива, формирующего изображение рассеивающего объекта на ПЗС-матрице: $2\theta'_s \approx Da/z'$, $\varepsilon_{\perp} \approx \lambda z'/Da$, где z' - расстояние от выходного зрачка объектива до изображения. При требовании $\varepsilon_{\perp} \geq 2\Delta l'$, где $\Delta l'$ – межпиксельное расстояние ПЗС-матрицы, получаем $\lambda z'/Da \geq 2\Delta l' \rightarrow Da \leq \lambda z'/2\Delta l'$ при заданном коэффициенте уменьшения изображения $\beta = z'/z$ (z - расстояние от объекта до объектива).

Необходимость малого угла падения θ опорного пучка на голограмму ограничивает возможные поперечные размеры объектива. В качестве объектива целесообразно использовать малоапертурную линзу-объектив без оправы, исправленную от сферических aberrаций, с фокусным расстоянием f , обеспечивающим необходимый коэффициент уменьшения изображения β , достаточный для фокусировки всего изображения объекта в апертуру ПЗС-камеры.

Еще одна особенность записи голограммы сфокусированного изображения связана с формированием в плоскости изображения объектного поля с детерминированным фазовым распределением $\varphi(\vec{\rho}_0) = \frac{\pi}{\lambda z'} \vec{\rho}_0^2$, обусловленным влиянием фокусирующих свойств объектива. Для компенсации влияния этого фазового распределения с целью формирования голографической интерференционной структуры с минимально возможной пространственной частотой опорная волна должна иметь приблизительно

такое же фазовое распределение. Для этого достаточно сфокусировать опорную волну в плоскость зрачка линзы-объектива L3, формирующей изображение объекта на ПЗС-камере, как это показано на рис. 6.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Цели экспериментальной работы: в натурном эксперименте изучить физические принципы и технические особенности реализации метода цифровой голографической интерферометрии, изучить принципы компьютерной обработки численных голограмм объектов в различных состояниях для восстановления голографического изображения объекта – интерферограммы, отражающей в количественной форме изменения пространственного положения объекта.

Приборы и принадлежности: виброзащитный стенд для голографических и интерференционных исследований, *He-Ne* лазер, делитель пучка, микрообъективы и линзы для расширения лазерного пучка, светофильтры, поляроид, плоские и сферические металлизированные зеркала, прецизионные механические устройства для крепления и юстировки оптических элементов в голографической схеме, объекты со специальными устройствами для пространственного смещения и изменения формы (деформации) объекта для записи их голографических изображений и формирования голографических изображений-интерферограмм, ПЗС-камера, компьютер.

Задание 1. Разработка оптической схемы записи цифровых фурье-голограмм для реализации метода цифровой голографической интерферометрии и расчет параметров схемы

Порядок выполнения задания:

1. Изучить по описанию к ПЗС-камере ее характеристики и параметры, условия эксплуатации, программные возможности, программный интерфейс.
2. Рассчитать максимально возможный угол падения опорного пучка на ПЗС-матрицу, принимая во внимание величину межпиксельного расстояния матрицы.
3. Определить максимально возможный угловой размер объекта для записи его фурье-голограммы и возможное его положение относительно плоскости записи ПЗС-матрицы.
4. Спроектировать схему записи цифровой фурье-голограммы, ориентируясь на схемы, приведенные на рис. 5, исходя из возможности разрешения ПЗС-матрицей голограммной структуры – картины интерференции объектной и опорной волн, и с учетом возможного расположения оптических элементов схемы на рабочей поверхности виброзащитного стенда.
5. Согласовать эскиз спроектированной схемы с преподавателем.
6. Собрать схему записи цифровой фурье-голограммы рассеивающего объекта.

Задание 2. Запись серии цифровых фурье-голограмм объекта, соответствующих различным пространственным положениям объекта, и численное восстановление голографических изображений-интерферограмм

Порядок выполнения задания:

1. Проверить соединение ПЗС-камеры с компьютером через специальный кабель.
2. Включить компьютер и запустить специализированную программу записи кадров цифровых изображений с ПЗС-камеры.
3. Используя интерфейс программы ПЗС-камеры, установленной в схеме записи цифровой голограммы, произвести настройку режима записи голограммы при засветке матрицы камеры одновременно объектным и опорным полями.
4. Записать серию кадров цифровых голограмм объектного поля, соответствующих различным пространственным положениям объекта - при деформации его поверхности под действием сосредоточенной силы (деформация прогибы мембраны) или при повороте объекта вокруг оси, лежащей в плоскости его поверхности. Для создания деформации или поворота использовать специальные устройства.

