ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Т. А. Кузнецова, В. А. Матвеев, О. А. Матвеева

Нелинейные модели оболочечных конструкций и некоторые численные методы их решения

Учебное пособие для студентов-магистров по специальности «Математические модели в естествознании»

Саратов — 2014

Оглавление

Глава 1. Некоторые сведения из функционального анализа

В этой главе приведены сведения из функционального анализа, необходимые для изложения дальнейшего материала. Эти сведения можно найти в [1], [2], [3], [4], [5].

§ 1. Самосопряжённые положительно определённые операторы и их свойства

Укажем свойства самосопряжённых положительно определённых операторов, которые используются при построении численных методов решения операторных уравнений, а также при выводе различных критериев, например, критерия локальной потери устойчивости.

Будем рассматривать операторы, заданные в гильбертовом пространстве.

Определение 1. Пространство $\mathbb{H}$ над полем $\mathbb{K}$ называется *гильбертовым*, если это банахово (линейное нормированное полное) пространство, норма в котором порождена *скалярным произведением* — эрмитовой положительно определённой формой $(x, y) : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{K}$, то есть функцией от двух аргументов, обладающей следующими свойствами:

- линейность по первому аргументу: $\forall x, y, z \in \mathbb{H}\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}\ (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;
- эрмитова симметричность: $\forall x, y \in \mathbb{H}\ (x, y) = \overline{(y, x)}$;
- положительная определённость: $\forall x \in \mathbb{H}\ (x, x) \geq 0; \forall x \in \mathbb{H}\ ((x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$;

Очевидно, что в том случае, когда $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, эрмитовость формы вырождается в билинейность.

Определение 2. *Сопряжённым* к данному линейному пространству $\mathbb{E}$ называется пространство $\mathbb{E}^*$ всех линейных функционалов на $\mathbb{E}$.

Сопряжённое пространство также является линейным. В случае, если $\mathbb{E}$ гильбертово, то согласно теореме Рисса существует канонический изоморфизм между $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^*$.

Определение 3. Пусть $\mathbb{E}_x, \mathbb{E}_y$ — линейные пространства, и пусть $A : \mathbb{E}_x \to \mathbb{E}_y$ — линейный оператор. Тогда для любого линейного функционала $\varphi \in \mathbb{E}_y^*$ оператор A порождает линейный функционал $f \in \mathbb{E}_x^*$ по следующей формуле: $f(x) = \varphi(Ax)$. Таким образом, построен оператор $A^* : \mathbb{E}_y^* \to \mathbb{E}_x^*$, который называется *сопряжённым оператором* к оператору A.

Очевидно, что так как $\varphi \in \mathbb{E}_y^*$ и A линейны, то оператор A^* также линеен.

Если оператор A является эндоморфизмом $\mathbb{E}$, то A^* является эндоморизмом $\mathbb{E}^*$:

$$A : \mathbb{E} \to \mathbb{E} \Rightarrow A^* : \mathbb{E}^* \to \mathbb{E}^*,$$

Если при этом пространство $\mathbb{E}$ является гильбертовым, то в силу канонического изоморфизма $\mathbb{E}$ и $\mathbb{E}^*$ можно считать, что A^* задан на самом $\mathbb{E}$.

Определение 4. Оператор $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ называется *самосопряжённым*, если он равен своему сопряжённому оператору, т.е. $A = A^*$.

Определение 5. Линейный оператор $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, у которого область определения $\operatorname{dom} A$ всюду плотна в $\mathbb{H}$, называется *симметрическим*, если

$$\forall x, y \in \operatorname{dom} A \quad (Ax, y) = (x, Ay).$$

Приведём без доказательства несколько утверждений относительно симметрических операторов.

Теорема 1. *Область определения A^*, сопряжённого к симметрическому оператору A, может быть шире, чем область определения самого A.*

Теорема 2. *Если симметрический оператор определён на всём пространстве, то он ограничен.*

Теорема 3. *Симметрический всюду определённый оператор, заданный на гильбертовом пространстве, является самосопряжённым.*

Введём важные для нас понятия собственного значения и спектра оператора.

Определение 6. *Собственным значением* оператора $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ называется такое значение $\lambda \in \mathbb{K}$, для которого существует $x \in \mathbb{H}$, такое, что $Ax = \lambda x$.

Определение 7. *Спектром* оператора $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ называется множество всех его собственных значений.

