ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского»

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

О.В. Сорокина

Учебное пособие для студентов нематематических направлений подготовки

Саратов 2015

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

СОДЕРЖАНИЕ

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральным Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и программой курса «Математика» для студентов Института химии СГУ.

Курс «Математика» является фундаментальной общеобразовательной дисциплиной. Ее изучение предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- овладение основными приемами интегрирования функций;
- выработку умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных задач.

Цель пособия – помочь студентам Института химии СГУ освоить основные методы интегрирования функций и получить практические навыки при решении типовых задач по данной теме.

В пособии рассматриваются вопросы вычисления неопределенных, определенных и несобственных интегралов, а также основные приложения определенного интеграла в геометрии и естествознании. Подробное содержание приведено в оглавлении. В пособии кратко изложены необходимые теоретические сведения и формульные соотношения, основной материал иллюстрируют примеры. Приведены задачи для самостоятельного решения. Самостоятельное решение этих задач позволит студентам освоить методику интегрирования и будет способствовать лучшему пониманию пройденного материала. Ответы к задачам помогут проконтролировать правильность их решения. В конце пособия приведены контрольные вопросы, позволяющие оценить качество освоения теоретического материала, и список литературы.

Пособие может быть полезно при изучении данной темы студентами нематематических направлений подготовки, изучающих высшую математику.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Основные понятия

Основной задачей дифференциального исчисления является определение для заданной функции $F(x)$ ее производной $F'(x) = f(x)$ или ее дифференциала $dF(x) = f(x)dx$.

Обратная задача, состоящая в определении функции $F(x)$ по известным производной $f(x)$ или дифференциалу $f(x)dx$, представляет собой основную задачу интегрального исчисления.

Операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны.

<u>Определение 1.1.</u> Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если

1) они определены и непрерывны на одном множестве X;
2) $\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.●

Если функция $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$, то функция $F(x) + C$, где C - произвольная постоянная, также будет ее первообразной:

$$\left(F(x) + C\right)' = F'(x) = f(x).$$

Таким образом, функция имеет бесконечное множество первообразных.

Нахождение функции $f(x)$ по ее первообразной $F(x)$ является операцией обратной операции дифференцирования.

<u>Определение 1.2.</u> *Неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных $F(x) + C$.●

Обозначается $\int f(x)dx$, где $\int$ - знак интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, x - переменная интегрирования.

Нахождение первообразной функции называется *интегрированием функции*.

<u>Свойства неопределенного интеграла</u>

1◦. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2◦. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3◦. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4◦. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, где k - постоянный множитель.

5◦. $\int\left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

6◦. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

При вычислении неопределенных интегралов необходимо знать таблицу первообразных элементарных функций. Во всех формулах под u понимается или независимая переменная, или произвольная функция любой независимой переменной, дифференцируемая в некотором промежутке.

Каждая из формул этой таблицы справедлива в любом промежутке, содержащемся в области определения соответствующей подынтегральной функции.

Таблица основных интегралов

$$\int 0 \cdot du = C. \quad (1.1)$$

$$\int du = u + C. \quad (1.2)$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \quad \text{где} \quad n - \text{постоянная величина.} \quad (1.3)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C. \quad (1.4)$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0;\ a \neq 1). \quad (1.5)$$

$$\int e^u du = e^u + C. \quad (1.6)$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C. \quad (1.7)$$

$$\int \cos u du = \sin u + C. \quad (1.8)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C. \quad (1.9)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C. \quad (1.10)$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} arctgu + C, \\ -arcctgu + C. \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \begin{cases} \arcsin u + C, \\ -\arccos u + C. \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\int shudu = chu + C. \quad (1.13)$$

$$\int chudu = shu + C. \quad (1.14)$$

$$\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C. \quad (1.15)$$

$$\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C. \quad (1.16)$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Чтобы вычислить неопределенный интеграл, необходимо его свести к табличному интегралу, используя свойства интеграла или основные способы вычисления.

П р и м е р ы.

1. Вычислить интегралы:

$a) \int x^3 dx$; $\quad b) \int \sqrt{x} dx$; $\quad c) \int \sqrt[3]{x^2} dx$; $\quad d) \int \frac{6}{x^2} dx$;

$e) \int 2^x dx$; $\quad f) \int 5 dx$.

Р е ш е н и е.

$a) \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$. Здесь использована формула (1.3), в которой $u = x$.■

$$b) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}1}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.■$$

$$c) \int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\left(\frac{2}{3}+1\right)} + C = \frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\left(\frac{5}{3}\right)} + C = \frac{3}{5} x\sqrt[3]{x^2} + C.■$$

$d) \int \frac{6}{x^2} dx = 6\int x^{-2} dx = 6\frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{6}{x} + C.$ При вычислении использовано свойство 4◦ и формула (1.3).■

$e) \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$ При вычислении использована формула (1.5), в которой $u = x, \quad a = 2$.■

$f) \int 5dx = 5\int dx = 5x + C$.■

2. Вычислить интегралы:

$a) \int \left(3x^2 - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx$; $\quad b) \int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$;

$c) \int \left(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)^2 dx$; $\quad d) \int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^{3x} dx$.

Р е ш е н и е.

Интегралы можно вычислить, выполнив алгебраические преобразования подынтегральных функций и используя свойства 4◦-5◦, формулы (1.3), (1.5).

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$a)\ \int\left(3x^2-\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[5]{x^3}}\right)dx=3\int x^2dx-4\int x^{-\frac{1}{2}}dx-3\int x^{-\frac{3}{5}}dx=x^3-8\sqrt{x}-\frac{15}{2}x^{\frac{2}{5}}+C=$$

$$=x^3-8\sqrt{x}-\frac{15}{2}\sqrt[5]{x^2}+C. \blacksquare$$

$$b)\ \int\frac{x^4-3x^2+5\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\left(\frac{x^4}{x^{\frac{1}{3}}}-3\frac{x^2}{x^{\frac{1}{3}}}+5\right)dx=\int\left(x^{\frac{11}{3}}-3x^{\frac{5}{3}}+5\right)dx=\int x^{\frac{11}{3}}dx-$$

$$-3\int x^{\frac{5}{3}}dx+5\int dx=\frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}}-\frac{9}{8}x^{\frac{8}{3}}+5x+C=\sqrt[3]{x^2}\left(\frac{3}{14}x^4-\frac{9}{8}x^2+5\sqrt[3]{x}\right)+C. \blacksquare$$

$$c)\ \int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx=\int\left(x+2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}+\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx=\int\left(x+2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=\int xdx+2\int x^{\frac{1}{6}}dx+$$

$$+\int x^{-\frac{2}{3}}dx=\frac{x^2}{2}+2\cdot\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\left(\frac{7}{6}\right)}+\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{3}\right)}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{12}{7}x\sqrt[6]{x}+3\sqrt[3]{x}+C. \blacksquare$$

$$d)\ \int 2^x\cdot 3^{2x}\cdot 5^{3x}dx=\int\left(2\cdot 3^2\cdot 5^3\right)^x dx=\int 2250^x dx=\frac{2250^x}{\ln 2250}+C. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int x\sqrt{x}dx.$

2. $\int\left(x^3-3x^2+5x-4\right)dx.$

3. $\int\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[7]{x^5}}\right)dx.$

4. $\int\left(3x^2-5\right)^3dx.$

5. $\int\frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

Ответы.

1. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C.$

2. $\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{5x^2}{2}-4x+C.$

3. $15\cdot\sqrt[3]{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+14\cdot\sqrt[7]{x^2}+C.$

4. $\frac{27x^7}{7}-27x^5+75x^3-125x+C.$

5. $2\arcsin x-x+C.$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1.2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Замена переменной должна привести неопределенный интеграл к упрощению подынтегрального выражения и, в лучшем случае, к табличному интегралу.

Пусть $x=\varphi(t);\ \Rightarrow dx=d\varphi(t);\ \Rightarrow dx=\varphi'(t)dt$. Тогда формула замены переменной будет иметь вид

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=\int f(\varphi(t))d\varphi(t)=F(\varphi(t))+C.$$

Обратная замена позволит получить необходимый результат.

П р и м е р ы.

Вычислить интегралы:

$a)\ \int\cos(2x+3)dx;\qquad b)\ \int\frac{dx}{\sin^2(5x+2)}.$

Р е ш е н и е.

$$a)\ \int\cos(2x+3)dx=\left\{t=2x+3;\ \Rightarrow dt=2dx;\ \Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt\right\}=\frac{1}{2}\int\cos t dt\overset{(1.8)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\sin t+C\overset{t=2x+3}{=}\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C.\blacksquare$$

$$b)\ \int\frac{dx}{\sin^2(5x+2)}=\left\{t=5x+2;\ \Rightarrow dt=5dx;\ \Rightarrow dx=\frac{1}{5}dt\right\}=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\sin^2 t}dt\overset{(1.10)}{=}$$

$$=-\frac{1}{5}ctgt+C\overset{t=5x+2}{=}-\frac{1}{5}ctg(5x+2)+C.\blacksquare$$

Интеграл $\int f(ax+b)dx$, где a,b - постоянные, может быть легко найден с помощью подстановки $t=ax+b$. Действительно,

$$\int f(ax+b)dx=\left\{t=ax+b;\ \Rightarrow dt=adx;\ \Rightarrow dx=\frac{1}{a}dt\right\}=\frac{1}{a}\int f(t)dt=$$

$$=\frac{1}{a}F(t)+C=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

При нахождении $\int f(ax+b)dx$ записи самой подстановки можно не производить, приняв во внимание, что $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$. Таким образом,

$$\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

где F - первообразная для f.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Примеры.

Вычислить интегралы:

$$a)\ \int \frac{dx}{3x-5}; \qquad b)\ \int (2x+1)^{20}\,dx.$$

Решение.

$$a)\ \int \frac{dx}{3x-5} = \left\{ dx = \frac{1}{3} d(3x-5) \right\} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x-5)}{3x-5} = \frac{1}{3}\ln|3x-5| + C. \blacksquare$$

$$b)\ \int (2x+1)^{20}\,dx = \left\{ dx = \frac{1}{2} d(2x+1) \right\} = \frac{1}{2}\int (2x+1)^{20}\,d(2x+1) = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C. \blacksquare$$

Рассмотрим примеры применения метода замены переменной под знаком интеграла.

Примеры.

1. Вычислить интегралы:

$$a)\ \int \sin^2 x \cos x dx; \qquad b)\ \int x\left(x^2+5\right)^7 dx; \qquad c)\ \int x^2\sqrt{x^3+5}dx;$$

$$d)\ \int \frac{\ln x}{x} dx; \qquad e)\ \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx; \qquad f)\ \int \frac{\cos x}{\sin^5 x} dx;$$

$$g)\ \int \frac{arctg^3 x}{1+x^2} dx.$$

Решение.

$$a)\ \int \sin^2 x \cos x dx = \{ t = \sin x;\ \Rightarrow dt = d\sin x;\ \ \Rightarrow dt = \cos x dx \} =$$

$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C \overset{t=\sin x}{=} \frac{\sin^3 x}{3} + C. \blacksquare$$

$$b)\ \int x\left(x^2+5\right)^7 dx = \left\{ t = x^2+5;\ \Rightarrow dt = 2xdx;\ \Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt \right\} = \frac{1}{2}\int t^7 dt =$$

$$= \frac{t^8}{16} + C = \frac{\left(x^2+5\right)}{16} + C. \blacksquare$$

$$c)\ \int x^2\sqrt{x^3+1}dx = \left\{ t = x^3+1;\ \Rightarrow dt = 3x^2dx;\ \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{9} + C = \frac{2}{9}\left(x^3+1\right)\sqrt{x^3+1} + C. \blacksquare$$

$$d)\ \int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ t = \ln x;\ \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx \right\} = \int tdt = = \frac{t^2}{2} + C \overset{t=\ln x}{=} \frac{\ln^2 x}{2} + C. \blacksquare$$

$$e)\ \int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx = \int \frac{(\arcsin x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x^2}} dx = = \left\{ t = \arcsin x;\ \Rightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right\} =$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$=\int t^{\frac{1}{2}}dt=\frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3}+C=\frac{2}{3}\arcsin x\sqrt{\arcsin x}+C.\blacksquare$$

$$f)\int\frac{\cos x}{\sin^5 x}dx=\{t=\sin x;\ \Rightarrow dt=\cos x dx\}=\int\frac{dt}{t^5}=\int t^{-5}dt=\frac{t^{-4}}{-4}+C=-\frac{1}{4t^4}+C=$$

$$=-\frac{1}{4t^4}+C=-\frac{1}{4\sin^4 x}+C.\blacksquare$$

$$g)\int\frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx=\left\{t=arctgx;\ \Rightarrow dt=\frac{1}{1+x^2}dx\right\}=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{arctg^4 x}{4}+C.\blacksquare$$

2. Вычислить интегралы:

$$a)\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx;\qquad b)\int e^{3\cos x}\sin x dx;\qquad c)\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\sin x dx.$$

Решение.

$$a)\int\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\left\{t=\sqrt[3]{x};\ \Rightarrow x=t^3;\ \Rightarrow dx=3t^2dt\right\}=\int\frac{\sin t}{t^2}\cdot 3t^2dt=$$

$$=3\int\sin t dt=-3\cos t+C\overset{t=\sqrt[3]{x}}{=}-3\cos\sqrt[3]{x}+C.\blacksquare$$

$$b)\int e^{3\cos x}\sin x dx=\left\{t=3\cos x;\ \Rightarrow dt=-3\sin x dx;\ \Rightarrow \sin x dx=-\frac{1}{3}dt\right\}=$$

$$=-\frac{1}{3}\int e^t dt=-\frac{1}{3}e^t+C\overset{t=\cos x}{=}-\frac{1}{3}e^{3\cos x}+C.\blacksquare$$

$$c)\int\frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx=\left\{t=e^{2x};\ \Rightarrow dt=2e^{2x}dx;\ \Rightarrow e^{2x}dx=\frac{1}{2}dt\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{1}{2}arctgt+C\overset{t=e^{2x}}{=}\frac{1}{2}arctge^{2x}+C.\blacksquare$$

3. Вычислить интегралы:

$$a)\int\frac{dx}{a^2+x^2},\quad (a\neq 0);\qquad b)\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad (a>0).$$

Решение.

$$a)\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\left\{t=\frac{x}{a};\ \Rightarrow dt=\frac{1}{a}dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{a}\int\frac{\frac{1}{a}dx}{\left(1+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)}\overset{(1.11)}{=}\frac{1}{a}arctgt+C=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.\blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

В результате имеем формулу

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\,\frac{x}{a}+C\,. \tag{1.17}$$

$$b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right)}}=\int \frac{dx}{a\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\left\{t=\frac{x}{a};\ \Rightarrow dt=\frac{1}{a}dx\right\}=$$

$$=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\overset{(1.12)}{=}\arcsin t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C\,.\blacksquare$$

В результате имеем формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C\,. \tag{1.18}$$

Примеры.

Вычислить интегралы:

$$a)\ \int \frac{dx}{7+x^2};\qquad b)\ \int \frac{dx}{8+5x^2};\qquad c)\ \int \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx;$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{10-x^2}};\qquad e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}};\qquad f)\ \int \frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx\,.$$

Решение.

$$a)\ \int \frac{dx}{7+x^2}=\int \frac{dx}{\left(\sqrt{7}\right)^2+x^2}\overset{(1.17)}{=}\frac{1}{\sqrt{7}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{7}}+C\,.\blacksquare$$

$$b)\ \int \frac{dx}{8+5x^2}=\int \frac{dx}{5\left(\frac{8}{5}+x^2\right)}=\frac{1}{5}\int \frac{dx}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2+x^2}\overset{(1.17)}{=}\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}arctg\,\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}x+C=$$

$$=\frac{\sqrt{10}}{20}arctg\,\frac{\sqrt{10}}{4}x+C\,.\blacksquare$$

$$c)\ \int \frac{\cos x}{5+\sin^2 x}dx=\{t=\sin x;\ \Rightarrow dt=\cos x dx\}=\int \frac{dt}{5+t^2}=\int \frac{dx}{\left(\sqrt{5}\right)^2+x^2}\overset{(1.17)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C\,.\blacksquare$$

$$d)\ \int \frac{dx}{\sqrt{10-x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2-x^2}}\overset{(1.18)}{=}\arcsin\frac{x}{\sqrt{10}}+C\,.\blacksquare$$

$$e)\ \int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}}=\int \frac{dx}{\sqrt{49\left(\frac{36}{49}-x^2\right)}}=\frac{1}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2-x^2}}\overset{(1.18)}{=}\frac{1}{7}\arcsin\frac{7x}{6}+C\,.\blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$f)\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{3-\cos^4 x}}dx==\left\{t=\cos^2 x;\ \Rightarrow dt=-2\cos x\sin x dx;\ \Rightarrow -dt=\sin 2x dx\right\}=$$

$$=-\int\frac{dt}{\sqrt{3-t^2}}=-\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}}+C=-\arcsin\frac{\cos^2 x}{\sqrt{3}}+C.\blacksquare$$

Рассмотрим вопрос вычисления интеграла вида $\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\{t=f(x);\ \Rightarrow dt=f'(x)dx\}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|f(x)|+C.$$

Получаем следующую формулу

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C. \qquad (1.19)$$

Примеры.