Голограммы записать в форме графического файла на жесткий диск компьютера в директорию (папку), выделенную преподавателем для выполнения данной лабораторной работы.

5. Используя специализированную компьютерную программу обработки цифровых изображений, основанную на алгоритме быстрого преобразования Фурье, произвести численную обработку файлов цифровых голо-

- грамм и восстановить голографические изображения-интерферограммы, отражающие пространственные изменения объекта.
6. Записать программно восстановленные изображения-интерферограммы объекта в отдельные файлы в графическом формате.
 7. Используя формулу (5), произвести обработку изображений-интерферограмм с целью определения величины смещения объекта $\vec{g}(\vec{\rho}_0) = \vec{g}_0(x_0, y_0)$ между двумя кадрами записанных голограмм. Построить график зависимости величины смещения $|\vec{g}_0(x_0, y_0)|$ от координаты x_0 или y_0 .

Задание 3. Запись серии цифровых голограмм сфокусированного изображения объекта, соответствующих различным пространственным положениям объекта, и численное восстановление голографических изображений-интерферограмм

Порядок выполнения задания:

Следуя пунктам выполнения задания 2 экспериментально реализовать метод цифровой голографической интерферометрии сфокусированного изображения объекта при деформации его поверхности под действием сосредоточенной силы (деформация прогибы мембраны) или при повороте объекта вокруг оси, лежащей в плоскости его поверхности.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дать определение методу оптической голографической интерферометрии.
2. В чем состоит принципиальное отличие методов аналоговой и цифровой голографической интерферометрии?
3. Нарисовать схему записи цифровых фурье-голограмм и проанализировать алгоритмы восстановления цифровых изображений-интерферограмм.
4. Записать уравнение для распределения интенсивности в восстановленном голографическом изображении-интерферограмме.
5. Каким образом спекл-эффект влияет на параметры разрешения восстановленного изображения-интерферограммы?
6. Какими параметрами схемы записи и ПЗС-матрицы ограничивается пространственное разрешение изображения, восстановленного с цифровой фурье-голограммы?
7. Записать уравнение для разности фаз объектных волн, соответствующих различным пространственным положениям поверхности объекта.

ПРИЛОЖЕНИЕ

I. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ И ЕГО СВОЙСТВА

Определения

Функция $F(u, v)$ является фурье-образом функции $f(x, y)$, если они связаны интегральным преобразованием

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp[-i(ux + vy)] dx dy. \quad (1)$$

где u и v – пространственные частоты.

Обратное преобразование Фурье позволяет по фурье-образу $F(u, v)$ найти прообраз – функцию $f(x, y)$:

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \exp[i(ux + vy)] du dv. \quad (2)$$

Краткое обозначение операции преобразования Фурье:

$$F(u, v) = \mathbf{F}\{f(x, y)\}. \quad (3)$$

Для обратного преобразования Фурье используется запись:

$$f(x, y) = \mathbf{F}^{-1}\{F(u, v)\}. \quad (4)$$

Функция $f(x, y)$ имеет фурье-образ, если она обладает следующими свойствами: абсолютно интегрируема на бесконечной плоскости (x, y) , имеет конечное число разрывов и экстремумов в пределах любого прямоугольника конечных размеров, не имеет разрывов второго рода.

Основные свойства преобразования Фурье

1. Фурье-образ функции с разделяющимися переменными

Если $f(x, y) = a(x)b(y)$ и $A(u) = \mathbf{F}\{a(x)\}$, $B(v) = \mathbf{F}\{b(y)\}$, то

$$\mathbf{F}\{f(x, y)\} = A(u) \cdot B(v). \quad (5)$$

2. Теорема линейности

Если $\mathbf{F}\{f(x, y)\} = F(u, v)$, $\mathbf{F}\{g(x, y)\} = G(u, v)$, $\alpha = const$ и $\beta = const$, то

$$\mathbf{F}\{\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)\} = \alpha F(u, v) + \beta G(u, v). \quad (6)$$

3. Теорема подобия

Если $\mathbf{F}\{f(x, y)\} = F(u, v)$, $\alpha = const$ и $\beta = const$, то

$$\mathbf{F}\{f(\alpha x, \beta y)\} = \frac{1}{|\alpha\beta|} F\left(\frac{u}{\alpha}, \frac{v}{\beta}\right). \quad (7)$$

4. Теорема сдвига

Если $\mathbf{F}\{f(x, y)\} = F(u, v)$, $x_0 = const$ и $y_0 = const$, то

$$\mathbf{F}\{f(x - x_0, y - y_0)\} = F(u, v) \exp[-i(ux_0 + vy_0)]. \quad (8)$$

5. Сдвиг фурье-образа по частоте

Если $\mathbf{F}\{f(x, y)\} = F(u, v)$, $u_0 = const$ и $v_0 = const$, то

$$\mathbf{F}\{f(x, y) \exp[i(u_0 x + v_0 y)]\} = F(u - u_0, v - v_0). \quad (9)$$

6. Свойство симметрии

Если $\mathbf{F}\{f(x, y)\} = F(u, v)$, то

$$\mathbf{F}\{f^*(x, y)\} = F^*(-u, -v). \quad (10)$$

7. Теорема свертки.