Теорема 4. *Спектр самосопряжённого оператора состоит из действительных значений.*

Теорема 5. *В пространстве $\mathbb{H}$ всегда существует ортонормированный базис, соответствующий самосопряжённому оператору $A : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, состоящий из нормированных собственных элементов, соответствующих различным собственным значениям оператора A.*

Определение 8. Симметрический оператор A называется *положительным*, если

$$\forall x \in \operatorname{dom} A \quad (Ax, x) \geq 0; \quad (Ax, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Определение 9. Симметрический оператор A называется *положительно определённым*, если

$$\exists C > 0 \, \forall x \in \operatorname{dom} A \quad (Ax, x) \geq C||x||^2.$$

Теорема 6. *Пусть A — положительный оператор. Тогда уравнение $Ax = f$ имеет в заданном пространстве не более одного решения.*

§ 2. Пространства Соболева

Решение, аналитическое или численное, дифференциальных уравнений в частных производных естественно рассматривать в пространствах $L^p(\Omega)$, то есть в пространствах функций, определённых с точностью до меры 0, суммируемых со своей степенью p в области Ω. Однако, как показано в [6], численные решения могут не принадлежать этим пространствам, потому что функции, составляющие эти пространства, не обязательно имеют производные нужных порядков и поэтому могут не являться решениями уравнения. В связи с этим вводятся пространства

Соболева, которые являются сужением пространств L^p, и для функций из которых определены *слабые производные* заданного порядка. Показывается, что этого достаточно для того, чтобы такие функции могли рассматриваться в качестве решений соответствующих уравнений.

Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ для некоторых натуральных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а также $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = |\alpha|$, то обозначим

$$D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Определение 10. Функция $u \in L^1(\Omega)$ имеет *слабую производную* v порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| = k$, если $v \in L^1(\Omega)$, и при этом для всех финитных функций $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ верно

$$\int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^k \int\limits_\Omega \varphi \, v \, dx.$$

Обозначим слабую производную порядка α через $\widetilde{D}^\alpha$:

$$\widetilde{D}^\alpha u = v.$$

Это определение основано на формуле интегрирования по частям. Очевидно, что если $u \in C^k(\Omega)$, то понятия производной и слабой производной совпадут.

Определение 11. *Пространством Соболева* $W_p^k(\Omega)$ называется пространство функций $u \in L^p(\Omega)$, таких, что все их слабые производные порядка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $|\alpha| \le k$ также принадлежат $L_p(\Omega)$:

$$W_p^k(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ : \ \forall \alpha, |\alpha| \le k \ \widetilde{D}^\alpha u \in L^p(\Omega) \right\}.$$

Если $p = 2$, то пространство $L^p(\Omega) = L^2(\Omega)$ гильбертово, и соответствующие пространства $W_2^k(\Omega) = H^k(\Omega)$ также гильбертовы. Это означает, что в них определено положительно определённое скалярное произведение, порождающее положительно определённую норму:

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{\substack{\alpha, \\ 0 \le |\alpha| \le k}} (\widetilde{D}^\alpha u, \widetilde{D}^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

$$||u||_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{\substack{\alpha, \\ 0 \le |\alpha| \le k}} ||\widetilde{D}^\alpha u||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

§ 3. Производные по Фреше и по Гато, нелинейные дифференцируемые операторы

Для операторов, определённых в подходящих пространствах, можно определить понятие производной.

Определение 12. Оператор $F : X \to Y$ между банаховыми пространствами X и Y имеет *производную по Гато* (*слабую производную*) $dF_x(e)$ в точке $x \in X$ по направлению $e \in X$, если предел

$$dF_x(e) = \lim_{\tau \to 0} \frac{F(x + \tau e) - F(x)}{\tau} = \frac{d}{d\tau} F(x + \tau e) \Big|_{\tau = 0}$$

существует. Если этот предел существует для всех $e \in X$, то оператор F *дифференцируем по Гато* в x.

Производная по Гато является обобщением производной по направлению для функций многих действительных переменных.

Определение 13. Оператор $F : X \to Y$ между банаховыми пространствами X и Y *дифференцируем по Фреше* (имеет *сильную производную*) в точке $x \in X$, если существует линейный ограниченный оператор $A_x : X \to Y$, такой, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{||F(x+h) - F(x) - A_x(h)||_Y}{||h||_X} = 0.$$

Такой оператор A_x называется *производной по Фреше* оператора F в точке x.