Вычислить интегралы:

$a)\int\frac{x}{x^2-1}dx$; $\qquad b)\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx$;

$c)\int\frac{x^2}{4+3x^3}dx$; $\qquad d)\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$.

Решение.

$$a)\int\frac{x}{x^2-1}dx=\left\{f(x)=x^2-1;\ \Rightarrow f'(x)=2x\right\}=\frac{1}{2}\int\frac{2xdx}{x^2-1}\overset{(1.19)}{=}\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C.\blacksquare$$

$$b)\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx=\left\{f(x)=x^2-4x+8;\ \Rightarrow f'(x)=2x-4\right\}\overset{(1.19)}{=}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+C.\blacksquare$$

$$c)\int\frac{x^2}{4+3x^3}dx=\left\{f(x)=4+3x^3;\Rightarrow f'(x)=9x^2\right\}\overset{(1.19)}{=}\frac{1}{9}\ln\left|4+3x^3\right|+C.\blacksquare$$

$$d)\int\frac{\sin x}{1+\cos x}dx=\{f(x)=1+\cos x;\Rightarrow f'(x)=\sin x\}\overset{(1.19)}{=}\ln|1+\cos x|+C.\blacksquare$$

Дополним таблицу основных интегралов следующими формулами:

$$\int\frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C, \qquad (1.20)$$

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2+\lambda}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2+\lambda}\right|+C,\ \text{где}\quad \lambda-const, \qquad (1.21)$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C, \tag{1.22}$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C, \tag{1.23}$$

$$\int tgu du = -\ln|\cos u| + C, \tag{1.24}$$

$$\int ctgu du = \ln|\sin u| + C, \tag{1.25}$$

Примеры.

Вычислить интегралы:

$a)\ \int \frac{1}{x^2-4}dx$; $\qquad b)\ \int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx$;

$c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}dx$; $\qquad d)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}dx$.

Решение.

$$a)\ \int \frac{1}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x^2-2^2}dx \overset{(1.20)}{=} \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C. \blacksquare$$

$$b)\ \int \frac{e^{2x}}{e^{4x}-5}dx = \left\{t = e^{2x};\ \Rightarrow dt = 2e^{2x}dx;\ \Rightarrow e^{2x}dx = \frac{1}{2}dt\right\} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2-5} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{5}}{t+\sqrt{5}}\right| + C = \frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\left|\frac{e^{2x}-\sqrt{5}}{e^{2x}+\sqrt{5}}\right| + C. \blacksquare$$

$$c)\ \int \frac{1}{\sqrt{x^2-3}}dx \overset{(1.21)}{=} \ln\left|x+\sqrt{x^2-3}\right| + C. \blacksquare$$

$$d)\ \int \frac{\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sin 2\sqrt{x}}dx = \left\{t=\sqrt{x};\ \Rightarrow x = t^2; \Rightarrow dx = 2tdt\right\} = \int\frac{(\sin t+\cos t)\cdot 2t}{t\sin 2t}dt =$$

$$= \int\frac{(\sin t+\cos t)\cdot 2}{2\sin t\cos t}dt = \int\frac{\sin t+\cos t}{\sin t\cos t}dt = \int\left(\frac{1}{\cos t}+\frac{1}{\sin t}\right)dt = \int\frac{dt}{\cos t}+\int\frac{dt}{\sin t} \overset{(1.22)-(1.23)}{=}$$

$$= \ln\left|tg\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left|tg\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|tg\left(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + \ln\left|tg\frac{\sqrt{x}}{2}\right| + C. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int (5x+4)^4 dx$. 2. $\int \sqrt{1-x}dx$. 3. $\int \sqrt{4x^2+8x}(2x+2)dx$.

4. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$. 5. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$. 6. $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

7. $\int \frac{dx}{5+16x^2}$. 8. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$. 9. $\int \frac{e^x}{5+e^x}dx$.

10. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$. 11. $\int \frac{1}{5-x^2}dx.$ 12. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+17}}dx.$

Ответы.

1. $\frac{1}{25}(5x+4)^5+C$. 2. $-\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$.

3. $\frac{1}{6}\left(4x^2+8x\right)\sqrt{4x^2+8x}+C$. 4. $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C$.

5. $-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4}+C$. 6. $\frac{1}{4}\arcsin^4 x+C$.

7. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\,arctg\,\frac{4x}{\sqrt{5}}+C$. 8. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}x+C$.

9. $\ln\left(1+e^x\right)+C.$ 10. $\ln|\ln x|+C.$

11. $\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}}\right|+C.$ 12. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+17}\right|+C.$

1.3. Интегрирование по частям

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции. Тогда $d(uv)=udv+vdu$.

Интегрируя обе части выражения, получим

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu,$$

или, учитывая, что $\int d(uv)=uv$, получим *формулу интегрирования по частям*

$$\int udv=uv-\int vdu. \tag{1.26}$$

Формулу интегрирования по частям обычно применяют при вычислении интегралов вида: $\int P_n(x)\sin xdx$, $\int P_n(x)\cos xdx$, $\int P_n(x)e^x dx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)arctgxdx$, $\int P_n(x)arcctgdx$, $\int P_n(x)\ln axdx$, где $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ – многочлен степени n.

При интегрировании по частям в подынтегральном выражении одну из функций принимают за функцию u, а за dv принимается все, что остается под знаком интеграла. При правильном выборе после

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

интегрирования по частям $\int v\,du$ должен оказаться проще первоначального.

П р и м е р ы.

1. Вычислить интегралы:

$a)\ \int x\cdot e^{x}dx$; $\quad b)\ \int \ln x\,dx$; $\quad c)\ \int (5-x)\cos 2x\,dx$;

$d)\ \int \arcsin x\,dx$; $\quad e)\ \int arctgx\,dx$.

Р е ш е н и е.

$$a)\ \int x\cdot e^{x}dx=\left\{\begin{matrix} u=x;\Rightarrow du=(x)'dx;\ du=dx \\ dv=e^{x}dx;\Rightarrow v=\int e^{x}dx=e^{x}\end{matrix}\right\}\overset{(1.26)}{=}$$

$$=xe^{x}-\int e^{x}dx=xe^{x}-e^{x}+C.\blacksquare$$

$$b)\ \int \ln x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x;\Rightarrow du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx;\ \Rightarrow v=x\end{matrix}\right\}\overset{(1.26)}{=}x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-\int dx=$$

$$=x\ln x-x+C=x(\ln x-1)+C.\blacksquare$$

$$c)\ \int (5-x)\cdot\cos 2x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=5-x;\ \Rightarrow du=-dx \\ dv=\cos 2x\,dx;\ \Rightarrow v=\int\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\end{matrix}\right\}\overset{(1.26)}{=}$$

$$=(5-x)\cdot\frac{1}{2}\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x(-dx)=\frac{5-x}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\int\sin 2x\,dx=$$

$$=\frac{5-x}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.\blacksquare$$

$$d)\ \int\arcsin x\,dx=\left\{\begin{matrix} u=\arcsin x;\ \Rightarrow du=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx \\ dv=dx;\ \Rightarrow v=x\end{matrix}\right\}\overset{(1.26)}{=}x\arcsin x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=$$

$$=x\arcsin x+\sqrt{1-x^{2}}+C.\blacksquare$$

$$e)\ \int arctgx\,dx=\left\{\begin{matrix} u=arctgx;\ \Rightarrow du=\frac{1}{1+x^{2}}dx \\ dv=dx;\ \Rightarrow v=x\end{matrix}\right\}\overset{(1.26)}{=}x\,arctgx-\int\frac{x}{1+x^{2}}dx\overset{(1.19)}{=}$$

$$=x\,arctgx-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^{2}\right)+C.\blacksquare$$

2. Вычислить интегралы:

$a)\ \int x^{2}e^{x}dx$; $\quad b)\ \int(\ln x)^{2}dx$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Р е ш е н и е.

$$a)\ \int x^2 e^x dx = \begin{cases} u = x^2; \Rightarrow du = 2xdx \\ dv = e^x dx; \Rightarrow v = e^x \end{cases} \overset{(1.26)}{=} x^2 e^x - 2\int x e^x dx =$$

(Для вычисления интеграла необходимо еще раз применить формулу (1.26). Используя результаты предыдущего примера, получим окончательный результат)

$$= x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x\left(x^2 - 2x + 2\right) + C. ■$$

$$b)\ \int (\ln x)^2 dx = \begin{cases} u = (\ln x)^2; \Rightarrow du = 2\ln x \cdot \dfrac{1}{x} dx \\ dv = dx;\ \Rightarrow v = x \end{cases} \overset{(1.26)}{=} x(\ln x)^2 - 2\int \ln x dx =$$

$$= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C = x\ln x(\ln x - 2) + 2x + C. ■$$

3. Вычислить интеграл: $I = \int e^x \sin x dx$.

Р е ш е н и е.

$$I = \int e^x \sin x dx = \begin{cases} u = e^x; \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx; \Rightarrow v = -\cos x \end{cases} \overset{(1.26)}{=} -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

(Применим еще раз формулу интегрирования по частям).

$$= \begin{cases} u = e^x; \Rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx; \Rightarrow v = \sin x \end{cases} \overset{(1.26)}{=} -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

В результате получаем уравнение относительно неизвестного интеграла I: $I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I$. Из этого уравнения находим

$$2I = -e^x \cos x + e^x \sin x, \text{ т.е. } I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C. ■$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Вычислить интегралы:

1. $\int x \ln x dx$.
2. $\int x^2 arctgx dx$.
3. $\int (x+1) e^x dx$.
4. $\int x^2 \sin x dx$.
5. $\int e^{2x} \cos x dx$.
6. $\int \sin \ln x dx$.

О т в е т ы.

1. $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$.
2. $\dfrac{x^2}{3} arctgx - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{1}{6}\ln\left(x^2 + 1\right) + C$.
3. $xe^x + C$.
4. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$.
5. $\dfrac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C$.
6. $\dfrac{x}{2}(\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1.4. Интегрирование простейших дробей

<u>Определение 1.3.</u> *Простейшими дробями* называются дроби следующего вида:

I. $\dfrac{a}{x+d}$, где a, d - действительные числа;

II. $\dfrac{a}{(x+d)^m}$, где m – целое положительное число;

III. $\dfrac{a}{x^2+px+q}$, где a, p, q - действительные числа, $D = p^2 - 4q < 0$, то есть квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней;

IV. $\dfrac{ax+b}{x^2+px+q}$, где a, b, p, q - действительные числа, $D = p^2 - 4q < 0$;

V. $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$, где n - целое положительное число, $D = p^2 - 4q < 0$. ●

Интегралы от простейших рациональных дробей всегда могут быть приведены к табличным интегралам.

I. $\displaystyle\int \frac{a}{x+d}dx = a\int \frac{dx}{x+d} = a\int \frac{d(x+d)}{x+d} = a \cdot \ln|x+d| + C,$

П р и м е р.

Вычислить интеграл: $\displaystyle\int \frac{2}{x-3}dx$.

Р е ш е н и е.

$$\int \frac{2}{x-3}dx = 2\int \frac{dx}{x-3} = 2\int \frac{d(x-3)}{x-3} = 2 \cdot \ln|x-3| + C. \blacksquare$$

II. $\displaystyle\int \frac{a}{(x+d)^m}dx = a\int (x+d)^{-m}dx = a\int (x+d)^{-m}d(x+d) = a\frac{(x+d)^{-m+1}}{-m+1} + C.$

П р и м е р.

Вычислить интеграл: $\displaystyle\int \frac{1}{(2x+3)^3}dx$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Решение.

Под знаком интеграла простейшая дробь вида II, где $a=1$, $m=3$.

$$\int\frac{1}{(2x+3)^3}dx=\int(2x+3)^{-3}dx=\frac{1}{2}\int(2x+3)^{-3}d(2x+3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{-3+1}}{-3+1}=$$

$$=-\frac{1}{4(2x+3)^2}+C.\blacksquare$$

III. $$\int\frac{a}{x^2+px+q}dx=a\int\frac{1}{x^2+px+q}dx=\left\{x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=\right.$$

$$\left.=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4};\ \Rightarrow x^2+px+q=t^2+h^2, где\ t=x+\frac{p}{2},\ h=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right\}=$$

$$=a\int\frac{dx}{t^2+h^2}=\frac{a}{h}arctg\frac{t}{h}+C=\frac{2a}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int\frac{dx}{x^2+6x+25}$.

Решение.

Так как $a=1$, $p^2-4q=36-4\cdot25<0$, то под знаком интеграла простейшая дробь III и интеграл относится к виду III. В этом случае необходимо выделить полный квадрат в знаменателе дроби и привести интеграл к виду (1.17).

$$\int\frac{dx}{x^2+6x+25}=\left\{x^2+6x+25=x^2+2\cdot3x+3^2-3^2+25=(x+3)^2+16\right\}=$$

$$=\int\frac{dx}{(x+3)^2+16}=\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2+4^2}=\frac{1}{4}arctg\frac{x+3}{4}+C.\blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=$$

(так как $p^2-4q=1-4\cdot\frac{3}{2}<0$, $a=1$, то интеграл относится к виду III и необходимо выделить полный квадрат знаменателя, чтобы в дальнейшем использовать (1.17))

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$=\left\{x^2-x+\frac{3}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{x-\frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.\blacksquare$$

IV. $\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=($где a, b, p, q - действительные числа, $p^2-4q<0)=\left\{\left(x^2+px+q\right)'=2x+p;\quad ax+b=\frac{a}{2}(2x+p)-\frac{ap}{2}+b\right\}=$

$$=\frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Первый из полученных интегралов относится к рассмотренным интегралам вида (1.19), а второй – относится к интегралам вида III. Окончательно получим следующий результат

$$\int\frac{ax+b}{x^2+px+q}dx=\frac{a}{2}\ln\left|x^2+px+q\right|+\frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл: $\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx$.

Р е ш е н и е.

Интеграл относится к виду IV, так как $p^2-4q=16-4\cdot8<0$, $a=3,\ b=-1.$ При решении следует найти производную знаменателя, выделить эту производную в числителе и представить дробь в виде суммы дробей, проинтегрировать каждую из которых не представляет труда.

$$\int\frac{3x-1}{x^2-4x+8}dx==\left\{\left(x^2-4x+8\right)'=2x-4;\ \Rightarrow 3x-1=\frac{3}{2}(2x-4)+6-1\right\}=$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x-4}{x^2-4x+8}dx+5\int\frac{dx}{x^2-4x+8}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+5\int\frac{dx}{(x-2)^2+2^2}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2-4x+8\right|+\frac{5}{2}arctg\frac{x-2}{2}+C.\blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int\frac{x}{2x^2+2x+5}dx$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Решение.

$$\int \frac{x}{2x^2+2x+5}dx = = \left\{ \left(2x^2+2x+5\right)' = 4x+2;\ \Rightarrow x = \frac{1}{4}(4x+2) - \frac{1}{2} \right\} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{4}(4x+2)-\frac{1}{2}}{2x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+5}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2x^2+2x+5} = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+\frac{5}{2}} = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right) - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right) -$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}arctg\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + C = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+2x+5\right) - -\frac{1}{6}arctg\,\frac{2x+1}{3} + C. \blacksquare$$

Вычисление интеграла вида V требует применения сложных рекуррентных формул (см. [2]).

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{5-x}$.   2. $\int \frac{dx}{2x-1}$.   3. $\int \frac{dx}{(x-2)^3}$.   4. $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$.

5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$.   6. $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.   7. $\int \frac{dx}{3x^2-8x+9}$.

8. $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14}dx$.

Ответы.

1. $-\ln|5-x|+C$.   2. $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.   3. $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-2)^2}+C$.

4. $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(2x-1)^3}+C$.   5. $\frac{1}{\sqrt{10}}arctg\,\frac{x+2}{\sqrt{10}}+C$.   6. $\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

7. $\frac{1}{\sqrt{11}}arctg\,\frac{3x-4}{\sqrt{11}}+C$.   8. $\frac{3}{2}\ln\left|x^2+7x+14\right| - \frac{13}{\sqrt{7}}arctg\,\frac{2x+7}{\sqrt{7}}+C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1.5. Интегрирование правильных рациональных дробей

Определение 1.4. *Правильной рациональной дробью* называется дробь вида $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$- многочлен степени n, $Q_m(x)$-многочлен степени m, причем $n<m$.●

Пример.

Дроби $\dfrac{x^2+5x-3}{x^3+3x-1}$, $\dfrac{x}{x^2+2x-1}$ - правильные рациональные дроби, так как степени многочленов в числителе меньше степеней многочленов в знаменателе.■

Пусть многочлен $Q_m(x)$ имеет вид

$$Q_m(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m, \qquad (1.27)$$

где $a_0,a_1,\ldots,a_{m-1},a_m$- действительные числа, являющиеся коэффициентами многочлена.