Если $F\{f(x, y)\} = F(u, v)$, $F\{g(x, y)\} = G(u, v)$, то

$$F\{f(x, y) \otimes g(x, y)\} = F(u, v) \cdot G(u, v). \quad (11)$$

Символом \otimes обозначена интегральная операция свертки двух функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$:

$$f(x, y) \otimes g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) g(x - u, y - v) dudv. \quad (12)$$

8. Теорема корреляции

Если $F\{f(x, y)\} = F(u, v)$, $F\{g(x, y)\} = G(u, v)$, то

$$F\{f(x, y) * g(x, y)\} = F^*(u, v)G(u, v). \quad (13)$$

Символом $*$ обозначена интегральная операция корреляции двух функций $f(x, y)$ и $g(x, y)$:

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(u, v) g(x + u, y + v) dudv. \quad (14)$$

9. Теорема Парсеваля

Если $F\{f(x, y)\} = F(u, v)$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy = \frac{1}{4\pi^2} |F(u, v)|^2 dudv. \quad (15)$$

10. Соотношение взаимности

Если $F\{f(x, y)\} = F(u, v)$, то

$$F\{F(u, v)\} = 4\pi^2 f(-x, -y). \quad (16)$$

II. НАИБОЛЕЕ ВАЖНЫЕ ПАРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

В данном приложении приводятся наиболее важные пары преобразований Фурье. В каждой из этих пар возможна взаимная замена переменных x и ξ , за исключением соотношения (21).

$$\exp(-\pi cx^2) \xrightarrow{F} \frac{1}{\sqrt{c}} \exp\left(-\pi \frac{\xi^2}{c}\right), \quad (17)$$

$$\delta(x) \xrightarrow{F} 1, \quad (18)$$

$$\frac{\sin(\pi cx)}{\pi cx} \xrightarrow{F} \frac{1}{c} \operatorname{rect}\left(\frac{\xi}{c}\right), \quad (19)$$

$$\cos(\pi cx) \xrightarrow{F} \frac{1}{2} \delta\left(\xi + \frac{c}{2}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(\xi - \frac{c}{2}\right), \quad (20)$$

$$\sin(\pi cx) \xrightarrow{F} \frac{i}{2} \delta\left(\xi - \frac{c}{2}\right) - \frac{i}{2} \delta\left(\xi + \frac{c}{2}\right), \quad (21)$$

$$\operatorname{rect}\left(\frac{r}{2c}\right) \xrightarrow{F} \frac{cJ_1(2\pi cv)}{v}. \quad (22)$$

В соотношении (22) $\operatorname{rect}(r/2c)$ и $rcJ_1(2\pi cv)/v$, где $r^2 = x^2 + y^2$ и $v^2 = \xi^2 + \eta^2$, обладают осевой симметрией; через J_1 обозначена функция Бесселя первого рода первого порядка.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография. / Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 688 с.
2. Гудмен Дж. Введение в фурье-оптику. / Пер. с англ. М.: Мир, 1970. 364 с.
3. Островский Ю.И., Бутусов М.М., Островская Г.В. Голографическая интерферометрия. – М.: Наука, 1977. – 336 с.
4. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спекл-интерферометрия. Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 328с.
5. Локшин Г.Р. Основы радиооптики. – М.: Интеллект, 2009. - 344 с.

СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Балтийский С.А., Гуров И.П., Де Никола С., Коппола Д., Ферраро П. Современные методы цифровой голографии. – В кн.: Проблемы когерентной и нелинейной оптики /Под ред. И.П. Гурова и С.А. Козлова. - СПб: СПбГУ ИТМО. 2004. С. 91-117.
2. Schnars U., Jueptner W. Digital holography. Digital hologram recording, numerical reconstruction and related techniques. - Springer Verlag, 2004. 164 p.
3. Франсон М. Оптика спеклов. Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 171с.
4. Клименко И.С. Голография сфокусированных изображений и спекл-интерферометрия. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
5. Рябухо В.П. Спекл-интерферометрия. Соросовский образовательный журнал. – 2001. Т.7. №5. С.102–109.