Производная по Фреше является обобщением производной действительной функции одного действительного аргумента. В случае, если оператор дифференцируем по Фреше в точке x, то он также дифференцируем по Гато в точке x, причём производные по Фреше и по Гато совпадают в x: $dF_x = A_x$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Из определения производной по Фреше видно, что в том случае, когда F является линейным оператором, производная по Фреше в любой точке области определения F совпадает с самим F.

Глава 2. Описание класса геометрически нелинейных моделей оболочечных конструкций

В данной работе рассматривается класс геометрически нелинейных моделей оболочечных конструкций, к которому относятся модели, удовлетворяющие следующим ограничениям:

- любая неизвестная функция, входящая в уравнения системы, однозначно выражается через функцию прогиба w;

- область Ω, определяемая срединной поверхностью оболочки, является ограниченной областью с кусочно-алгебраической границей;

- граничные условия рассматриваются в форме Неймана, что отвечает жёсткому закреплению краёв оболочки.

Как показано в работах [7]–[8], в этом классе моделей работает спектральный критерий локальной потери устойчивости.

Граница $\partial\Omega$ области Ω является кусочно-алгебраической, если $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$, где $\Gamma_i, i = \overline{1,n}$ — кривые, заданные алгебраическими уравнениями $\varphi_i(x,y) = 0, i = \overline{1,n}$, причём если $\Gamma_i = A_iB_i$, то выполняются равенства точек $B_1 = A_2, B_2 = A_3, \ldots, B_{n-1} = A_n, B_n = A_1$, и ни в каких других точках, кроме концов, кривые Γ_i не пересекаются.

Показано, что такой класс нелинейных моделей является достаточно широким. В этот класс входят модели Кирхгофа, Тимошенко, Кармана и другие. Примером статической модели, относящейся к этому классу, является модель Кармана, которая задаётся следующими уравнениями (в применении к цилиндрической оболочке):

$$\begin{cases} \frac{D}{h}\Delta^2 w - L(w,F) - \Delta_k F = q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w,w) - \Delta_k w, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4},$$

$$\Delta_k f = k_y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

h — толщина оболочки,

R — радиус кривизны цилиндрической оболочки,

k_x, k_y — главные кривизны оболочки ($k_x = 0, k_y = \dfrac{1}{R}$ для цилиндра),

$D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жёсткость,

E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона,

q — нормальная нагрузка,

$$L(f, g) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} -$$

— оператор, отражающий гауссову кривизну поверхности.

Граничные условия могут рассматриваться в форме Неймана (отвечают жёсткому закреплению краёв оболочки):

$$w|_\Gamma = F|_\Gamma = 0,$$
$$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$$

или для случая шарнирного закрепления:

$$w|_\Gamma = F|_\Gamma = 0,$$
$$\left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\Gamma = \partial\Omega$, а Ω — область, определяемая срединной поверхностью оболочки. В случае рассматриваемой цилиндрической оболочки $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0, a], y \in [0, b]\}$ для некоторых $a, b > 0$.

Также к данному классу относятся динамические модели, такие, как динамическая модель Кармана:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{D}{h}\Delta^2 w + L(w, F) + \Delta_k F + q, \\ \frac{1}{E}\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w, w) - \Delta_k w. \end{cases}$$

Систему (1) для удобства вычислений имеет смысл привести к безразмерному виду. Для этого сделаем замену

$$x = a\overline{x},\ y = b\overline{y},\ w = h\overline{w},\ F = Eh^2\overline{F},$$
$$k_y = \frac{h}{a^2}\overline{k_y},\ q = \frac{Eh^2}{a^2 b^2}\overline{q},\ \lambda = \frac{a}{b}$$

и переобозначим заново все величины с чертой символами без черты. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{12(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = L(w, F) + k_y\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + q, \\ \left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \lambda^2\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right) = -L(w, w) - k_y\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \end{cases}$$

граничные условия при этом примут вид (в форме Неймана):

$$w = F = \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \text{ при } x = 0 \vee x = 1 \vee y = 0 \vee y = 1.$$

Следует отметить, что в этой новой системе все величины не имеют физической размерности. Кроме того, в неизменном виде в уравнении сохранились члены $L(w, F)$ и $L(w, w)$. Это также удобно с вычислительной точки зрения.