Если при $x=x_1$ многочлен $Q_m(x)$ обращается в нуль, то есть $Q_m(x_1)=0$, то число x_1 называется *корнем* многочлена.

Многочлен степени m не может иметь больше, чем m различных корней.

Многочлен $Q_m(x)$ всегда можно разложить на линейные или квадратичные множители

$$Q_m(x)=a_0(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_s)^{k_s}\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{l_1}\ldots\left(x^2+p_rx+q_r\right)^{l_r}, \quad (1.28)$$

где $x_1, x_2,\ldots,x_s$, - действительный корни многочлена $Q_m(x)$ кратности $k_1,\ldots,k_s$ многочлена $Q_m(x)$, $\dfrac{p_1^2}{4}-q_1<0,\ldots,\dfrac{p_r^2}{4}-q_r<0$, то есть квадратные трехчлены не имеют действительных корней, причем

$$k_1+..k_s+2l_1+\ldots+2l_r=m.$$

Примеры.

1. Многочлен второй степени $Q_2(x)=x^2-3x+2$ имеет два различных действительных корня $x_1=1$, $x_2=2$ и может быть разложен на множители $Q_2(x)=(x-1)(x-2)$. При этом корни многочлена являются простыми.■

2. Многочлен второй степени $Q_2(x)=x^2-2x+1$ имеет корень $x=1$ и может быть разложен на множители $Q_2(x)=(x-1)^2$. При этом корень многочлена является корнем кратности 2.■

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. Многочлен третьей степени $Q_3(x) = x^3 - 1$ может быть представлен в виде $Q_3(x) = (x-1)(x^2+x+1)$. При этом $x=1$ является простым действительным корнем, а квадратный трехчлен x^2+x+1 действительных корней не имеет, но имеет два комплексно-сопряженных простых корня.■

Известно, что если дробь $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная, несократимая рациональная дробь, а ее знаменатель после разложения на множители имеет вид (1.28), то дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей. В этой сумме каждому множителю вида $(x-x_1)^k$ в знаменателе, где x_1 любой из корней, а $k-$его кратность, соответствует выражение вида

$$\frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-x_1)^k}, \tag{1.29}$$

а каждому множителю $\left(x^2+px+q\right)^r$ знаменателя - выражение вида

$$\frac{B_1x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)} + \frac{B_2x+C_1}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \frac{B_3x+C_3}{\left(x^2+px+q\right)^3} + \ldots + \frac{B_rx+C_r}{\left(x^2+px+q\right)^r}, \tag{1.30}$$

где $A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots, B_r, C_1, C_2, \ldots, C_r$- действительные числа, подлежащие определению.

Теперь на нескольких примерах укажем два наиболее распространенных способа определения коэффициентов, стоящих в числителях тех простейших дробей, на которые разлагается данная рациональная дробь. Это метод неопределенных коэффициентов и способ задания частных решений.

Примеры.

1. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\dfrac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}$.

Решение.

Общий вид разложения рациональной дроби на простейшие имеет вид

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3} + \frac{D}{x-4}.$$

Здесь $A, B, C, D-$неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Способ 1. Для определения значений A, B, C, D применим метод неопределенных коэффициентов. Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^2+2x-4=A(x-2)(x+3)(x-4)+B(x-1)(x+3)(x-4)+C(x-1)(x-2)(x-4)+$$
$$+D(x-1)(x-2)(x+3). \qquad (1.31)$$

Левая часть равенства (1.31) должна быть тождественно равна правой, то есть равенство должно выполняться при любом значении x. Это будет иметь место, только в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях (1.31) будут между собою равны. Произведем умножение двучленов в правой части, получим

$$x^2+2x-4=A(x^3-3x^2-10x+24)+B(x^3-2x^2-11x+12)+$$
$$+C(x^3-7x^2+14x-8)+D(x^3-7x+6).$$

Если в правой части раскрыть скобки и привести подобные члены, то

$$x^2+2x-4=(A+B+C+D)x^3+(-3A-2B-7C)x^2+(-10A-11B+14C-7D)x+$$
$$+(24A+12B-8C+6D).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему четырех линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{array}{c|c} x^3 & \\ x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array} \quad \begin{cases} A+B+C+D=0, \\ -3A-2B-7C=1, \\ -10A-11B+14C-7D=2, \\ 24A+12B-8C+6D=-4. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим значения неопределенных коэффициентов:

$$A=-\frac{1}{12}; \quad B=-\frac{2}{5}; \quad C=\frac{1}{140}; \quad D=\frac{10}{21}.$$

Способ 2. Определим теперь числа A, B, C, D вторым способом – способом задания частных решений.

Так как равенство (1.31) – тождество, то оно должно сохраняться при любом значении x. Будем присваивать x такие значения, чтобы члены правой части обращались в нуль. Такими значениями, очевидно, являются: $x=1$; $x=2$; $x=-3$; $x=4$.

При $x=1$

$$1^2+2\cdot1-4=A(1-2)(1+3)(1-4)+B\cdot0+C\cdot0+D\cdot0; \Rightarrow -1=12A; \Rightarrow A=-\frac{1}{12}.$$

При $x=2$

$$4=A\cdot0+B(2-1)(2+3)(2-4)+C\cdot0+D\cdot0; \Rightarrow 4=-10B; \Rightarrow B=-\frac{2}{5}.$$

При $x=-3$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$-1=A\cdot 0+B\cdot 0+C(-3-1)(-3-2)(-3-4)+D\cdot 0;\ \Rightarrow -1=-140C;\ \Rightarrow C=\frac{1}{140}.$$

При $x=4$

$$20=A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D(4-1)(4-2)(4+3);\ \Rightarrow 20=42D;\ \Rightarrow D=\frac{10}{21}.$$

Заметим, что каким бы способом ни вычислялись неизвестные коэффициенты, мы всегда получим для них одни и те же значения, так как разложение рациональной дроби на простейшие может быть осуществлено единственным образом.

Таким образом, разложение заданной дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{x^2+2x-4}{(x-1)(x-2)(x+3)(x-4)}=-\frac{1}{12(x-1)}-\frac{2}{5(x-2)}+\frac{1}{140(x+3)}+\frac{10}{21(x-4)}.\blacksquare$$

2. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}$.

Решение.

Общий вид разложения рациональной дроби на простейшие в соответствие с (1.29) имеет вид

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}.$$

Здесь $A,B,C-$неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$x^2+1=A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2. \qquad (1.32)$$

Для определения неизвестных коэффициентов A,B,C применим второй способ – способ задания частных решений в сочетании с методом неопределенных коэффициентов.

При $x=1$

$$2=A\cdot 0+B(1+3)+C\cdot 0;\ \Rightarrow 2=4B;\ \Rightarrow B=\frac{1}{2}.$$

При $x=-3$

$$10=A\cdot 0+B\cdot 0+C(-3-1)^2;\ \Rightarrow 10=16C;\ \Rightarrow C=\frac{5}{8}.$$

Для получения значения A сравним коэффициенты при x^2 в левой и правой частях тождества (1.32):

$$1=A+C;\ \Rightarrow 1=A+\frac{5}{8};\ \Rightarrow A=\frac{3}{8}.$$

Окончательно разложение заданной дроби на простейшие примет вид

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{3}{8(x-1)}+\frac{1}{2(x-1)^2}+\frac{5}{8(x+3)}.\blacksquare$$

3. Разложить на простейшие дроби рациональную дробь $\dfrac{1}{x(x^2+x+1)}$.

Решение.

Общий вид разложения рациональной дроби на простейшие в соответствие с (1.29)-(1.30) имеет вид

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Здесь $A, B, C-$неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Для определения значений A, B, C применим метод неопределенных коэффициентов. Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$1=A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)x.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array} \quad \begin{cases} A+B=0, \\ A+C=0, \\ A=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим значения неопределенных коэффициентов:

$$A=1;\quad B=-1;\quad C=-1.$$

Таким образом, разложение заданной дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{1}{x(x^2+x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+x+1}.\blacksquare$$

При интегрировании правильной рациональной дроби следует выполнить следующие действия:

1) убедиться в том, что рациональная дробь – правильная и несократимая;

2) при необходимости разложить многочлен в знаменателе дроби на линейные и квадратичные множители, то есть представить знаменатель в виде (1.28);

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3) разложить правильную рациональную дробь на простейшие дроби;

4) вычислить коэффициенты разложения;

5) заменить под знаком интеграла правильную дробь на сумму простейших дробей;

6) проинтегрировать каждое слагаемое в соответствие с правилами интегрирования простейших дробей.

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Р е ш е н и е.

Дробь под знаком интеграла – правильная, но так как $p^2-4q=9-4\cdot 2>0$, не является простейшей. Значения $x=1,\ x=2$ являются корнями многочлена в знаменателе дроби, тогда $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ и правильная рациональная дробь может быть разложена на простейшие дроби.

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-2)};\quad \Rightarrow 1=A(x-2)+B(x-1).$$

При $x=1$

$1=A(1-2)+B\cdot 0;\ \Rightarrow 1=-A;\ \Rightarrow A=-1.$

При $x=2$

$1=A\cdot 0+B\cdot(2-1);\ \Rightarrow 1=B;\ \Rightarrow A=1.$

Таким образом, $\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{-1}{(x-1)}+\frac{1}{(x-2)}$ и можно переходить к вычислению интеграла.

$$\int \frac{dx}{x^2-3x+2}=\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx=\int \frac{-1}{(x-1)}dx+\int \frac{dx}{(x-2)}==-\ln|x-1|+\ln|x-2|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x^3-8}$.

Р е ш е н и е.

Дробь под знаком интеграла – правильная рациональная дробь. Разложим многочлен в знаменателе на простые и квадратичные множители с использование формулы сокращенного умножения:

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4).$$

Правильная рациональная дробь может быть разложена на простейшие дроби.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\frac{1}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{Bx+C}{\left(x^2+2x+4\right)};$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, получим

$$1=A\left(x^2+2x+4\right)+(Bx+C)(x-2);$$

или

$$1=(A+B)x^2+(2A-2B+C)x+4A-2C.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях последнего равенства, получаем систему трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\quad \begin{cases} A+B=0, \\ 2A-2B+C=0, \\ 4A-2C=1. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим значения неопределенных коэффициентов:

$$A=\frac{1}{12};\quad B=-\frac{1}{12};\quad C=-\frac{1}{3}.$$

Таким образом, разложение заданной дроби на простейшие будет иметь вид

$$\frac{1}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}=\frac{1}{12}\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{12}\frac{x+4}{\left(x^2+2x+4\right)}.$$

Учитывая полученный результат, вычислим исходный интеграл.

$$\int\frac{dx}{x^3-8}=\int\frac{1}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)}dx=$$

$$=\frac{1}{12}\int\frac{1}{(x-2)}dx-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{\left(x^2+2x+4\right)}dx=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\int\frac{x+4}{\left(x^2+2x+4\right)}dx=$$

$$=\left\{\left(x^2+2x+4\right)'=2x+2\Rightarrow x+4=\frac{1}{2}(2x+2)-1+4\Rightarrow x+4=\frac{1}{2}(2x+2)+3\right\}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{2}\int\frac{(2x+2)}{\left(x^2+2x+4\right)}dx-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+4\right)}=\left\{x^2+2x+4=(x+1)^2+3\right\}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right)-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln\left(x^2+2x+4\right)-\frac{1}{4\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C=$$

$$=\frac{1}{24}\ln\frac{(x-2)^2}{\left(x^2+2x+4\right)}-\frac{\sqrt{3}}{12}\,arctg\,\frac{\sqrt{3}(x+1)}{3}+C.\blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x+2}{x(x-3)}dx.$ 2. $\int \frac{2x^2+x+3}{(x+2)(x^2+x+1)}dx.$

3. $\int \frac{5x^3-17x^2+18x-5}{(x-1)^3(x-2)}dx.$ 4. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx.$

5. $\int \frac{xdx}{1+x^3}.$ 6. $\int \frac{x^3+x+1}{x^4-81}dx.$

Ответы.

1. $-\frac{2}{3}\ln|x|+\frac{5}{3}\ln|x-3|+C.$
2. $-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+3\ln|x+2|+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$
3. $\frac{1}{2(x-2)^2}+2\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C.$
4. $\ln\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}+C.$
5. $-\frac{1}{6}\ln\frac{(1+x)^2}{(x^2-x+1)}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$
6. $\frac{31}{108}\ln|x-3|+\frac{29}{108}\ln|x+3|+\frac{2}{9}\ln|x^2+9|-\frac{1}{54}arctg\,\frac{x}{3}+C.$

1.6. Интегрирование неправильных рациональных дробей

Определение 1.5. *Неправильной рациональной дробью* называют дробь вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$-многочлен степени n, $Q_m(x)$-многочлен степени m, причем $n \ge m$.●

Пример.

Дроби $\frac{x^3+5x^2+x-3}{x^3+3x-1}$, $\frac{x^4}{x^2+2x-1}$ - неправильные рациональные дроби, так как степени многочленов в числителе либо равны, либо больше степеней многочленов в знаменателе.■

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Неправильную рациональную дробь путем деления числителя на знаменатель, или с использованием схемы Горнера, всегда можно представить в виде

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, \qquad (1.33)$$

где $S_{n-m}(x)$-многочлен степени $n-m$, являющийся целой частью неправильной дроби, $\dfrac{R(x)}{Q_m(x)}$-правильная рациональная дробь.

При интегрировании неправильной рациональной дроби необходимо прежде выделить из нее целую часть, то есть представить в виде (1.33). Тогда интегрирование неправильной рациональной дроби сведется к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби.

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$.

Решение.

Дробь под знаком интеграла – неправильная. Путем деления ее числителя на знаменатель выделим целую часть.

$$\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2} = x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx = = \int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx = \int xdx + 3\int dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}dx =$$

$$= \int\left(x+3+\frac{3x+1}{x^2+2}\right)dx = \int xdx + 3\int dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{3x+1}{x^2+2}dx =$$

Интеграл $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+2}dx$ является интегралом от простейшей дроби вида IV, так как $p^2-4q = 0-4\cdot 2 < 0$, $a=3$, $b=1$. При его вычислении следует найти производную знаменателя, выделить эту производную в числителе и представить дробь в виде суммы дробей:

$$= \left\{ \left(x^2+2\right)' = 2x;\ 3x+1 = \frac{3}{2}\cdot 2x+1 \right\} = \frac{x^2}{2} + 3x + \int \frac{\frac{3}{2}\cdot 2x+1}{x^2+2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}dx + \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg\, \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2. Вычислить интеграл: $\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx$.

Решение.

Дробь под знаком интеграла – неправильная. Путем деления ее числителя на знаменатель выделим целую часть.

$$\frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}=x+6-\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}.$$

Тогда

$$\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx==\int\left(x+6-\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}\right)dx=$$

$$=\int xdx+6\int dx-\int\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}dx=\frac{x^2}{2}+6x-\int\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}dx. \qquad (1.34)$$

Рассмотрим $I=\int\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}dx$. Дробь под знаком интеграла – правильная рациональная дробь. Разложим многочлен в знаменателе на простые и квадратичные множители:

$$x^3-x^2+5x-5=x^2(x-1)+5(x-1)=(x-1)(x^2+5).$$

С учетом полученного представления знаменателя дроби, правильная рациональная дробь может быть разложена на простейшие дроби.

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)(x^2+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}.$$

Здесь $A,B,C-$неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Умножим обе части этого равенства на знаменатель левой части:

$$6x^2+25x-35=A(x^2+5)+(Bx+C)(x-1).$$

Для определения значений $A,\ B,\ C$ применим сначала способ задания частных решений.

Пусть $x=1$

$$6\cdot1^2+25\cdot1-35=A(1^2+5);\ \Rightarrow -4=6A;\ \Rightarrow A=-\frac{2}{3}.$$

Теперь сравним коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \begin{cases} A+B=6, \\ 5A-C=-35. \end{cases} \\ x^0 & \end{array}.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Но так как $A=-\frac{2}{3}$, то из первого уравнения $B=\frac{20}{3}$, а из второго уравнения системы $C=\frac{95}{3}$.

Таким образом, дробь можно представить в виде:

$$\frac{6x^2+25x-35}{(x-1)\left(x^2+5\right)}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}.$$

Учитывая полученный результат, можно перейти к вычислению интеграла I.

$$I=\int\frac{6x^2+25x-35}{x^3-x^2+5x-5}dx=\int\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{\frac{20}{3}x+\frac{95}{3}}{x^2+5}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{20}{3}\int\frac{x}{x^2+5}dx+\frac{95}{3}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=-\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(x^2+5\right)+$$

$$+\frac{95}{3\sqrt{5}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{3}\ln\frac{\left(x^2+5\right)^{10}}{(x-1)^2}+\frac{95}{3\sqrt{5}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Подставляя полученный результат вычисления интеграла I в (1.34), получим окончательный результат вычисления исходного интеграла:

$$\int\frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5}dx=\frac{x^2}{2}+6x-\frac{1}{3}\ln\frac{\left(x^2+5\right)^{10}}{(x-1)^2}-\frac{95}{3\sqrt{5}}arctg\,\frac{x}{\sqrt{5}}+C.\blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Вычислить интегралы:

1. $\int\frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5}dx$. 2. $\int\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx$. 3. $\int\frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$

О т в е т ы.