Глава 3. О некоторых численных методах решения нелинейных моделей оболочечных конструкций

§ 1. Прямые и вариационные методы

При расчёте напряжённо-деформированного состояния оболочечных конструкций используются прямые и вариационные численные методы.

Прямые методы — это такие методы, которые сводят решение дифференциальных уравнений к конечным системам алгебраических уравнений. К таким методам относятся метод сеток, метод конечных элементов и другие.

Вариационные методы — это методы, которые сводят задачу к равносильной задаче поиска функций, сообщающих некоторому интегралу наименьшее значение (т.е. к вариационной задаче). Так, при обычных граничных условиях решение модельной задачи для оболочки в статическом случае сводится к задаче нахождения минимума потенциальной энергии оболочки.

Многие прямые методы часто применяются не к решению дифференциальных уравнений непосредственно, а к решению равносильной вариационной задачи. Это относится, прежде всего, к методу Ритца, суть которого заключается в следующем.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — некоторые полная система функций из пространства $L^2(\Omega)$, где Ω — срединная поверхность оболочки, удовлетворяющих граничным условиям. Запишем приближённое решение w_n в виде линейной комбинации:

$$w_n = \alpha_i \varphi_i + \ldots + \alpha_n \varphi_n. \tag{1}$$

Подставив (1) в интеграл потенциальной энергии $I(w)$, получим функцию $I(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ от переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Искомые коэффициенты находятся из системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha_i} = 0, \; i = \overline{1, n}.$$

Соответствующая функция w_n является приближённым решением вариационной задачи.

Тот же результат можно получить и прямым методом — методом Бубнова, который заключается в следующем.

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — полная ортонормированная система функций из пространства $L^2(\Omega)$, удовлетворяющих граничным условиям. Приближённое решение снова ищется в виде (1).

Подставим w_n в левую часть дифференциального уравнения равновесия

$$\Phi(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \ldots) = 0 \tag{2}$$

и приравняем к нулю скалярные произведения функции $\Phi(x, y, w_n, \frac{\partial w_n}{\partial x}, \dots)$ на функции φ_i, $i = \overline{1, n}$. В итоге получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Задача сходимости метода Бубнова и в более общем варианте метода Бубнова-Галёркина, в котором не предполагается ортогональность функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$, рассматривалась в работах С. Г. Михлина [9] и М. М. Красносельского [10].

Так как для оболочечных конструкций метод Бубнова-Галёркина даёт такое же приближение, что и метод Ритца, то его часто относят к вариационным методам. При этом метод Бубнова-Галёркина даёт единственное нужное решение (при котором достигается минимум потенциальной энергии) нелинейной модели даже в закритической области, где при отдельных значениях параметров задача может иметь не единственное решение.

§ 2. Пример использования метода Бубнова-Галёркина

Рассмотрим пример использования метода Бубнова-Галёркина при решении модельной задачи теории нелинейных оболочек.

Рассмотрим статическую модель Кармана:

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 w - L(w, F) - \Delta_k F = q, \\ \beta\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w, w) - \Delta_k w, \end{cases} \tag{1}$$

или

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 w - L(w, F) - \Delta_k F - q = \mathcal{L}_1(w, F) = 0, \\ \beta\Delta^2 F + \frac{1}{2}L(w, w) + \Delta_k w = \mathcal{L}_2(w, F) = 0. \end{cases}$$

Пусть также оболочка является прямоугольной в плане, т.е. $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, $\Gamma = \partial\Omega$, и граничные условия заданы в форме Неймана:

$$\begin{gathered} w|_\Gamma = F|_\Gamma = 0, \\ \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_\Gamma = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Будем искать решение (1) в виде рядов

$$\begin{gathered} w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \varphi_j(x, y), \\ F(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} D_j \varphi_j(x, y), \end{gathered} \tag{3}$$

где $\{\varphi_j(x, y)\}_{j=1}^\infty$ — полная система функций, ортогональных в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$ и удовлетворяющих граничным условиям.

Функции (3) будут являться точным решением системы (1) тогда и только тогда, когда будет выполнено требование ортогональности $\mathcal{L}_i(w, F)$, $i = 1, 2$ всем функциям системы $\{\varphi_j(x, y)\}_{j=1}^\infty$:

$$\iint\limits_\Omega \mathcal{L}_i(w, F)\varphi_j(x, y)dxdy = 0,\ i = 1, 2,\ j = \overline{1, \infty}. \tag{4}$$

В случае поиска приближённого решения это условие заменяют более слабым: в рядах (3) оставляют n слагаемых и рассматривают, соответственно, $2n$ равенств вида (4).