1. $\frac{x^2}{2}+7x+\frac{75}{2}\ln|x-5|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C$.
2. $3x+\ln|x|+2arctgx+C$.
3. $x^2-x-\frac{5}{9}\ln|x|+\frac{70}{9}\ln|x-3|+\frac{97}{9}\ln|x+3|+C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1.7. Интегрирование простейших иррациональных функций

I. Интегралы вида: $\int R\left(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}, \ldots\right) dx$,

где $\alpha, \beta, \gamma -$дробные рациональные числа; $R\left(x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}, \ldots\right)-$ рациональная функция аргументов $x^{\alpha}, x^{\beta}, x^{\gamma}$. Это означает, что над этими аргументами производятся только четыре арифметических действия и действие возведения в целую степень, как положительную, так и отрицательную.

Интегралы этого вида приводятся к интегралу от рациональных функций подстановкой

$$x = t^{n}, \quad \Rightarrow dx = nt^{n-1}dt,$$

где $n -$наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ.

Пример.

Вычислить интеграл: $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx$.

Решение.

Представим интеграл в виде $\int \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{2}}} dx$. Под интегралом находится рациональная функция аргументов $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{1}{2}}$, следовательно, интеграл вида I. Наименьшим кратным знаменателей дробей $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$ является число 6. Тогда необходимая подстановка запишется в виде

$$x = t^{6}, \quad \Rightarrow dx = 6t^{5}dt.$$

При этом $x^{\frac{1}{3}} = \left(t^{6}\right)^{\frac{1}{3}} = t^{2}, \quad x^{\frac{2}{3}} = \left(t^{6}\right)^{\frac{2}{3}} = t^{4}, \quad x^{\frac{1}{2}} = \left(t^{6}\right)^{\frac{1}{2}} = t^{3}$.

Тогда

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx = \int \frac{t^2}{t^4 - t^3} 6t^5 dt = 6\int \frac{t^7}{t^3(t-1)} = 6\int \frac{t^4}{t-1} \overset{(\textit{выделяем целую часть})}{=}$$

$$= 6\int\left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = 6\left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1|\right) + C \overset{t=\sqrt[6]{x}}{=}$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right) + C. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

II. Интегралы вида: $\int R\left(x, (ax+b)^{\alpha}, (ax+b)^{\beta}, (ax+b)^{\gamma}, \ldots\right)dx$, или

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\gamma}, \ldots \right)dx,$$

где $\alpha, \beta, \gamma -$дробные рациональные числа; $R-$ рациональная функция своих аргументов.

Интегралы этого вида приводятся к интегралу от рациональных функций подстановкой

$$ax+b=t^n, \text{ или } \frac{ax+b}{cx+d}=t^n,$$

где $n-$наименьшее кратное знаменателей дробей α, β, γ.

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{x^2}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}dx$.

Решение.

Представим интеграл в виде $\int \frac{x^2}{(5x+2)^{\frac{3}{2}}}dx$. Интеграл относится к рассматриваемому типу. Сделаем подстановку

$$5x+2=t^2; \Rightarrow 5dx=2tdt; \Rightarrow dx=\frac{2tdt}{5}.$$

$$5x+2=t^2; \Rightarrow x=\frac{t^2-2}{5}.$$

Подставляя эти значения, получаем интеграл от рациональной функции

$$\int \frac{x^2}{(5x+2)^{\frac{3}{2}}}dx = \int \frac{\left(t^2-2\right)^2}{25t^3}\cdot\frac{2tdt}{5} = \frac{2}{125}\int \frac{\left(t^2-2\right)^2}{t^2}dt = \frac{2}{125}\int \frac{t^4-4t^2+4}{t^2}dt =$$

$$= \frac{2}{125}\int\left(t^2-4+\frac{4}{t^2}\right)dt = \frac{2}{125}\left(\frac{t^3}{3}-4t-\frac{4}{t}\right)+C \overset{t=\sqrt{5x+2}}{=}$$

$$= \frac{2}{125}\left(\frac{\left(\sqrt{5x+2}\right)^3}{3}-4\sqrt{5x+2}-\frac{4}{\sqrt{5x+2}}\right)+C =$$

$$= \frac{2}{125}\sqrt{5x+2}\left(\frac{1}{3}(5x+2)-4-\frac{4}{5x+2}\right)+C. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2. Вычислить интеграл: $\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx$.

Решение.

Интеграл относится к рассматриваемому типу. Сделаем подстановку:
$\frac{5-3x}{4+7x}=t^2;\ \Rightarrow (5-3x)=(4+7x)t^2;\ \Rightarrow 5-3x=4t^2+7xt^2;\ \Rightarrow 5-4t^2=x(7t^2+3);$
Отсюда

$$x=\frac{5-4t^2}{7t^2+3};\ \Rightarrow dx=\frac{-8t(7t^2+3)-14t(5-4t^2)}{(7t^2+3)^2}dt;\ \Rightarrow dx=\frac{-94t}{(7t^2+3)^2}dt.$$

Тогда

$$\int \sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}dx=\int t\frac{-94t}{(7t^2+3)^2}dt=-94\int \frac{t^2}{(7t^2+3)^2} \overset{(\textit{интегрируем по частям})}{=}$$

$$=\left\{\begin{aligned}&u=t;\Rightarrow du=dt\\&dv=\frac{t}{(7t^2+3)^2}dt;\Rightarrow v=-\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{7t^2+3}\end{aligned}\right\}\overset{(1.26)}{=}-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{t}{7t^2+3}+\frac{1}{14}\int\frac{dt}{7t^2+3}\right)=$$

$$=-94\left(-\frac{1}{14}\cdot\frac{t}{7t^2+3}+\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{\sqrt{7}t}{\sqrt{3}}\right)+C=$$

$$=\frac{47}{7}\cdot\frac{t}{7t^2+3}+\frac{47\sqrt{21}}{147}arctg\sqrt{\frac{7}{3}}t+C\overset{t=\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}}{=}$$

$$=\frac{\sqrt{(5-3x)(4+7x)}}{7}+\frac{47\sqrt{21}}{147}arctg\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5-3x}{4+7x}}+C.\blacksquare$$

III. Интегралы вида: $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Такие интегралы путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена приводятся к интегралам вида (1.18), (1.21).

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение.

Преобразуем квадратный трехчлен, выделив в нем полный квадрат $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}\overset{(1.21)}{=}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.\blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}}$.

Решение.

Преобразуем знаменатель дроби

$$\sqrt{2x^2+3x+7}=\sqrt{2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+7}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}}\overset{(1.21)}{=}\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|x+\frac{3}{4}+\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{4x+3+4\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}}{4}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\ln\left|4x+3+4\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}}\right|-\ln 4\right\}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|4x+3+2\sqrt{4\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}\right)}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|4x+3+2\sqrt{2\left(2x^2+3x+7\right)}\right|+C.\blacksquare$$

3. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Решение.

Преобразуем знаменатель дроби

$$\sqrt{-3x^2+4x-1}=\sqrt{3\left(-x^2+\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}\right)}=\sqrt{3}\sqrt{-\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right)-\frac{1}{3}}=$$

$$=\sqrt{3}\sqrt{-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{1}{9}}=\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}\overset{(1.18)}{=}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x-\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C.\blacksquare$$

IV. Интегралы вида: $\int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Такие интегралы путем выделения в числителе производной квадратного трехчлена. При этом интеграл можно будет представить в виде суммы двух интегралов: один из них вида III, а второй вида

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = 2\sqrt{f(x)} + C. \qquad (1.35)$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}$.

Решение.

$$\int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \left\{ \left(2x^2+8x+1\right)' = 4x+8; \Rightarrow 5x-3 = \frac{5}{4}(4x+8)-13 \right\} =$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left| x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}} \right| + C. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx$.

Решение.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx = \left\{ \left(-x^2+6x-8\right)' = -2x+6; \Rightarrow 3x+4 = -\frac{3}{2}(-2x+6)+13 \right\} =$$

$$= -\frac{3}{2}\int \frac{-2x+6}{\sqrt{-x^2+6x-8}}dx + 13\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} =$$

$$= -3\sqrt{-x^2+6x-8} + 13\arcsin(x-3) + C. \blacksquare$$

V. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-d)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Такие интегралы с помощью подстановки

$$x - d = \frac{1}{t}$$

приводятся к интегралам вида III.

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Решение.

Сделаем подстановку $x = \frac{1}{t}; \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt$, тогда

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = -\int \frac{\left(\frac{dt}{t^2}\right)}{\left(\frac{1}{t}\right)\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+4}} =$$

$$= -\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right| + C \overset{t=\frac{1}{x}}{=} -\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right| + C =$$

$$= -\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right| + C. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}}$.

Р е ш е н и е.

Сделаем подстановку $x-1=\frac{1}{t}; \Rightarrow x=\frac{1}{t}+1; \quad \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$.

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} = -\int \frac{\left(\frac{1}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{t}\sqrt{-\left(1+\frac{1}{t}\right)^2+2\left(1+\frac{1}{t}\right)+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + C \overset{t=\frac{1}{x-1}}{=} -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x-1}+\sqrt{\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-\frac{1}{4}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)}\right| + C. \blacksquare$$

3. Вычислить интеграл: $\int \frac{3x+2}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx$.

Р е ш е н и е.

Запишем числитель подынтегральной функции в виде $3x+2=3(x+1)-1$.

Тогда

$$\int \frac{(3x+2)dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = \int \frac{3(x+1)-1}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}dx = 3\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+3}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} =$$

К первому интегралу применим формулу (1.21), а во втором интеграле сделаем подстановку $x+1=\frac{1}{t}; \Rightarrow x=\frac{1}{t}-1; \quad \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt$:

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{\left(\frac{1}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}=$$

$$=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+$$

$$+\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C=3\ln\left|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+3}\right|+$$

$$+\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C.\blacksquare$$

VI. Интегралы вида: $\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$,

где $P_n(x)-$многочлен n-ой степени, $a, b, c-$числа.

Такие интегралы находятся с помощью тождества

$$\int\frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (1.36)$$

где $Q_{n-1}(x)-$многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами, $\lambda-$число.

Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ в (1.36) подлежат определению. Способы вычисления интеграла вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ были рассмотрены выше.

Для определения коэффициентов многочлена $Q_{n-1}(x)$ и числа λ следует выполнить действия:

1) продифференцировать обе части (1.36);

2) умножить обе части полученного равенства на $\sqrt{ax^2+bx+c}$;

3) приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства.

Пример.

Вычислить интеграл: $\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx$.

Решение.

На основании формулы (1.36) имеем

$$\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx=\left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{2x^2+5x+7}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Определению подлежат неизвестные коэффициенты A, B, C, λ.

Дифференцируем обе части последнего равенства и, учитывая, что производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, получаем

$$\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}=(2Ax+B)\sqrt{2x^2+5x+7}+\left(Ax^2+Bx+C\right)\frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x+7}}+$$
$$+\lambda\frac{1}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Умножим обе части этого равенства на $2\sqrt{2x^2+5x+7}$:

$$6x^3+10x^2-14x+18=(4Ax+2B)\left(2x^2+5x+7\right)+\left(Ax^2+Bx+C\right)(4x+5)+2\lambda.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях этого равенства, получаем:

$$\begin{array}{c|l} x^3 & \\ x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\quad \begin{cases} 8A+4A=6, \\ 20A+4B+5A=10, \\ 28A+10B+5B+4C=-14, \\ 14B+5C+2\lambda=18. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим значения неопределенных коэффициентов:

$$A=\frac{1}{2};\quad B=-\frac{5}{16};\quad C=-\frac{373}{64};\quad \lambda=\frac{3297}{128}.$$

Таким образом,

$$\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{16}x-\frac{373}{64}\right)\sqrt{2x^2+5x+7}+\frac{3297}{64}\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}.$$

Вычислив интеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+5x+7}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C,$$

получим окончательное решение

$$\int\frac{3x^3+5x^2-7x+9}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx=\frac{1}{64}\left(32x^2-20x-373\right)\sqrt{2x^2+5x+7}+$$
$$+\frac{3297}{128\sqrt{2}}\ln\left|4x+5+2\sqrt{4x^2+10x+14}\right|+C.\blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Вычислить интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}dx$. 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$. 3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2x-3}}{x}dx$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

4. $\int\sqrt{\dfrac{3-4x}{9-5x}}dx$. 5. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x^2+2x+9}}$. 6. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}}$.

7. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$. 8. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{-5x^2+2x+3}}$. 9. $\int\dfrac{(3x-7)dx}{\sqrt{5x^2+8x+1}}$.

10. $\int\dfrac{5x+3}{\sqrt{-x^2+4x+5}}dx$. 11. $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+5}}$. 12. $\int\dfrac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}$.

13. $\int\dfrac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}dx$. 14. $\int\dfrac{x^2-4}{\sqrt{3x^2+6x-5}}dx$.

Ответы.

1. $\ln\dfrac{x}{\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6}+C$. 2. $4\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}+1}+\ln\left|\sqrt[4]{x}+1\right|\right)+C$.

3. $2\sqrt{2x-3}-\dfrac{6}{\sqrt{3}}arctg\dfrac{\sqrt{2x-3}}{\sqrt{3}}+C.$

4. $\dfrac{\sqrt{(3-4x)(9-5x)}}{7}+\dfrac{21}{20\sqrt{5}}\ln\left|51-40x+4\sqrt{5(3-4x)(9-5x)}\right|+C$.

5. $\ln\left|2x+2+\sqrt{x^2+2x+9}\right|+C$.

6. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|14x+5+2\sqrt{7\left(7x^2+5x+4\right)}\right|+C$.

7. $\arcsin\dfrac{(2x-3)}{\sqrt{29}}+C$. 8. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\dfrac{(5x-1)}{4}+C$.

9. $\dfrac{3}{5}\sqrt{5x^2+8x+1}-\dfrac{47}{5\sqrt{5}}\ln\left|10x+8+2\sqrt{5\left(5x^2+8x+1\right)}\right|+C$.

10. $-5\sqrt{-x^2+4x+5}+13\arcsin\dfrac{(x-3)}{3}+C$.

11. $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{x^2+5}}{x}\right|+C$. 12. $\sqrt{\dfrac{x}{x+2}}+C$.

13. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\sqrt{2}\ln\left|\dfrac{1-x+2\sqrt{2\left(x^2+1\right)}}{2(x+1)}\right|+C$.

14. $\dfrac{1}{6}(x-3)\sqrt{3x^2+6x-5}+\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\ln\left|3x+3+\sqrt{3\left(3x^2+6x-5\right)}\right|+C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1.8. Интегрирование дифференциальных биномов

Определение 1.6. *Дифференциальным биномом* называют выражение вида $x^m\left(a+bx^n\right)^p$, где m, n, p - любые рациональные числа (не все целые), a, b -любые, не равные нулю, постоянные.●

Рассмотрим вопрос вычисления интеграла от дифференциального бинома вида

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx. \qquad (1.37)$$

Интеграл (1.37) может быть приведен к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трех случаях (теорема Чебышева):

1) $p-$ любое целое число. В этом случае применяется подстановка $x=t^s$, где $s-$ наименьшее общее кратное знаменателей дробей m, n;

2) $\dfrac{m+1}{n}-$ целое число. В этом случае применяется подстановка $a+bx^n=t^s$, где $s-$знаменатель дроби p;

3) $\dfrac{m+1}{n}+p-$ целое число. В этом случае применяется подстановка $ax^{-n}+b=t^s$, где $s-$знаменатель дроби p.

Других случаев интегрируемости дифференциальных биномов, кроме перечисленных, нет.

Если $n=1$, то эти случаи эквивалентны следующим:
1) $p-$ целое число; 2) $m-$ целое число; 3) $m+p-$ целое число.

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл: $\int\dfrac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Р е ш е н и е.

Перепишем подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Здесь $m=-\dfrac{1}{2},\ n=\dfrac{1}{4},\ p=\dfrac{1}{3},\ \dfrac{m+1}{n}=2-$ целое и мы имеем второй случай интегрируемости. Подстановка в этом случае запишется так:

$$1+x^{\frac{1}{4}}=t^3;\ \Rightarrow t=\left(\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$x^{\frac{1}{4}}=t^3-1;\ \Rightarrow x=\left(t^3-1\right)^4;\quad \Rightarrow dx=4\left(t^3-1\right)^3 3t^2dt=12\left(t^3-1\right)^3 t^2dt.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$x^{-\frac{1}{2}}=\left(t^3-1\right)^{-2}.$$

Поэтому

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx=\int\frac{1}{\left(t^3-1\right)^2}\cdot t\cdot 12\left(t^3-1\right)^3t^2dt=12\int\left(t^6-t^3\right)dt=$$

$$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=12t^4\left(\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+C\overset{t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{=}12\left(1+\sqrt[4]{x}\right)\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+C.\blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

Решение.

Перепишем подынтегральную функцию в виде:

$$\frac{1}{x^4\sqrt{1+x^2}}=x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Здесь $m=-4,\ n=2,\ p=-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{m+1}{n}+p=-2$ – целое и мы имеем третий случай интегрируемости. Подстановка в этом случае запишется так

$$x^{-2}+1=t^2;\ \Rightarrow -2x^{-3}dx=2tdt;\ \Rightarrow x^{-3}dx=tdt.$$

Преобразуем исходный интеграл и сделаем подстановку.

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-4}\left(x^2\left(x^{-2}+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx=$$

$$=\int x^{-4}\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-4}\left(x^2\left(x^{-2}+1\right)\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\int x^{-2}\left(x^{-2}+1\right)^{-\frac{1}{2}}x^{-3}dx=$$

$$=-\int\left(t^2-1\right)t^{-1}tdt=-\int\left(t^2-1\right)dt=t-\frac{t^3}{3}+C=\sqrt{x^{-2}+1}-\frac{\sqrt{\left(x^{-2}+1\right)^3}}{3}+C=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}{3x^2}+C=\frac{\left(2x^2-1\right)\sqrt{1+x^2}}{3x^2}+C.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$. 2. $\displaystyle\int\frac{x^4dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. 3. $\displaystyle\int x^3\cdot\sqrt[3]{5+x^2}dx$.

Ответы.

1. $\displaystyle\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8}+\frac{4}{9\left(\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9\right)}+C$. 2. $\displaystyle\frac{x\left(3-x^2\right)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

3. $\displaystyle\frac{3}{56}\left(5+x^2\right)\left(4x^2-15\right)\sqrt[3]{5+x^2}+C.$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

1.9. Интегрирование тригонометрических функций

I. Интегралы вида: $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$, где $m,\ n$ – действительные числа.

Интегралы этого вида вычисляются с использованием известных тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right); \qquad (1.38)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right); \qquad (1.39)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right). \qquad (1.40)$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл: $\int \cos 3x \cos 9x dx$.

Р е ш е н и е.

Заменяя подынтегральную функцию по формуле (1.38), получим

$$\int \cos 3x \cos 9x dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin(-x)+\sin 13x\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(-\sin x+\sin 13x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{13}\cos 13x\right)+C. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int \sin 6x \cos 7x dx$.

Р е ш е н и е.

Заменяя подынтегральную функцию по формуле (1.39), получим

$$\int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos(-6x)+\cos 12x\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 6x+\cos 12x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin 6x + \frac{1}{12}\sin 12x\right)+C. \blacksquare$$

3. Вычислить интеграл: $\int \sin 2x \sin 5x dx$.

Р е ш е н и е.

Заменяя подынтегральную функцию по формуле (1.40), получим

$$\int \sin 2x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos(-3x)-\cos 7x\right)dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 3x-\cos 7x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{7}\sin 7x\right)+C. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

II. Интегралы вида: $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где $m, n -$ действительные числа.

Выделим здесь следующие четыре случая, имеющие особенно большое значение:

1) $m -$ нечетное положительное число, то есть $m = 2k+1$. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем следующим образом:

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^{2k+1} x \cos^n x = \left(\sin^2 x\right)^k \sin x \cos^n x = \left(1-\cos^2 x\right)^k \cos^n x \sin x.$$

После этого применяется подстановка

$$t = \cos x; \Rightarrow dt = -\sin x dx,$$

с помощью которой интеграл сводится к интегрированию многочлена.

2) $n -$ нечетное положительное число, то есть $n = 2k+1$. В этом случае подынтегральное выражение преобразовываем следующим образом:

$$\sin^m x \cos^n x = \sin^m x \cos^{2k+1} x = \sin^m x \left(\cos^2 x\right)^k \cos x = \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^k \cos x.$$

После этого применяется подстановка

$$t = \sin x; \Rightarrow dt = \cos dx,$$

с помощью которой интеграл сводится к интегрированию многочлена.

3) $m + n = -2k -$ четное отрицательное число ($k > 0$ и целое).

В этом случае применяется подстановка

$t = tgx$, если в числителе находится синус;

$t = ctgx$, если в числителе находится косинус.

4) $m, n -$ четные неотрицательные числа. Здесь с помощью известных тригонометрических формул

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right); \tag{1.41}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right); \tag{1.42}$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x, \tag{1.43}$$

можно понизить степень подынтегральной функции.

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int \sin^3 x dx$.

Решение.

Здесь $m = 3 -$ нечетное положительное число. Имеем первый случай. Преобразуем подынтегральную функцию к виду:

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = \left(1-\cos^2 x\right)\sin x.$$

Сделаем замену: $t = \cos x; \Rightarrow dt = -\sin x dx$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Тогда

$$\int \sin^3 x dx = -\int \left(1-t^2\right)dt = -t + \frac{t^3}{3} + C \overset{t=\cos x}{=} -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.\blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx$.

Решение.

Здесь $m = 3 -$ нечетное положительное число. Имеем первый случай. Преобразуем подынтегральную функцию к виду:

$$\sin^3 x \cos^{-\frac{4}{3}} = \sin^2 x \sin x \cos^{-\frac{4}{3}} = \left(1-\cos^2 x\right)\cos^{-\frac{4}{3}} \sin x.$$

Сделаем замену

$$t = \cos x; \Rightarrow dt = -\sin x dx.$$

Тогда

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x \cdot \sqrt[3]{\cos x}} dx = -\int \left(1-t^2\right)t^{-\frac{4}{3}} dt = -\int t^{-\frac{4}{3}} dt + \int t^{\frac{2}{3}} dt = 3t^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{5} t^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} +$$

$$+ \frac{3}{5} \cos x \cdot \sqrt[3]{\cos^2 x} + C.\blacksquare$$

3. Вычислить интеграл: $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

Решение.

Здесь $n = 3 -$нечетное положительное число. Имеем второй случай. Преобразуем подынтегральную функцию к виду:

$$\sin^4 x \cos^3 x = \sin^4 x \cos^2 x \cos x = \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)\cos x.$$

Сделаем замену

$$t = \sin x; \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

Тогда

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = \int t^4\left(1-t^2\right)dt = \int \left(t^4 - t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.\blacksquare$$

4. Вычислить интеграл: $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx$.

Решение.

Здесь $m = 4,\ n = 8; \Rightarrow m + n = -4 -$четное отрицательное число. Имеем третий случай. Так как $m > 0$, то удобно применить подстановку

$$t = tgx; \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx; \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

При этом

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Тогда

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx = \int \left(\frac{t^4}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^4}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{\left(1+t^2\right)^8}} \right) \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^4\left(1+t^2\right)^4}{\left(1+t^2\right)^2} \cdot \frac{dt}{\left(1+t^2\right)} =$$

$$= \int \left(t^4 + t^6\right)dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C \overset{t=tgx}{=} \frac{tg^5 x}{5} + \frac{tg^7 x}{7} + C. \blacksquare$$

5. Вычислить интеграл: $\int \cos^4 x dx$.

Решение.

Здесь $m=4,\ n=0$ и имеем четвертый случай. Понизим степень подынтегральной функции с помощью формулы (1.42).

$$\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2 \overset{(1.42)}{=} \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) \overset{(1.42)}{=}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right).$$

Тогда

$$\int \cos^4 x dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\right)+C. \blacksquare$$

6. Вычислить интеграл: $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

Решение.

Здесь $m=2,\ n=2$ – четные положительные числа. Имеем четвертый случай. Понизим степень подынтегральной функции с помощью формул (1.41), (1.43).

$$\sin^2 x\cos^2 x = (\sin x\cos x)^2 \overset{(1.43)}{=} \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x \overset{(1.41)}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x)$$

Тогда

$$\int \sin^2 x\cos^2 x dx = \frac{1}{8}\int(1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + C. \blacksquare$$

7. Вычислить интеграл: $\int \sin^4 x\cos^2 x dx$.

Решение.

Здесь $m=4,\ n=2$ – четные положительные числа. Имеем четвертый случай. Понизим степень подынтегральной функции с помощью формул (1.41), (1.43).

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\sin^4 x\cos^2 x=\sin^2 x\cos^2 x\sin^2 x=(\sin x\cos x)^2\sin^2 x\overset{(1.43)}{=}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2\sin^2 x=$$

$$=\frac{1}{4}\sin^2 2x\cdot\sin^2 x\overset{(1.41)}{=}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{16}(1-\cos 4x-\cos 2x+$$

$$+\cos 4x\cos 2x)\overset{(1.39)}{=}\frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\cos 2x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right)=$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right).$$

Тогда

$$\int\sin^4 x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{16}\int\left(1-\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 6x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x\right)+C.\blacksquare$$

III. Интегралы вида $\int tg^m x\,dx$, $\int ctg^m x\,dx$, где $m-$действительное число.

В этом случае первый интеграл решается с помощью подстановки

$$t=tgx;\ \Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx;\quad \frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x;\quad \Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2},$$

а второй интеграл решается с помощью подстановки

$$t=ctgx;\ \Rightarrow dt=-\frac{1}{\sin^2 x}dx;\quad \frac{1}{\sin^2 x}=1+ctg^2 x;\quad \Rightarrow dx=-\frac{dt}{1+t^2}.$$

П р и м е р.

Вычислить интеграл: $\int tg^4 x\,dx$.

Р е ш е н и е.

Интеграл вида III и $m=4$. Применим подстановку

$$t=tgx;\ \Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx;\ \Rightarrow dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int tg^4 x\,dx=\int\frac{t^4}{1+t^2}dt=\int\left(t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)dt=\frac{t^3}{3}-t+arctgt+C=\frac{tg^3 x}{3}-tgx+$$

$$+arctg(tgx)+C=\frac{tg^3 x}{3}-tgx+x+C.\blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

IV. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где $R(\sin x, \cos x)$ – рациональная функция своих аргументов.

Этот интеграл можно вычислить с помощью следующих тригонометрических подстановок:

1) если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\sin x$, то есть $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тогда интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$t = \cos x;$$

2) если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно $\cos x$, то есть $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тогда интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$t = \sin x;$$

3) если $R(\sin x, \cos x)$ – четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тогда интеграл приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки

$$t = tgx;$$

4) в любом случае интеграл этого вида можно вычислить с помощью подстановки

$$t = tg\frac{x}{2}; \ (-\pi < x < \pi). \tag{1.44}$$

Эта подстановка называется *универсальной тригонометрической подстановкой*. При использовании этой подстановки следует воспользоваться известными тригонометрическими формулами

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}.$$

Тогда, учитывая $t = tg\frac{x}{2}; \Rightarrow x = 2arctgt$ и приведенные формулы,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \tag{1.45}$$

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x}$.

Р е ш е н и е.

Интеграл вида IV. Подынтегральная функция нечетная относительно $\sin x$. Применим подстановку

$$t = \cos x; \Rightarrow dt = -\sin x dx.$$

Но $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-t^2}$; $\Rightarrow dt = -\sqrt{1-t^2}dx; \Rightarrow dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Тогда

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{\left(1-t^2\right)^3}t^2} = -\int \frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2 t^2}.$$

В результате получили интеграл от рациональной функции. Если разложить дробь на простейшие, вычислить коэффициенты разложения и вернуться к начальной переменной, то получим результат в следующем виде:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{3}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int \frac{\left(\cos^3 x + \cos^5 x\right)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x}$.

Решение.

Интеграл вида IV. Подынтегральная функция нечетная относительно $\cos x$. Применим подстановку

$$t = \sin x; \Rightarrow dt = \cos x dx.$$

Тогда

$$\int \frac{\left(\cos^3 x + \cos^5 x\right)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{\cos^3 x\left(1+\cos^2 x\right)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \int \frac{\cos^2 x\left(1+\cos^2 x\right)\cos x dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} =.$$

$$= \int \frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)dt}{t^2+t^4}.$$

Под знаком интеграла – рациональная функция. Ее можно представить в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)}{t^2+t^4} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}.$$

Тогда

$$\int \frac{\left(1-t^2\right)\left(2-t^2\right)dt}{t^2+t^4} = \int\left(1+\frac{2}{t^2}-\frac{6}{1+t^2}\right)dt = t - \frac{2}{t} - 6arctgt + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{\left(\cos^3 x + \cos^5 x\right)dx}{\sin^2 x + \sin^4 x} = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6arctg\left(\sin x\right) + C. \blacksquare$$

3. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Решение.

Интеграл вида IV. Подынтегральная функция четная относительно $\sin x$. Применим подстановку

$$t = tgx.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Учитывая, что

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}; \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$t = tgx; \Rightarrow x = arctgt; \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

получим

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{1+\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}t\right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\sqrt{2}tgx\right) + C. \blacksquare$$

4. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Решение.

Интеграл вида IV. Подынтегральная функция не обладает первыми тремя свойствами. Применим универсальную тригонометрическую подстановку $t = tg\frac{x}{2}$.

Тогда

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} \overset{(1.45)}{=} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C \overset{t = tg\frac{x}{2}}{=} -\frac{1}{tg\frac{x}{2} + 2} + C. \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int \cos^5 x dx$.
2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$.
3. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.
4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^9 x} dx$.
5. $\int \sin^4 x dx$.
6. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$
7. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$
8. $\int ctg^6 x dx$.
9. $\int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$.
10. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$.
11. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.
12. $\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x}$.

Ответы.

1. $\sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$.
2. $-\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. $-\left(\frac{\cos^3 x}{3}-\frac{2\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}\right)+C.$

4. $-\frac{ctg^5 x}{5}+C.$

5. $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

6. $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C.$

7. $\frac{1}{16}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{3}\sin^3 2x\right)+C.$

8. $-\frac{ctg^5 x}{5}+\frac{ctg^3 x}{3}-ctgx-x+C.$

9. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{3\cos^2 x}+\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$

10. $\ln|\sin x|-\sin x+C.$

11. $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}tgx\right)+C.$

12. $\frac{1}{5}\ln\left|5tg\frac{x}{2}+3\right|+C.$

1.10. Тригонометрические подстановки

Некоторые интегралы приводятся к интегралам от рациональной функции относительно функций $\sin x$ и $\cos x$ с помощью надлежащей тригонометрической подстановки.

I. Интеграл вида: $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, где $R-$ рациональная функция, $a-$действительное число.

Для вычисления интеграла следует применить подстановку

$$x=a\sin t,\ \text{или}\ \ x=a\cos t.$$

II. Интеграл вида: $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$, где $R-$ рациональная функция, $a-$действительное число.

Для вычисления интеграла следует применить подстановку

$$x=atgt,\ \text{или}\ \ x=actgt.$$

III. Интеграл вида: $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$, где $R-$ рациональная функция, $a-$действительное число.

Для вычисления интеграла следует применить подстановку

$$x=\frac{a}{\cos t}=a\sec x,\ \text{или}\ \ x=\frac{a}{\sin t}=a\operatorname{cosec}x.$$

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int\frac{dx}{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}$.

Решение.

Интеграл вида I, где $a=\sqrt{2}$. Для вычисления интеграла применим подстановку:

$$x=\sqrt{2}\sin t;\ \Rightarrow dx=\sqrt{2}\cos t.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Тогда

$$2-x^2=2\cos^2 t; \Rightarrow \sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\cos t.$$

Подставим полученные выражения в подынтегральную функцию:

$$\int\frac{dx}{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}=\int\frac{\sqrt{2}\cos t}{2\cos^2 t\sqrt{2}\cos t}dt=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\cos^2 t}=\frac{1}{2}tgt+C.$$

Но из подстановки

$$x=\sqrt{2}\sin t; \Rightarrow \sin t=\frac{x}{\sqrt{2}}; \ \Rightarrow tgt=\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}.$$

Поэтому окончательно

$$\int\frac{dx}{\left(2-x^2\right)\sqrt{2-x^2}}=\frac{x}{2\sqrt{2-x^2}}+C. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int\frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{9+x^2}}$.

Р е ш е н и е.

Интеграл вида II, где $a=3$. Для вычисления интеграла применим подстановку:

$$x=3tgt; \Rightarrow dx=\frac{3}{\cos^2 t}dt, \quad \text{или} \quad dx=3\sec^2 t dt, \ .$$

Тогда

$$x^2+9=9tg^2 t+9=9\left(tg^2 t+1\right)=\frac{9}{\cos^2 t}=9\sec^2 t; \Rightarrow \sqrt{x^2+9}=3\sec t.$$

Подставим полученные выражения в подынтегральную функцию:

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{9+x^2}}=\int\frac{3\sec^2 t dt}{9\sec^2 t\cdot 3\sec t}=\frac{1}{9}\int\frac{dt}{\sec t}=\frac{1}{9}\int\cos t dt=\frac{1}{2}\sin t+C.$$

Для того, чтобы вернуться к первоначальной переменной x, найдем $\sin t$ через x.

$$x=3tgt; \Rightarrow tgt=\frac{x}{3};$$

$$\sin t=tgt\cdot\cos t=\frac{tgt}{\sec t}=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}}=\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}}=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}.$$

Поэтому окончательно

$$\int\frac{dx}{\left(x^2+9\right)\sqrt{9+x^2}}=\frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+C. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. Вычислить интеграл: $\int \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}$.