После интегрирования в системе (4) получаем систему однородных алгебраических уравнений, которая решается, например, методом Ньютона.

В нашем случае в качестве полной ортогональной системы функций можно взять набор функций

$$\varphi_{nm}(x,y) = x^{n+2}y^{m+2}(x-a)^2(y-a)^2,\ n,m=\overline{0,\infty}.$$

Эти функции удовлетворяют граничным условиям (2) и составляют полную в $L^2(\Omega)$ систему функций.

Тогда приближённое решение задачи (1)-(2) ищется в виде

$$w_N = \sum_{n,m=0}^{N} c_{nm}x^{n+2}y^{m+2}(x-a)^2(y-b)^2,$$
$$F_N = \sum_{n,m=0}^{N} d_{nm}x^{n+2}y^{m+2}(x-a)^2(y-b)^2,$$

а коэффициенты c_{nm} и b_{nm} находятся из системы алгебраических уравнений

$$\iint\limits_{\Omega}[\alpha\Delta^2 w_N - L(w_N,F_N) - \Delta_k F_N - q]\varphi_{nm}(x,y)dxdy = 0,\ n,m=\overline{0,N},$$
$$\iint\limits_{\Omega}[\beta\Delta^2 F_N + \frac{1}{2}L(w_N,w_N) + \Delta_k w_N]\varphi_{nm}(x,y)dxdy = 0,\ n,m=\overline{0,N}.$$

§ 3. Метод пошаговой линеаризации

Доказано (см. [11]), что метод Бубнова-Галёркина сходится и даёт приближённое решение, в том числе, и для задачи (1)-(2), но в общем случае он требует решения системы нелинейных уравнений, что достаточно трудоёмко с вычислительной точки зрения.

Однако ясно, что если система, для которой строится метод Бубнова-Галёркина была бы системой *линейных* дифференциальных уравнений, то и система уравнений на коэффициенты разложения неизвестных функций была бы системой линейных алгебраических уравнений, для решения которых существуют очень эффективные численные методы.

В работе [12] был разработан *метод последовательного возмущения параметров* (*метод пошаговой линеаризации*), который позволяет вместо системы нелинейных уравнений решать последовательность систем линейных алгебраических уравнений. Суть этого метода заключается в следующем.

Исходя из физических соображений, мы можем заметить, что во многих моделях нелинейных оболочек малому изменению параметра (например, нагрузки) соответствует малое изменение неизвестных функций. Пусть $\overline{y^n}$ — некоторое решение нелинейной модели, отвечающее набору параметров $\overline{p^0}$. Пусть также $\overline{p^n}$ — последовательность наборов параметров, где $\overline{p^n} = \overline{p^{n-1}} + \delta\overline{p^n}$, и $||\delta\overline{p^n}|| \ll 1$. Тогда очевидным образом мы получаем последовательность функций $\{\overline{y^k}\}_{k=0}^{n}$, где $\overline{y^k} = \overline{y^{k-1}} + \delta\overline{y^k}$, и где $\delta\overline{y^k}$ получается в результате решения линейной системы дифференциальных уравнений, полученной в результате линеаризации нелинейной модели, отвечающей набору параметров $\delta\overline{p^n}$. Как показано в [7], для моделей, у которых малое изменение параметров влечёт малое изменение решения, последовательность $\{\overline{y^k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в пространстве Соболева к решению нелинейной модели.

Рассмотрим применение метода пошаговой линеаризации на примере статической модели Кармана:

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2 w - L(w,F) - \Delta_k F = q, \\ \beta\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w,w) - \Delta_k w \end{cases} \tag{1}$$

с граничными условиями типа Неймана:

$$\begin{gathered} w|_\Gamma = w_0, F|_\Gamma = F_0, \\ \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_\Gamma = w_1, \left.\frac{\partial F}{\partial n}\right|_\Gamma = F_1, \end{gathered} \tag{2}$$

которые отвечают жёсткому закреплению краёв оболочки.