Р е ш е н и е.

Интеграл вида III, где $a=\sqrt{5}$. Для вычисления интеграла применим подстановку:

$$x=\sqrt{5}\sec t; \Rightarrow dx=\sqrt{5}\sec t\cdot tgtdt.$$

Тогда

$$x^2-5=5\sec^2 t-5=5tg^2t; \Rightarrow \sqrt{x^2-5}=\sqrt{5}tgt.$$

Подставим полученные выражения в подынтегральную функцию:

$$\int \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}=\int \frac{\sqrt{5}\sec t\cdot tgt}{5tg^2t\sqrt{5}tgt}dt=\frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{\cos t}}{\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}dt=\frac{1}{5}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt=-\frac{1}{5\sin t}+C.$$

Для того, чтобы вернуться к первоначальной переменной x, найдем $\sin t$ через x.

$$x=\sqrt{5}\sec t; \Rightarrow \cos t=\frac{\sqrt{5}}{x}; \Rightarrow \cos^2 t=\frac{5}{x^2};$$

$$\sin^2 t=1-\frac{5}{x^2}=\frac{x^2-5}{x^2}; \Rightarrow \sin t=\frac{\sqrt{x^2-5}}{x}.$$

Поэтому окончательно

$$\int \frac{dx}{(x^2-5)\sqrt{x^2-5}}=-\frac{x}{5\sqrt{x^2-5}}+C. \blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt{3-x^2}}$.   2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}}$.   3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}dx$.

О т в е т ы.

1. $\frac{x}{5\sqrt{5-x^2}}+C$.   2. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x}\right|+C$.

3. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-2}+x}{\sqrt{2}}\right|+C$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Основные понятия

Пусть_функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$ и составим сумму

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Такая сумма называется *интегральной суммой* для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через μ длину наибольшего частичного отрезка разбиения $\mu = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$.

<u>Определение 2.1.</u> Если существует конечный предел I интегральной суммы σ при $\mu \to 0$ $\left(I = \lim\limits_{\mu \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)$, то этот предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)dx .$$

В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой на* $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования,* $f(x)$ – *подынтегральной функцией,* x – *переменной интегрирования*.●

Для интегрируемости функции достаточно ее непрерывности на отрезке $[a, b]$.

Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

<u>Свойства определенного интеграла</u>

1◦. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2◦. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3◦. Для любых чисел a, b, c, всегда имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

4◦. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, где k - постоянная.

5◦. $\int\limits_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx \pm \int\limits_a^b f_2(x)dx \pm \ldots$

$\pm \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

6◦. Оценка определенного интеграла: если $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) < \int\limits_a^b f(x)dx < M(b-a).$$

7◦. Если $f(x)$ – нечетная функция, то есть $f(-x) = -f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

8◦. Если $f(x)$ – четная функция, то есть $f(-x) = f(x)$, то

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx.$$

2.2. Формула Ньютона-Лейбница

Имеет место формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{2.1}$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Эта формула вычисления определенного интеграла называется *формулой Ньютона-Лейбница*.

Таким образом, вычисление определенного интеграла сводится к нахождению первообразной функции $F(x)$ и применению формулы Ньютона-Лейбница.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Примеры.

Вычислить интегралы:

$a)\ \int_0^{\pi}\sin x dx;\qquad b)\ \int_0^1 e^x dx;\qquad c)\ \int_0^1\frac{dx}{1+x};\qquad d)\ \int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}.$

Решение.

$a)$ Первообразной подынтегральной функции является функция $-\cos x$, так как $(-\cos x)'=\sin x$. Применим формулу (2.1).

$$\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=\cos 0-\cos\pi=1-(-1)=2.\blacksquare$$

$$b)\ \int_0^1 e^x dx\overset{(2.1)}{=}e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1.\blacksquare$$

$$c)\ \int_0^1\frac{dx}{1+x}\overset{(2.1)}{=}\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2.\blacksquare$$

$$d)\ \int_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2}\overset{(2.1)}{=}arctgx\Big|_0^{\sqrt{3}}=arctg\sqrt{3}-arctg\,0=\frac{\pi}{3}.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\cos^2 x}.$ 2. $\int_1^4\frac{dx}{2\sqrt{x}}.$ 3. $\int_1^e\frac{dx}{x}.$ 4. $\int_1^2\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$

5. $\int_0^{0,5}\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx.$ 6. $\int_{-1}^0(3x^2+1)dx.$ 7. $\int_1^8\frac{\theta-\sqrt[3]{\theta}}{\theta}d\theta.$ 8. $\int_2^8\frac{2+x}{x^2}dx.$

Ответы.

1. $1-\frac{\sqrt{3}}{3}.$ 2. 1. 3. 1. 4. $3(\sqrt[3]{2}-1).$

5. $\frac{\pi}{3}.$ 6. 2. 7. 4. 8. $\frac{3}{4}-2\ln 2.$

2.3. Замена переменной в определенном интеграле

При вычислении определенных интегралов $\int_a^b f(x)dx$ можно воспользоваться методами нахождения первообразных, изложенных для неопределенного интеграла, в том числе, методом подстановки.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Заменим независимую переменную x, полагая, что

$$x = \varphi(t). \tag{2.2}$$

Учитывая, что $dx = \varphi'(t)dt$, то интеграл примет вид

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)dt.$$

При этом предполагается, что

1) функция $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$,

2) функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ – непрерывны на $[\alpha, \beta]$,

3) имеют место равенства $a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$,

4) при изменении новой переменной $\alpha \le t \le \beta$, функция $a \le x(t) \le b$, то есть является монотонной на $[\alpha, \beta]$.

Замена переменной в определенном интеграле требует осторожности и обязательного выполнения всех условий, налагаемых на функцию (2.2). При соблюдении этих требований, замена переменной приводит в общем случае к интегралу с новыми пределами интегрирования. Эти пределы находят следующим образом: в (2.2) подставляется сначала нижний предел a заданного интеграла и решается уравнение $a = \varphi(t)$. Значение t, найденное из него, и будет новым нижним пределом α. Если этому уравнению соответствует не одно, а несколько значений t, то за α можно принять любое из них. Затем для определения нового верхнего предела в (2.2) подставляется верхний предел b заданного интеграла и решается уравнение $b = \varphi(t)$. Значение t, найденное из него, и будет новым верхним пределом β. Свобода выбора α и β ограничивается требованием, чтобы значения функции $\varphi(t)$ не выходили из отрезка $[a, b]$.

Сделав замену переменной, изменив пределы интегрирования, после вычисления преобразованного определенного интеграла нет необходимости переходить к старой переменной.

Подстановка (2.2) должна упростить вычисление исходного интеграла.

Во многих случаях приходится вместо подстановки (2.2), которая переменную интегрирования x заменяет функцией новой переменной, вводить новую переменную t как функцию старой переменной x, то есть

$$t = \psi(x). \tag{2.3}$$

В этом случае новые пределы интегрирования $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b)$. Если соотношение (2.3) разрешить относительно x, то окажется, что $x = \varphi(t)$, причем необходимо, чтобы для функции $\varphi(t)$ были соблюдены все указанные выше условия.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

П р и м е р ы.

1. Вычислить интеграл: $\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$.

Р е ш е н и е.

Вычислим данный интеграл с помощью замены переменной. Введем подстановку

$$x = r\sin t. \qquad (2.4)$$

Прежде всего, определим новые пределы интегрирования. Когда $x=0$, из уравнения $0=r\sin t$ получаем, что $t_1 = k\pi$. Подставляя в (2.4) $x=r$, получим:

$$r = r\sin t; \Rightarrow \sin t = 1; \Rightarrow t_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Из всех возможных значений t_1 и t_2, возьмем значения $t_1 = \alpha = 0,\ t_2 = \beta = \frac{\pi}{2},$ потому, что на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ функция $x = r\sin t$, очевидно, удовлетворяет всем трем необходимым условиям и на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ монотонно возрастает. Вместо этих значений можно было бы выбрать любые другие, но такие, чтобы значения функции $x = r\sin t$ не выходили за границы отрезка $[0, r]$. В качестве таких значений можно взять, например, $t_1 = \alpha = 2\pi,\ t_2 = \beta = \frac{5\pi}{2}$, так как при $2\pi \le t \le \frac{5\pi}{2}$ $0 \le x(t) \le r$. Но взять $t_1 = \alpha = \pi,\ t_2 = \beta = \frac{3\pi}{2}$ нельзя, так как тогда функция $x = r\sin t$ принимает значения не на отрезке $[0, r]$, на котором ведется вычисление заданного интеграла, а на отрезке $[0, -r]$.

Тогда

$$\sqrt{r^2-x^2} = \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} = r\cos t;$$

$$dx = r\cos t.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2 t\,dt = r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{r^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int\limits_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$.

Р е ш е н и е.

Вычислим данный интеграл с помощью замены переменной. Введем подстановку вида (2.3)

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$t=\ln x; \Rightarrow dt=\frac{dx}{x}.$$

Тогда если $x=1$, то $t=\ln 1=0$. Если $x=e$, то $t=\ln e=1$. Следовательно,

$$\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}dx=\int_0^1 t^2 dt=\frac{1}{3}t^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(1^3-0^3\right)=\frac{1}{3}.\blacksquare$$

3. Вычислить интеграл: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x}{\left(1-x^2\right)^3}dx$.

Решение.

Вычислим данный интеграл с помощью замены переменной. Введем подстановку вида (2.3)

$$t=1-x^2; \Rightarrow dt=-2xdx; \Rightarrow xdx=-\frac{dt}{2}.$$

Определим новые пределы интегрирования:

при $x=0$, $t=1-x^2=1-0^2=1;$

при $x=\frac{1}{2}$, $t=1-(x)^2=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$

Тогда

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5xdx}{\left(1-x^2\right)^3}=\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{5\left(-\frac{dt}{2}\right)}{t^3}=-\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dt}{t^3}=-\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} t^{-3}dt=-\frac{5}{2}\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right)\Bigg|_1^{\frac{3}{4}}=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{t^2}\right)\Bigg|_1^{\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{5}{4}\left(\frac{16}{9}-1\right)=\frac{35}{36}.\blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int_{-1}^{2} \frac{2xdx}{\left(2x^2+1\right)^3}$.
2. $\int_1^2 \left(x^2-1\right)^3 x\,dx$.
3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$.
4. $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+5}$.
5. $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$.
6. $\int_0^1 e^{x+e^x}dx$.

Ответы.

1. $\frac{1}{9}$.
2. $10\frac{1}{8}$.
3. $0{,}5$.
4. $\ln\frac{e+5}{6}$.
5. $arctge-\frac{\pi}{4}$.
6. e^e-1.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2.4. Интегрирование по частям в определенном интеграле

При вычислении определенных интегралов можно также воспользоваться и формулой интегрирования по частям

$$\int_a^b u\,du = uv|_a^b - \int_a^b v\,du. \qquad (2.5)$$

Формула интегрирования по частям верна при условии, что функции $u(x)$, $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке интегрирования $[a,b]$.

Применение формулы (2.5) мало чем отличается от применения соответствующей формулы для неопределенного интеграла.

Примеры.

1. Вычислить интеграл: $\int_0^1 \arccos x dx$.

Решение.

$$\int_0^1 \arccos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \arccos x; \Rightarrow du = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ dv = dx; \Rightarrow v = x \end{array} \right\} \overset{(2.5)}{=}$$

$$= \arccos x\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = = x\arccos x\Big|_0^1 - \sqrt{1-x^2}\Big|_0^1 = \left(x\arccos x - \sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(1\cdot\arccos 1 - \sqrt{1-1^2}\right) - \left(0\cdot\arccos 0 - \sqrt{1-0^2}\right) = 1. \blacksquare$$

2. Вычислить интеграл: $\int_0^1 x arctgx dx$.

Решение.

$$\int_0^1 x arctgx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = arctgx; \Rightarrow du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx; \Rightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right\} \overset{(2.5)}{=} \frac{x^2}{2}arctgx\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}arctg1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}(x - arctgx)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}arctg1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \blacksquare$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. Вычислить интеграл: $\int_1^2 xe^{2x}dx$.

Решение.

$$\int_1^2 xe^{2x}dx = \left\{\begin{aligned} &u = x; \Rightarrow du = dx \\ &dv = e^{2x}dx; \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}\right\} \overset{(2.5)}{=} x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 e^{2x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2 \cdot e^{2\cdot 2} - 1 \cdot e^2\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(2 \cdot e^4 - e^2\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2\cdot 2} - e^{2\cdot 1}\right) =$$

$$= e^4 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^2 = \frac{3}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^2 = \frac{1}{4}e^2\left(3e^2 - 1\right). \blacksquare$$

Задачи для самостоятельного решения.

Вычислить интегралы:

1. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx$.
2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\, tg^2 x\, dx$.
3. $\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx$.

Ответы.

1. $\frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$.
2. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.
3. $\frac{\pi^2}{4} - 2$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

3. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определенный интеграл вида $\int\limits_a^b f(x)dx$ рассматривался при следующих предположениях: отрезок интегрирования конечен; подынтегральная функция на этом отрезке непрерывна. В том случае, когда отрезок интегрирования бесконечен или конечен, но подынтегральная функция на этом отрезке терпит разрыв, мы имеем дело с *несобственными* интегралами.

3.1. Несобственный интеграл с бесконечными пределами

Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a,+\infty]$. *Несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ определяется равенством

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (3.1)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а функция $f(x)$ в этом случае называется *интегрируемой на бесконечном промежутке* $[a,+\infty]$.

Если же предел бесконечен или не существует, то интеграл называется *расходящимся*.

Аналогично определяется *несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом* $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx$:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (3.2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[-\infty,+\infty]$, то *несобственный интеграл с бесконечным нижним и верхним пределами* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ определяется равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (3.3)$$

При этом справедливо равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (3.4)$$

где c – любое число.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Если удается найти первообразную функцию $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, то записи можно расположить следующим образом:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty}\big(F(b)-F(a)\big) =$$
$$= \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a).$$

Очевидно, что несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом существует, если существует $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

Введем обозначение: $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$ $\left(\lim\limits_{a\to-\infty} F(a) = F(-\infty)\right)$.

Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) = F(+\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^{+\infty}.$$

Окончательно получим

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a), \qquad (3.5)$$

понимая, что $F(+\infty) = \lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

Если отыскать первообразную функцию для $f(x)$ трудно или если она в конечном виде не может быть вычислена, то существуют признаки, позволяющие решить вопрос о сходимости или расходимости несобственного интеграла с бесконечными пределами.

Признаки сравнения

1◦. Если две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ для всех значений x из промежутка $[a,+\infty]$ не принимают отрицательных значений и к тому же

$$f(x) \le \varphi(x), \qquad (3.6)$$

то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причем $\int_a^{+\infty} f(x)dx \le \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$, а из расходимости $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$.

2◦. Если при $x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = c, \qquad (3.7)$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

причем $c>0$, $c\neq\infty$ и $f(x)\neq 0$ для всех достаточно больших x, то интегралы $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ и $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся.

3°. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$, то сходится и $\int_a^{+\infty}kf(x)dx$, где k – постоянная величина.

Эти признаки распространяются и на интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$, но относятся только к указанным выше функциям.

Для решения вопроса о сходимости интеграла $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ в том случае, когда функция $f(x)$ является знакопеременной в промежутке $[a,+\infty]$, можно применить следующую теорему.

Теорема 3.1. Если несобственный интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ – сходится, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$. ▲

Примеры.

1. Вычислить несобственные интегралы:

$$a)\ \int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx;\qquad b)\ \int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2};\qquad c)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2};\qquad d)\ \int_0^{+\infty}\cos x dx.$$

Решение.

$$a)\ \int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b xe^{-x^2}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-b^2}\right)=\frac{1}{2},$$

то есть несобственный интеграл сходится.■

$$b)\ \int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^{-1}=\lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)=1,$$

то есть несобственный интеграл сходится.■

$$c)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=(\text{подынтегральная функция – четная})=2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}2\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to+\infty}(arctgx)\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}arctgb=\frac{\pi}{2},$$

то есть несобственный интеграл сходится.■

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$d)\ \int_0^{+\infty} \cos dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b\to+\infty} (\sin x)\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \sin b,$$

но $\sin x$ при $x \to +\infty$ не стремится ни к какому пределу, совершая колебания от -1 к $+1$, а поэтому интеграл расходится.■

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

$a)\ \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\ (a>0);$ $\qquad b)\ \int_0^{+\infty} e^{-px}dx;$ $\qquad c)\ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

Решение.

$$a)\ \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b x^{-p}dx = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{-p+1}x^{-p+1}\right)\Bigg|_a^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{-p+1}b^{-p+1} - \frac{1}{-p+1}a^{-p+1}\right) = \frac{1}{1-p}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{b^{p-1}} + \frac{1}{(p-1)a^{p-1}}.$$

Рассмотрим три случая.

Пусть $p>1$.