Запишем нормальную нагрузку, действующую на n-м шаге, в виде

$$q_n = \sum_{k=0}^{n} \delta q_k,$$

где $|\delta q_k| \ll 1$.

Пусть на $n-1$-м шаге были получены функция прогиба w_{n-1} и функция усилий F_{n-1} при соответствующей нагрузке q_{n-1}, и пусть на очередном шаге нагрузка увеличивается на δq_n. Тогда функции прогиба и усилий изменятся на величины δw_n и δF_n, соответственно: $w_n = w_{n-1} + \delta w_n$, $F_n = F_{n-1} + \delta F_n$, или $\delta w_n = w_n - w_{n-1}$, $\delta F_n = F_n - F_{n-1}$. Таким образом, функции w_n, F_n являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2(\delta w_n) - [L(w_n,F_n) - L(w_{n-1},F_{n-1})] - \Delta_k(\delta F_n) = \delta q_n, \\ \beta\Delta^2(\delta F_n) = -\frac{1}{2}[L(w_n,w_n) - L(w_{n-1},w_{n-1})] - \Delta_k(\delta w_n). \end{cases}$$

Тогда при $n \geq 1$ функции $\delta w_n, \delta F_n$ являются решением нелинейной системы вида

$$\begin{cases} \alpha\Delta^2(\delta w_n) - [L(w_{n-1}+\delta w_n, F_{n-1}+\delta F_n) - L(w_{n-1},F_{n-1})] - \Delta_k(\delta F_n) = \delta q_n, \\ \beta\Delta^2(\delta F_n) = -\frac{1}{2}[L(w_{n-1}+\delta w_n, w_{n-1}+\delta w_n) - L(w_{n-1},w_{n-1})] - \Delta_k(\delta w_n) \end{cases} \tag{3}$$

с нулевыми граничными условиями типа (2).

Так как величина нормальной нагрузки $|\delta q_n| \ll 1$, то прогиб оболочки δw_n будет незначительным, а нелинейное относительно неизвестных $\delta w_n, \delta F_n$ выражение, представляющее собой изменение гауссовой кривизны поверхности за счёт прогибов, можно приблизить линейным. Для этого рассмотрим нелинейный оператор

$$\widetilde{L}(w) = L(w,F),$$

где w и F связаны соотношением $\beta\Delta^2 F = -\frac{1}{2}L(w,w) - \Delta_k w$. Для оператора Лапласа это уравнение разрешимо, и существует явное выражение $F = F(w)$.

Рассмотрим производную по Фреше оператора $\widetilde{L}(w)$ в точке w_{n-1}. По определению производной имеем:

$$L(w+\delta w, F+\delta F) - L(w,F) = \widetilde{L}(w+\delta w) - \widetilde{L}(w) \approx \widetilde{L}'_w(\delta w). \tag{4}$$

Производная по Гато даёт

$$\widetilde{L}'_w(\delta w) = L(\delta w, F) + L(w, \delta F). \tag{5}$$

С учётом соотношений (4) и (5) получим приближённую систему для (3):

$$\begin{cases}\alpha\Delta^2(\delta w) - [L(\delta w, F^*_{n-1}) - L(w^*_{n-1}, \delta F)] - \Delta_k(\delta F) = \delta q_n,\\ \beta\Delta^2(\delta F) = -L(\delta w, w^*_{n-1}) - \Delta_k(\delta w),\end{cases}$$

где

$$w^*_{n-1} = w^*_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \delta w_j,$$

$$F^*_{n-1} = F^*_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \delta F_j,$$

где функции w^*_0 и F^*_0 являются решением системы линейных дифференциальных уравнений, полученной путём линеаризации нелинейной системы (1) в случае $q = \delta q_0$ и граничными условиями (2). Эта система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases}\alpha\Delta^2 w - \Delta_k F = \delta q_0,\\ \beta\Delta^2 F + \Delta_k w = 0.\end{cases}$$

Этот метод работает не только в случае геометрически нелинейных моделей ([13], [14]). Основной недостаток этого метода — его медленная сходимость.

§ 4. Модификации метода пошаговой линеаризации

В начале 2000-х годов В. В. Петров предложил следующую схему улучшения сходимости метода пошаговой линеаризации.

Пусть (w^*_{n-1}, F^*_{n-1}) — решение, полученное с помощью модифицированного метода на $n-1$-м шаге, и пусть (w_n, F_n) — решение, полученное на n-м шаге в результате применения обычного метода пошаговой линеаризации — решение «с недостатком». Обозначим через $(\hat{w}_n, \hat{F}_n)$ решение «с избытком», которое получается в случае решения линеаризованной системы в точке (w_n, F_n), отвечающее нагрузке q_n. Тогда в качестве решения модифицированного метода на n-м шаге берутся функции

$$w^*_n = \frac{w_n + \hat{w}_n}{2}, \quad F^*_n = \frac{F_n + \hat{F}_n}{2}.$$

Такая модификация метода значительно уменьшает время вычисления в целом.

В работах В. Н. Кузнецова и его учеников была предложена ещё одна модификация метода пошаговой линеаризации, которая не требует повторных вычислений. Пусть решение (w^*_{n-1}, F^*_{n-1}) известно. С помощью метода пошаговой линеаризации получаем приближённое решение на n-м шаге «с недостатком»:

$$w_n = w^*_{n-1} + \delta w_n.$$

Будем искать решение «с избытком» в виде

$$\hat{w}_n = w^*_{n-1} + \lambda \cdot \delta w_n,$$

где λ подбирается исходя из принципа минимальности потенциальной энергии вдоль действительного изменения параметра λ, т.е. из уравнения

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi(F^*_{n-1} + \delta F_n, w^*_{n-1} + \lambda \delta w_n, q_n)(w^*_{n-1} + \lambda \delta w_n) dx dy = 0, \tag{1}$$

где $\Phi(F, w, q) = 0$ — уравнение нелинейной системы. Это уравнение на λ имеет два корня, из них выбирается тот, который больше 1.

Как показано в [9], такое значение λ отвечает минимальному значению потенциальной энергии оболочки.

Оказывается, что так построенные решения «с недостатком» и «с избытком» лежат почти симметрично относительно эталонного решения, поэтому приближённое решение, полученное на n-м шаге в результате модификации метода выбирается в виде полусуммы решений «с недостатком» и «с избытком»:

$$w^*_n = \frac{w_n + \hat{w}_n}{2} = w^*_{n-1} + \frac{\delta w_n + \lambda \delta w_n}{2}.$$

Значения F^*_n получается из другого уравнения нелинейной модели.

Отметим, что при известных функциях w_n, F_n решение уравнения (1) относительно λ значительно проще, чем повторное решение линеаризованной системы, при этом последовательность (w^*_n, F^*_N), построенная с использованием этого метода, сходится значительно быстрее, чем в модификации, предложенной В. В. Петровым.

Литература

[1] Кузнецова Т. А., Кузнецов В. Н. Ограниченные полугруппы операторов и их приложения. — Саратов : Издательство Саратовского университета, 2004.

[2] Кузнецова Т. А., Кузнецов В. Н. Функциональный анализ и полугруппы операторов: учебное пособие. — Саратов : Саратовский государственный технический университет, 2001.

[3] Треногин В. А. Функциональный анализ. — М. : Главная редакция физико-математической литературы, 1980.

[4] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М. : Наука, 1965.

[5] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. — М. : Наука, 1977.

[6] Соболев С. М. Некоторые приложения функционального анализа к математической физике. — Л. : Издательство Ленинградского государственного университета, 1950.

[7] Кузнецов В. Н. Метод последовательного возмущения параметров в приложении к расчёту динамической устойчивости тонкостенных конструкций : Диссертация на соискание учёной степени доктора технических наук / В. Н. Кузнецов. — Саратов, 2000.

[8] Бессонов Л. В. Численная реализация алгоритма спектрального критерия устойчивости оболочечных конструкций // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Межвузовский сборник научных трудов. — 2012. — № 7. — С. 3–9.

[9] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М. : Издательство технико-теоретической литературы, 1967.

[10] Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М. : Гостехиздат, 1956.

[11] Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М. : Мир, 1972.

[12] Петров В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. — Саратов : Издательство Саратовского университета, 1975.

[13] Петров В. В., Овчинников Н. Г., Ярославский В. И. Расчёт пластинок и оболочек из нелинейно-упругого материала. — Саратов : Издательство Саратовского университета, 1976.

[14] Петров В. В., Иноземцев В. К., Синёва Н. Ф. Теория наведённой неоднородности и её приложения к проблеме устойчивости пластин и оболочек. — Саратов : Издательство Саратовского технического университета, 1996.