Тогда $p-1>0$ и при $b\to+\infty$ дробь $\frac{1}{b^{p-1}} \to 0$. Значит в этом случае интеграл сходится.

Пусть $p<1$.

Тогда $p-1<0$, а $1-p>0$ и при $b\to+\infty$ величина $b^{p-1} = \frac{1}{b^{1-p}} \to 0$, то есть b^{p-1} – бесконечно малая величина. Поэтому величина $\frac{1}{b^{p-1}}$, которая нас интересует бесконечно большая. Значит в этом случае интеграл расходится.

Пусть $p=1$.

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_a^b = \lim_{b\to+\infty} \ln b - \ln a = +\infty.$$

Таким образом, в данном случае интеграл расходится.

Этим интегралом часто пользуются, применяя признак сравнения, при решении вопроса о сходимости интеграла.■

$$b)\ \int_0^{+\infty} e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-px}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-px}\right)\Bigg|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pb} + \frac{1}{p}\right) = -\frac{1}{p}\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{bp}} + \frac{1}{p}.$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пусть $p > 0$.

Тогда $\lim\limits_{b \to +\infty} \dfrac{1}{e^{bp}} = 0$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} dx = \dfrac{1}{p}$, то есть сходится.

Пусть $p < 0$.

Тогда $-p > 0 \Rightarrow \lim\limits_{b \to +\infty} e^{-pb} = +\infty$ и $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} dx = +\infty$, то есть интеграл расходится.■

c) Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ имеет большое значение в теории вероятностей и называется *интегралом вероятностей*. В данном случае неопределенный интеграл $\int e^{-x^2} dx$ через элементарные функции не выражается.

Для ответа на вопрос о сходимости интеграла используем признак сравнения. Для этого рассмотрим выражение $x^2 - 2x + 1$. Очевидно

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0; \Rightarrow -2x + 1 \geq -x^2; \Rightarrow -x^2 \leq -2x + 1,$$

а поэтому $e^{-x^2} \leq e^{-2x+1}; \Rightarrow e^{-x^2} \leq e^{-2x} \cdot e$.

Из предыдущей задачи $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x} dx$ – сходится, и по признаку сравнения 3◦ сходится интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e \cdot e^{-2x} dx$. А так как $e^{-x^2} \leq e^{-2x} \cdot e$, то на основании признака сравнения 1◦ заключаем, что сходится $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Заменяя в этом интеграле x на $-t$, приходим к выводу, что сходится и $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx$ (название переменной интегрирования не изменяет величину определенного интеграла). Из сходимости рассмотренных двух интегралов следует, что сходится также и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.■

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить несобственные интегралы:

1. $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{arctgx}{1 + x^2} dx$. 2. $\int\limits_{-\infty}^{0} \dfrac{dx}{4 + x^2}$. 3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$.

Ответы.

1. $\dfrac{\pi^2}{8}$. 2. $\dfrac{\pi}{4}$. 3. $\dfrac{\pi}{6}$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

1. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$. 2. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{arctgx}{x}dx$. 3. $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Ответы.

1. Сходится. 2. Расходится. 3. . Расходится.

3.2. Интегралы от неограниченных функций

Может оказаться, что в интеграле

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx \tag{3.8}$$

функция $f(x)$ неограниченно возрастает, то есть $f(x) \to \pm\infty$, когда x приближается к одному из пределов интегрирования.

Если это имеет место, когда $x \to b$, а $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{a}^{b-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} F(b-\varepsilon) - F(a). \tag{3.9}$$

Аналогично находят этот интеграл и в том случае, когда при $x \to a$ подынтегральная функция $f(x) \to \pm\infty$.

При этом

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{a+\varepsilon}^{b} = F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(a+\varepsilon). \tag{3.10}$$

Если в (3.9) и (3.10) конечные пределы существуют, то интеграл (3.8) называется *сходящимся.* Если же эти пределы бесконечны или не существуют, то интеграл (3.8) называется *расходящимся.*

Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке c отрезка интегрирования $[a,b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и $c < x \le b$ и $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то по определению полагают

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{a}^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0} F(x)\Big|_{c+\varepsilon}^{b} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to+0} F(c-\varepsilon) - F(a) + F(b) - \lim_{\varepsilon\to+0} F(c+\varepsilon).$$

Если пределы в полученном выражении существуют и конечны, то интеграл (3.8) называется *сходящимся*, в противном случае–*расходящимся*.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Примеры.

Вычислить несобственные интегралы:

$a)\ \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$; $\quad b)\ \int\limits_0^2 \frac{dx}{2-x}$; $\quad c)\ \int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; $\quad d)\ \int\limits_{-2}^{2} \frac{4x^3}{x^4-1}dx$.

Решение.

a) При $x \to 0$, то есть при приближении x к нижнему пределу, подынтегральная функция $\frac{1}{\sqrt{x}}$ неограниченно возрастает. Тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \overset{(3.10)}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2\cdot 1 - \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{\varepsilon} = 2.$$

Следовательно, исходный интеграл сходящийся.■

b) При $x \to 2$, то есть при приближении x к верхнему пределу, подынтегральная функция $\frac{1}{2-x}$ неограниченно возрастает. Тогда

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{2-x} \overset{(3.9)}{=} \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{0}^{2-\varepsilon} \frac{1}{2-x}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(-\ln(2-x)\right)\Big|_0^{2-\varepsilon} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to+0}\ln(2-2+\varepsilon) + \ln 2 = +\infty.$$

Следовательно, исходный интеграл расходящийся.■

c) Внутри отрезка интегрирования $[-8;\,27]$ при $x \to 0$ подынтегральная функция неограниченно возрастает. Тогда

$$\int\limits_{-8}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-8}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{+\varepsilon}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{-8}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{+\varepsilon}^{27} =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\lim_{\varepsilon\to+0}(-\varepsilon)^{\frac{2}{3}} - (-8)^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(27^{\frac{2}{3}} - \lim_{\varepsilon\to+0}(+\varepsilon)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}(-4+9) = \frac{3}{2}\cdot 5 = \frac{15}{2}.$$

Следовательно, исходный интеграл сходящийся.■

d) Внутри отрезка интегрирования $[-2;\,2]$ находятся две точки: $x=-1$ и $x=+1$ при приближении к которым, подынтегральная функция неограниченно возрастает. Тогда

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{4x^3}{x^4-1}dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-2}^{-1-\varepsilon} \frac{4x^3}{x^4-1}dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-1-\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{4x^3}{x^4-1}dx + \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{4x^3}{x^4-1}dx.$$

Вычислять эти пределы не имеет смысла, так как первообразная функция $\ln\left(x^4-1\right)$ обращается в бесконечность в точках $x=-1$ и $x=+1$. Следовательно, данный интеграл расходящийся.■

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

4.1. Вычисление площади плоской фигуры

Плоской фигурой будем называть любое ограниченное множество точек плоскости.

I. Площадь плоской фигуры в декартовых координатах.

Площадь плоской фигуры, ограниченной непрерывной кривой $y = f(x)$ $\left(f(x) \ge 0\right)$, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (4.1)$$

Если $f(x) < 0$, то формула (4.1) дает отрицательное число, абсолютная величина которого определяет искомую площадь, то есть

$$S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|. \qquad (4.2)$$

При вычислении площади отрезок $[a, b]$ следует разделить на части, в каждой из которых функция $f(x)$ сохраняет один и тот же знак и на каждой части вычислить площадь. Искомая площадь будет складываться из полученных площадей.

Площадь фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется по формуле

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx. \qquad (4.3)$$

Примеры.

1. Вычислить площадь фигуры, заключенной между осью Ox и кривой $y = x^2 - 4x$ (рис. 1).

Решение.

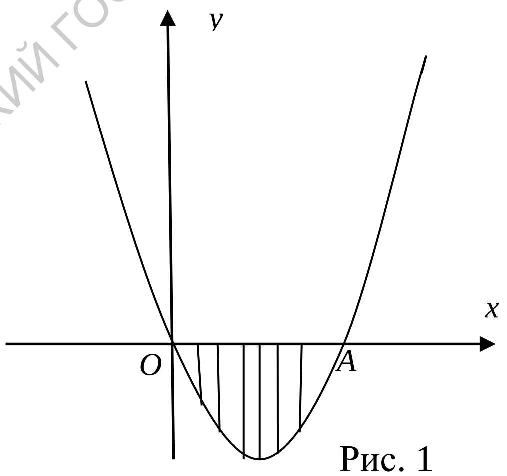

Рис. 1

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Найдем точки пересечения параболы $y = x^2 - 4x$ с осью Ox. Это точки $O(0;\,0)$ и $A(4;\,0)$. Искомая площадь ограничена сверху отрезком $[0,\,4]$, снизу параболой. Заданная функция отрицательна при $0 \le x \le 4$, поэтому применяем формулу (4.2)

$$S = \left|\int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_0^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.).}\blacksquare$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $x = 4$, кривой $y = 3x^2 - 6x$ и осью Ox на отрезке $[0,\,4]$ (рис. 2).

Решение.

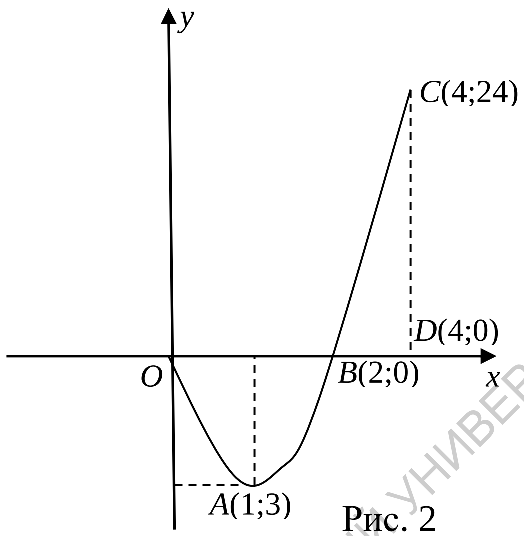

Рис. 2

Кривая – парабола. Площадь искомой фигуры состоит из двух частей: на отрезке $[0,\,2]$ функция расположена под осью Ox и принимает отрицательные значения, на отрезке $[2,\,4]$ функция расположена над осью Ox и принимает положительные значения, тогда

$$S = S_1 + S_2 = \left|\int_0^2 \left(3x^2 - 6x\right)dx\right| + \int_2^4 \left(3x^2 - 6x\right)dx = \left|\left(x^3 - 3x^2\right)\Big|_0^2\right| + \left(x^3 - 3x^2\right)\Big|_2^4 =$$

$$= |8 - 12| + (64 - 48 - 8 + 12) = 4 + 20 = 24 \text{ (кв. ед.).}\blacksquare$$

II. Площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y\dot{x}dt, \qquad (4.4)$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений $a = \varphi(t_1)$, $b = \varphi(t_2)$ $(\psi(t) \geq 0,\ t_1 \leq t \leq t_2)$.

Пример.

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ и осью Ox (рис. 3).

Решение.

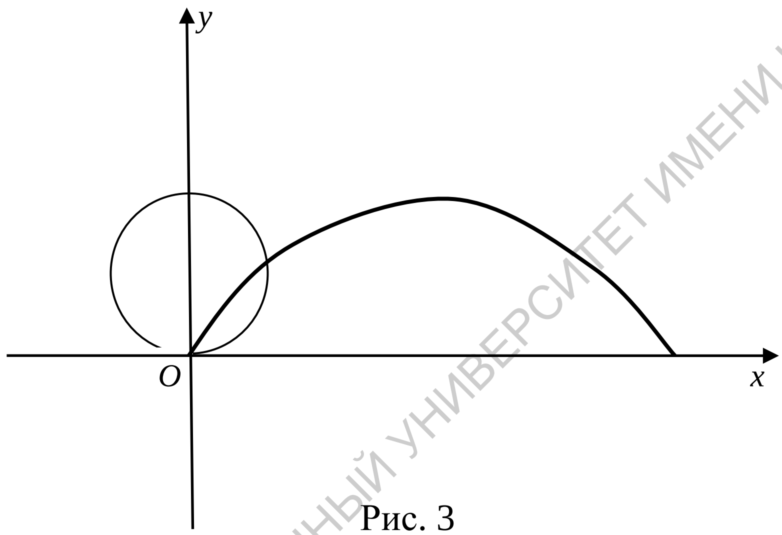

Рис. 3

Здесь $dx = 2(1 - \cos t)dt$, а t изменяется от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Следовательно,

$$S = \int_0^{2\pi} 2^2(1 - \cos t)^2 dt = 4\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 4\left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$= 12\pi$ (кв. ед.).■

III. Площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной полярным уравнением и двумя радиусами-векторами.

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\varphi. \qquad (4.5)$$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Пример.

Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли, определяемой уравнением $r^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ (рис. 4).

Решение.

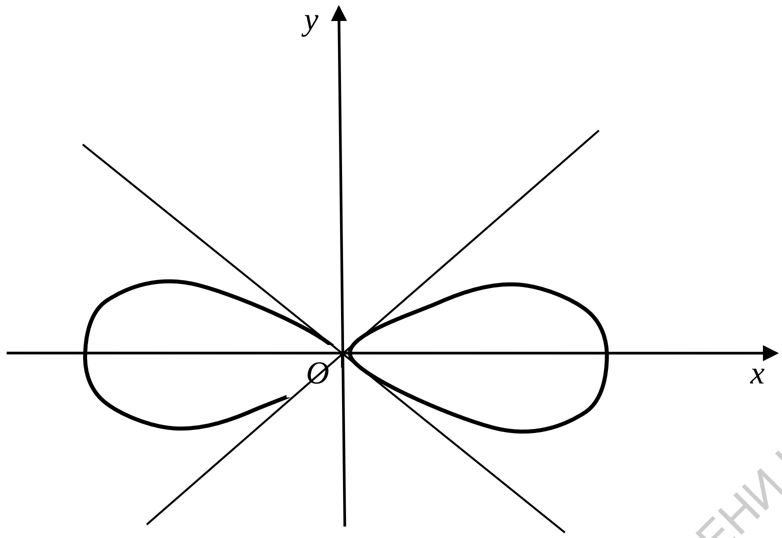

Рис. 4

Проследим, как изменяется угол φ, когда радиус-вектор точки на лемнискате описывает четверть площади искомой фигуры, лежащей в первой четверти.

При $\varphi = 0$ $r = a\sqrt{2}$. Определим, чему равен полярный угол φ, когда радиус-вектор станет равным нулю. Подставляя $r = 0$ в уравнение лемнискаты, получим $0 = 2a^2\cos 2\varphi; \Rightarrow \cos 2\varphi = 0; \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Таким образом, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$ на одной четвертой площади. Тогда

$$\frac{S}{4} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2a^2\cos 2\varphi d\varphi = a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\varphi d\varphi = a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2} \text{ (кв. ед.)},$$

а вся площадь

$$S = 2a^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

Следовательно, площадь, ограниченная лемнискатой, равна площади квадрата со стороной $a\sqrt{2}$.■

Задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислить площадь фигуры, заключенной между осью Ox и кривой $y = 2x^2 + 4x - 9$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

2. Найти площадь фигуры, заключенной между кривой $y = x^3$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью Ox.

3. Найти площадь фигуры, заключенной между линиями $y = x^2$ и $y = x$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и линиями $y = (x-4)^2$ и $y = 16 - x^2$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Ox и линиями $xy = 3$ и $x + y = 4$.

6. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной астроидой: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

7. Вычислить площадь одного лепестка розы, определяемой уравнением $r = a\sin 3\varphi$ (рис. 5).

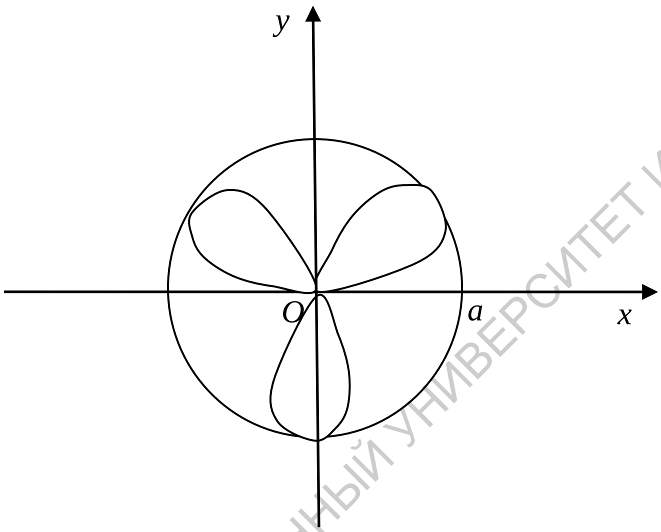

Рис. 5

О т в е т ы.

1. $30\frac{3}{8}$ (кв. ед.). 2. $4\frac{1}{4}$ (кв. ед.). 3. $\frac{1}{6}$ (кв. ед.). 4. 64 (кв. ед.).

5. $(4 - \ln 27)$ (кв. ед.). 6. $\frac{3}{8}\pi a^2$ (кв. ед.). 7. $\frac{\pi a^2}{12}$ (кв. ед.).

4.2. Вычисление длины дуги плоской кривой

I. Длина дуги плоской кривой в декартовых координатах.

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ – гладкая, то есть производная $y' = f'(x)$ непрерывна, то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$L=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{4.6}$$

Пример.

Найти длину дуги кривой $y^2=x^3$ от $x=0$ до $x=1$, $y\ge 0$.

Решение.

Из уравнения кривой найдем $y=x^{\frac{3}{2}}$. Кривая задана в декартовых координатах. Чтобы воспользоваться (4.6) найдем выражение под знаком интеграла.

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}};\ \Rightarrow y'^2=\frac{9}{4}x;\ \Rightarrow \sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}x}.$$

Подставим его в (4.6)

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{27}=\frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13}-1\right).\blacksquare$$

II. Длина дуги плоской кривой, заданной параметрическими уравнениями.

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},$$

где $t_1\le t\le t_2$, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ имеют непрерывные производные, то длина дуги этой кривой вычисляется по формуле

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \tag{4.7}$$

Пример.

Найти длину дуги окружности радиуса R, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases}x=R\cos t,\\ y=R\sin t.\end{cases}$$

Решение.

Чтобы применить формулу (4.7) вычислим:

$\dot{x}=-R\sin t;\ \Rightarrow \dot{x}^2=R^2\sin^2 t;$

$\dot{y}=R\cos t;\ \Rightarrow \dot{y}^2=R^2\cos^2 t;$

$\dot{x}^2+\dot{y}^2=R^2\sin^2 t+R^2\cos^2 t=R^2\left(\sin^2 t+\cos^2 t\right)=R^2;$

$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{R^2}=R;$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Параметр t определяет центральный угол, опирающийся на дугу, начало которой лежит на положительной части оси Ox. На всей окружности параметр t изменяется от 0 до 2π. Тогда длина окружности

$$L = \int_0^{2\pi} R dt = Rt\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R. \blacksquare$$

III. Длина дуги плоской кривой, заданной в полярных координатах.

Если гладкая кривая, задана уравнением $r = f(\varphi)$, где $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi. \tag{4.8}$$

П р и м е р.

Найти длину дуги кривой $r = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е.

Чтобы применить формулу (4.8) вычислим:

$$r^2 = \sin^6 \frac{\varphi}{3};$$

$$r' = \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos\frac{\varphi}{3}; \Rightarrow r'^2 = \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3};$$

$$r^2 + r'^2 = \sin^6 \frac{\varphi}{3} + \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3} = \sin^4 \frac{\varphi}{3}\left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3}\right) = \sin^4 \frac{\varphi}{3};$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{3}} = \sin^2 \frac{\varphi}{3};$$

Тогда

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right). \blacksquare$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я.

1. Вычислить длину дуги кривой: $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить длину дуги кривой: $y = \frac{x^2}{2}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

3. Найти длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями от $t = 0$ до $t = 3$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3} - t, \\ y = t^2 + 2. \end{cases}$$

4. Найти длину дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями от $t = 0$ до $t = \ln \pi$

$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

5. Найти длину дуги кривой $r = a \sin \varphi$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \pi$.

6. Найти длину дуги кривой $r = a \cos^3 \dfrac{\varphi}{3}$ от $\varphi = 0$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Ответы.

1. $\dfrac{1}{2} \ln 3$. 2. $\dfrac{20}{9}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$. 3. 12. 4. $\sqrt{2}(\pi - 1)$.

5. πa. 6. $\dfrac{a}{8}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$.

4.3. Нахождение координат центра тяжести

Координаты центра тяжести однородной дуги плоской фигуры $y = f(x)$ $a \le x \le b$ выражаются формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{L}\int_a^b x dL, \quad \bar{y} = \frac{1}{L}\int_a^b y dL, \tag{4.9}$$

где $dL = \sqrt{1 + y'^2}dx,$ а L – длина дуги.

Координаты центра тяжести криволинейной трапеции вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x dS = \frac{1}{S}\int_a^b xy dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b y dS = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2 dx, \tag{4.10}$$

где $dS = y dx,$ а S – площадь фигуры.

Примеры.

1. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = a ch \dfrac{x}{a}$, $-a \le x \le a$.

Решение.

Так как кривая симметрична относительно оси Oy, то ее центр тяжести лежит на оси Oy, то есть $\bar{x} = 0$. Определим $\bar{y}$ по формуле (4.9).

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$y' = sh\frac{x}{a};\ \Rightarrow \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+sh^2\frac{x}{a}} = ch\frac{x}{a};\ \Rightarrow dL = ch\frac{x}{a}dx.$$

Тогда длина дуги

$$L \overset{(4.6)}{=} \int_{-a}^{a} ch\frac{x}{a}dx = 2\int_{0}^{a} ch\frac{x}{a}dx = 2ash\frac{x}{a}\Big|_0^a = 2ash1.$$

Следовательно,

$$\bar{y} = \frac{1}{2asn1}\int_{-a}^{a} ach^2\frac{x}{a}dx = \frac{1}{sn1}\int_0^a ch^2\frac{x}{a}dx = \frac{1}{2sn1}\int_0^a\left(1+ch\frac{2x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2sn1}\left(x+\frac{a}{2}sh\frac{2x}{a}\right)\Bigg|_0^a = \frac{a}{2sn1}\left(1+\frac{1}{2}sh2\right) = \frac{a(2+sh2)}{4sh1} \approx 1{,}18a. \blacksquare$$

2. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной дугой эллипса $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$, расположенной в I четверти, и осями координат.

Р е ш е н и е.

В первой четверти при возрастании x от 0 до a величина t убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Здесь $dx = -a\sin t\,dt$. Следовательно, площадь части эллипса, расположенной в I четверти:

$$S \overset{(4.4)}{=} \int_{\frac{2}{2}}^{0} -ab\sin^2 t dt = \frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt = \frac{ab}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4} \quad \text{(кв. ед.)}.$$

Тогда на основании (4.10)

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_0^a xydx = \frac{4}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\cos t\cdot b\sin t\cdot(-a\sin t)dt = \frac{4a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt = \frac{4a}{3\pi}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2S}\int_0^a y^2dx = \frac{2}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)dt = \frac{2b}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t(-\sin t)dt =$$

$$= \frac{2b}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t) = \frac{2b}{\pi}\left(\cos t-\frac{1}{3}\sin^3 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{2b}{\pi}\left(1-0-0-\frac{1}{3}\right) = \frac{4b}{3\pi}. \blacksquare$$

4.4. Вычисление объема тела

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox может быть выражена как функция x, то есть $S = S(x)$ $(a \le x \le b)$, то

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси Ox плоскостями $x=a,\ x=b$, находится по формуле

$$V=\int_a^b S(x)dx. \tag{4.11}$$

Пример.

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=a^2;\ \ z=\sqrt{3}y;\ \ z=0\ \ (y\ge 0)$.

Решение.

Рассмотрим сечения этого тела плоскостями $x=const$. В сечениях получаются прямоугольные треугольники с площадями

$$S(x)=\frac{1}{2}y(x)z(x)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2-x^2\right).$$

Применяя (4.11) находим

$$V=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$$ (куб. ед.).■

4.5. Вычисление объема и площади поверхности тела вращения

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y=f(x)$ и прямыми $y=0,\ x=a,\ x=b$ вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b y^2dx. \tag{4.12}$$

Если фигура, ограниченная кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)\ \ (0\le f_1(x)\le f_2(x))$ и прямыми $x=a,\ x=b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx. \tag{4.13}$$

Если дуга гладкой кривой $y=f(x)\ \ (a\le x\le b)$ вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx. \tag{4.14}$$

Примеры.

1. Найти объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Решение.

По формуле (4.12) имеем

$$V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx=\frac{4}{3}\pi ab^2 \text{ (куб. ед.).}\blacksquare$$

2. Найти объем и боковую поверхность параболоида, полученного вращением параболы $y^2=2px$ вокруг оси Ox и ограниченного плоскостью $x=H$.

Решение.

По формуле (4.12) имеем

$$V=\pi\int_{0}^{a}2pxdx=2p\pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^H=\pi pH^2 \text{ (куб. ед.).}$$

Боковая поверхность определяется по формуле (4.14). Выполним промежуточные вычисления.

$$y^2=2px;\ \Rightarrow 2yy'=2p;\ \Rightarrow y'=\frac{p}{y};\ \Rightarrow y'^2=\frac{p^2}{y^2}=\frac{p^2}{2px}=\frac{p}{2x};$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{p}{2x}}.$$

Тогда

$$S=2\pi\int_0^H\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx=2\pi\int_0^H\sqrt{2px+p^2}dx=\frac{4\pi\sqrt{2}p}{3}\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^H=$$

$$=\frac{4\pi\sqrt{2}p}{3}\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \text{ (кв.ед.).}\blacksquare$$

3. Вычислить объем и поверхность шара, рассматривая его как тело вращения.

Решение.

Будем полагать, что сфера образована вращением окружности $x^2+y^2=R^2$ вокруг оси Ox.

Чтобы найти объем шара по формуле (4.12), найдем из уравнения окружности $y^2=R^2-x^2$. Переменная интегрирования x изменяется от $-R$ до R. Тогда

$$V=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\int_0^R\left(R^2-x^2\right)dx=2\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^R=\frac{4}{3}\pi R^3 \text{ (куб. ед.).}$$

Вычислим площадь поверхности сферы по формуле (4.14). Выполним промежуточные вычисления.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

$$x^2+y^2=R^2;\ \Rightarrow y^2=R^2-x^2;\ \Rightarrow 2yy'=-2x;\ \Rightarrow y'=-\frac{x}{y};$$

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}=\frac{R}{y}.$$

Тогда

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{0}^{H}y\cdot\frac{R}{y}\,dx=2\pi Rx\Big|_{-R}^{R}=4\pi R^2 \text{ (кв.ед.).}\blacksquare$$

4.6. Теоремы Гульдена

Терема 4.1. Площадь поверхности, полученной при вращении дуги плоской кривой вокруг оси, лежащей в плоскости этой кривой и не пересекающей ее, равна произведению длины дуги кривой на длину окружности, описанной центром тяжести дуги. ▲

Терема 4.2. Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры и не пересекающей ее, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры. ▲

Примеры.

1. Найти площади поверхностей и объемы колец (торов), полученных вращением круга $(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$ вокруг осей Ox и Oy $(a\ge R,\ b\ge R)$.

Решение.

Если круг вращается вокруг оси Ox, то центр тяжести круга отстоит от оси вращения на расстоянии b. Поэтому площадь поверхности, согласно первое теореме Гульдена, равна

$$S_x=2\pi R\cdot 2\pi b=4\pi^2 bR \text{ (кв. ед.).}$$

Объем, согласно второй теореме Гульдена, равен

$$V_x=\pi R^2\cdot 2\pi b=2\pi^2 bR^2 \text{ (куб. ед.).}$$

Если же вращение происходит вокруг оси Oy, то расстояние центра тяжести круга от оси Oy равно a. Тогда

$$S_y=2\pi R\cdot 2\pi a=4\pi^2 aR \text{ (кв. ед.).}$$

$$V_y=\pi R^2\cdot 2\pi a=2\pi^2 aR^2 \text{ (куб. ед.).}\blacksquare$$

2. Пользуясь теоремами Гульдена, найти координаты центра тяжести четверти круга $x^2+y^2\le R^2$.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Решение.

При вращении четверти круга вокруг оси Ox получим полушар, объем которого равен

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3} \text{ (куб. ед.).}$$

Согласно второй теореме Гульдена

$$V = \frac{\pi R^2}{4} \cdot 2\pi \bar{y} \text{ (куб. ед.).}$$

Отсюда

$$\bar{y} = \frac{2V}{\pi^2 R^2} = \frac{2 \cdot 2\pi R^3}{3\pi^2 R^2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

Центр тяжести четверти круга лежит на оси симметрии, то есть на биссектрисе I координатного угла, а поэтому

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}. \blacksquare$$

3. Применяя вторую теорему Гульдена, найти координаты центра тяжести плоской фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox.

Решение.

Здесь $dx = a(1 - \cos t)dt$, а t изменяется от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2\pi$. Следовательно, объем тела, полученного от вращения фигуры вокруг оси Ox, равен

$$V = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos 2t + -\frac{1}{4}\cos 3t - \frac{3}{4}\cos t\right) dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 3\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t - \frac{1}{12}\sin 3t - \frac{3}{4}\sin t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3 \text{ (куб. ед.).}$$

Площадь фигуры равна

$$S = \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = a^2 \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 3\pi a^2 \text{ (кв. ед.).}$$

Согласно второй теореме Гульдена $V = S \cdot 2\pi \bar{y}$. Тогда

$$5\pi^2 a^3 = 3\pi a^2 \cdot 2\pi \bar{y}; \Rightarrow \bar{y} = \frac{5a}{6}.$$

Из симметрии фигуры относительно прямой $x = \pi a$ сдедует, что абсцисса центра тяжести $\bar{x} = \pi a$. $\blacksquare$

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

4.7. Вычисление работы и давления

Работа переменной силы $F = F(x)$, действующей в направлении оси Ox, на отрезке $[a, b]$, вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (4.15)$$

Для вычисления силы давления жидкости используют закон Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку равно произведению ее площади S на глубину погружения h, на плотность ρ и ускорению силы тяжести g, то есть

$$P = \rho ghS. \qquad (4.16)$$

П р и м е р ы.

1. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 H она растягивается на 1 см?

Р е ш е н и е.

Согласно закону Гука, сила F H, растягивающая пружину на x м, равна $F = kx$. Коэффициент пропорциональности k найдем из условия: если $x = 0{,}01$ м, то $F = 1$ Н, следовательно, $k = \dfrac{1}{0{,}01} = 100$ и $F = 100x$. Тогда

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08 \text{ (дж).}■$$

2. Водопроводная труба имеет диаметр 6 см; один конец ее соединен с баком, в котором уровень воды на 1 м выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти силу давления на заслонку.

Р е ш е н и е.

Заслонка представляет собой круг радиуса 0,03 м. Разобьем площадь этого круга на элементы-полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента, находящегося на расстоянии y от центра, равна (с точностью до бесконечно малых высшего порядка)

$$dS = 2\sqrt{9 - y^2}dy.$$

Найдем силу давления, испытываемую этим элементом:

$$dP = 2\rho g(1{,}03 - y)\sqrt{9 - y^2}dy = 19600(1{,}03 - y)\sqrt{9 - y^2}dy,$$

где $\rho = 1000$ (кг/м^3).

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Следовательно,

$$P = 19600\int_{-3}^{3}(1{,}03 - y)\sqrt{9-y^2}\,dy = 19600\left[1{,}03\left(\frac{y}{2}\sqrt{9-y^2}+\frac{9}{2}\arcsin\frac{y}{3}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\left(9-y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{-3}^{3} = 9800\cdot 9{,}27\pi \approx 0{,}09\pi \quad (\text{Н}).\blacksquare$$

Контрольные вопросы

1. Что называется первообразной для функции $f(x)$ на промежутке X?
2. Привести примеры функций, имеющих первообразные.
3. Написать формулу замены переменной в неопределенном интеграле. При каких условиях эта формула справедлива?
4. Написать формулу интегрирования по частям.
5. Какие функции удобно интегрировать по частям?
6. Почему исследуется вопрос об интегрировании только правильной дроби?
7. На какие простейшие дроби разлагается дробь $\dfrac{x+1}{(x+1)^2\left(x^2+x+1\right)}$?
8. В чем заключается метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей?
9. Что такое интегральная сумма функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$?
10. Что такое определенный интеграл?
11. Какая функция называется интегрируемой?
12. Перечислить свойства определенного интеграла.
13. Какие интегралы называются несобственными?
14. В каком случае несобственный интеграл называют сходящимся?
15. По каким формулам вычисляется длина кривой: а) заданной параметрически; б) в декартовых координатах; в) в полярных координатах?
16. Какая фигура называется плоской?
17. По каким формулам вычисляется площадь плоской фигуры: а) в случае параметрического задания границы; б) в декартовых координатах; в) в полярных координатах?
18. По каким формулам вычисляется: а) объем тела с известным поперечным сечением; б) объем тела вращения?
19. Сформулировать теоремы Гульдена.
20. Каковы основные приложения определенного интеграла в задачах механики и физики?

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Список рекомендованной литературы

Баранова Е.С., Васильева Н.В., Федотов В.П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты: Учебное пособие. СПб.: Питер, 2009.

Данко П.Е. , Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. В 2 ч.: Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. М.: Издательский дом «ОНИКС 21 век»: Мир и Образование, 2003.

Демидович В.П., Кудрявцев В.А. Краткий курс высшей математики: Учеб. пособие. М.: Астрель, 2005.

Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – 3-е изд., испр. и доп. М.: Айрис-пресс, 2004.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие. М.: Физ.-мат. лит., 2006.

Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс. Дмитрий Письменный. – 8-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2009.

Щипачев В.С. Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов / Под ред. акад. А. Н. Тихонова. М.: Высшая школа, 1985.

САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО