Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

И.Ю. Выгодчикова

ОЦЕНКА ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

Учебное пособие для студентов
Специальности «Прикладная информатика»

Рекомендует:
Кафедра математической экономики
Механико-математического факультета СГУ

Саратов 2011 г.

Автор: И.Ю. Выгодчикова

УСТАНОВОЧНЫЙ МОДУЛЬ
по специальному курсу
«ОЦЕНКА ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ»

1. Описание дисциплины

В специальном курсе рассматриваются приёмы оценки финансовых рисков. Под риском обычно понимают возможность экономических потерь, возникающих при наступлении неблагоприятных событий, часто случайных. В математическом понимании риск – это вероятность таких потерь, и он возникает при наличии неопределённости в финансовой сфере. При оценке доходности финансовых активов необходимо измерить возможные потери в стоимостном (денежном, процентном или долевом) выражении. Для этого применяют характеристики различного уровня сложности.

2. Требования, предъявляемые к студентам перед изучением курса

Студенты должны быть знакомы с курсами: математический анализ, теория вероятностей, математическая статистика, математическая экономика, финансовая математика, эконометрика.

3. Умения студентов, которые будут получены ими при изучении курса

Студенты овладеют способами оценки инвестиционных рисков, присущих как конкретным финансовым активам, так и портфелю активов.

4. Обращение автора (введение)

В зависимости от возможного результата (рискового события) риски можно подразделить на две большие группы: чистые и спекулятивные.

Чистые риски означают возможность получения отрицательного или нулевого результата. К этим рискам относятся: природно-естественные, экологические, политические, транспортные и часть коммерческих рисков (имущественные, производственные, торговые).

Спекулятивные риски выражаются в возможности получения как положительного, так и отрицательного результата. К ним относятся финансовые риски, являющиеся частью коммерческих рисков.

В зависимости от основной причины возникновения (базисный или природный признак), риски делятся на следующие категории: природно-естественные, экологические, политические, транспортные и коммерческие.

Коммерческие риски представляют собой опасность потерь в процессе финансово-хозяйственной деятельности. Они означают неопределенность результата отданной коммерческой сделки.

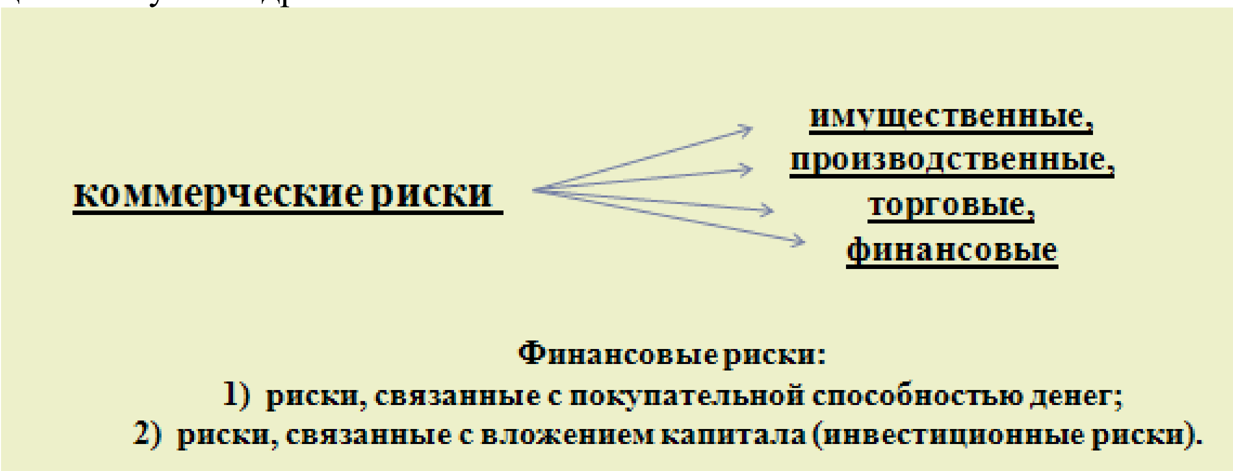
По структурному признаку коммерческие риски делятся на имущественные, производственные, торговые, финансовые.

Имущественные риски - это риски, связанные с вероятностью потерь имущества гражданина-предпринимателя по причине кражи, диверсии, халатности, перенапряжения технической и технологической систем и т.п.

Производственные риски - это риски, связанные с убытком от остановки производства вследствие воздействия различных факторов и, прежде всего, с гибелью или повреждением основных и оборотных фондов (оборудование, сырье, транспорт и т.п.), а также риски, связанные с внедрением в производство новой техники и технологии.

Торговые риски представляют собой риски, связанные с убытком по причине задержки платежей, отказа от платежа в период транспортировки товара, недоставки товара.

Финансовый риск возникает в процессе отношений предприятия с финансовыми институтами (банками, финансовыми, инвестиционными, страховыми компаниями, биржами и др.). Причины финансового риска - инфляционные факторы, рост учетных ставок банка, снижение стоимости ценных бумаг и др.



Финансовые риски подразделяются на два вида:

1) риски, связанные с покупательной способностью денег;
2) риски, связанные с вложением капитала (инвестиционные риски).

К рискам, связанным с покупательной способностью денег, относятся следующие разновидности рисков: инфляционные и дефляционные риски, валютные риски, риск ликвидности.

Инфляция означает обесценение денег и, соответственно, рост цен. Дефляция - это процесс, обратный инфляции, он выражается в снижении цен и, соответственно, в увеличении покупательной способности денег.

Инфляционный риск - это риск того, что при росте инфляции получаемые денежные доходы обесцениваются с точки зрения реальной покупательной способности быстрее, чем растут. В таких условиях предприниматель несет реальные потери.

Дефляционный риск - это риск того, что при росте дефляции происходит падение уровня цен, ухудшение экономических условий предпринимательства и снижение доходов.

Валютные риски представляют собой опасность валютных потерь, связанных с изменением курса одной иностранной валюты по отношению к другой при проведении внешнеэкономических, кредитных и других валютных операций.

Риски ликвидности - это риски, связанные с возможностью потерь при реализации ценных бумаг или других товаров из-за изменения оценки их качества и потребительной стоимости.

Инвестиционные риски:

риск упущенной выгоды;

риск снижения доходности (процентные риски, кредитные риски);

риск прямых финансовых потерь.

Финансовые риски возникают в процессе распределения и перераспределения средств, и, чем дальше перспектива финансовой отдачи, тем риск выше.

основными измерителями финансовых рисков являются **сроки финансовых активов и волатильность**

Инвестиционные риски включают в себя следующие подвиды рисков:

1) риск упущенной выгоды;
2) риск снижения доходности;
3) риск прямых финансовых потерь.

Риск упущенной выгоды - это риск наступления косвенного (побочного) финансового ущерба (неполученная прибыль) в результате неосуществления какого-либо мероприятия (например, страхование, хеджирование, инвестирование т.п.).

Риск снижения доходности может возникнуть в результате уменьшения размера процентов и дивидендов по портфельным инвестициям, по вкладам и кредитам.

Портфельные инвестиции связаны с формированием инвестиционного портфеля и представляют собой приобретение ценных бумаг и других активов. Термин «портфельный» происходит от итальянского «Porte foglio» в значении совокупности ценных бумаг, которые имеются у инвестора.

Риск снижения доходности включает в себя следующие разновидности: процентные риски и кредитные риски.

К *процентным рискам* относится опасность потерь коммерческими банками, кредитными учреждениями, инвестиционными институтами в результате превышения процентных ставок, выплачиваемых ими по привлеченным средствам, над ставками по предоставленным кредитам. К процентным рискам относятся также риски потерь, которые могут понести инвесторы в связи с изменением дивидендов по акциям, процентных ставок на рынке по облигациям, сертификатам и другим ценным бумагам.

Рост рыночной ставки процента ведет к понижению курсовой стоимости ценных бумаг, особенно облигаций с фиксированным процентом. При повышении процента может начаться также массовый сброс ценных бумаг, эмитированных под более низкие фиксированные проценты и, по условиям выпуска, досрочно принимаемых обратно эмитентом. Процентный риск несет инвестор, вложивший средства в среднесрочные и долгосрочные ценные бумаги с фиксированным процентом при текущем повышении среднерыночного процента в сравнении с фиксированным уровнем. Иными словами, инвестор мог бы получить прирост доходов за счет повышения процента, но не может высвободить свои средства, вложенные на указанных выше условиях.

Процентный риск несет эмитент, выпускающий в обращение среднесрочные и долгосрочные ценные бумаги с фиксированным процентом при текущем понижении среднерыночного процента в сравнении с фиксированным уровнем. Иначе говоря, эмитент мог бы привлекать средства с рынка под более низкий процент, но он уже связан сделанным им выпуском ценных бумаг.

Этот вид риска при быстром росте процентных ставок в условиях инфляции имеет значение и для краткосрочных бумаг.

Кредитный риск - опасность неуплаты заемщиком основного долга и процентов, причитающихся кредитору. К. кредитному риску относится также риск такого события, при котором эмитент, выпустивший долговые ценные бумаги, окажется не в состоянии выплачивать проценты по ним или основную сумму долга.

Кредитный риск может быть также разновидностью рисков прямых финансовых потерь.

Риски прямых финансовых потерь включают в себя следующие разновидности: биржевой риск, селективный риск, риск банкротства, а также кредитный риск.

Биржевые риски представляют собой опасность потерь от биржевых сделок. К этим рискам относятся: риск неплатежа по коммерческим сделкам, риск неплатежа комиссионного вознаграждения брокерской фирмы и т.п.

Селективные риски (от лат. selectio - выбор, отбор) - это риски неправильного выбора способа вложения капитала, вида ценных бумаг для инвестирования в сравнении с другими видами ценных бумаг при формировании инвестиционного портфеля.

Риск банкротства представляет собой опасность в результате неправильного выбора способа вложения капитала, полной потери предпринимателем собственного капитала и неспособности его рассчитываться по взятым на себя обязательствам. В результате предприниматель становится банкротом.

Финансовый риск представляет собой функцию времени. Как правило, степень риска для данного финансового актива или варианта вложения капитала увеличивается во времени. Например, убытки импортера сегодня зависят от времени от момента заключения контракта до срока платежа по сделке, так как курсы иностранной валюты по отношению к российскому рублю продолжают расти.

Поскольку любое инвестиционное решение сопряжено с риском потерь доходов, то этот риск необходимо, так или иначе, учитывать.

К наиболее простым измерителям риска относят меры, характеризующие только неопределённость. Традиционно и вполне обоснованно неопределённость характеризуют с помощью показателя «волатильность» (изменчивость, неустойчивость во времени финансового показателя, например, рыночных цен акций, дохода), которую измеряют с помощью стандартного, или среднеквадратического отклонения, дисперсии и коэффициента вариации.

Также рассматриваются показатели, характеризующие сроки действия финансового инструмента.

Такие статистические показатели взаимосвязи, как коэффициенты корреляции, детерминации и ковариации, как правило, применяются не самостоятельно, а в рамках более сложных методов анализа риска. Находят себе применение и коэффициенты регрессии. В качестве примера можно указать на коэффициент бета (beta), который по отношению к акциям является индикатором степени доходности конкретного вида акций относительно рынка в целом.

К группе современных измерителей риска относят показатели чувствительности (sensitivity) цен активов и стоимости под риском (Value at Risk, VaR). Под показателем чувствительности понимают меру риска, которая характеризует степень изменения экономического показателя при изменении значения одного фактора, как правило, случайного. Например, чувствительность цены финансового инструмента с фиксированным доходом к изменению рыночной процентной ставки измеряют с помощью модифицированной дюрации (modified duration). Для измерения чувствительности цен опционов к ряду факторов разработан набор показателей – дельта (delta), гамма (gamma), вега (vega), тета (theta), ро (rho). Совокупность последних часто называют Греки (Greeks).

Приведём расчётные формулы для статистических характеристик портфеля, содержащего n видов активов, которые вытекают из двух основных свойств дисперсии.

1. Если все значения случайной величины x увеличить в α раз, то дисперсия увеличится в α^2 раз: $\sigma_{x\alpha}{}^2 = \alpha^2 \sigma_x{}^2$.
2. Дисперсия суммы двух случайных величин x и y находится как

$$\sigma_{x+y}{}^2 = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + 2\rho_{xy}\sigma_x\sigma_y,$$

где ρ_{xy} – коэффициент парной корреляции между переменными x и y:

$$\rho_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}, \quad \operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

$\operatorname{cov}(x,y)$ – ковариация между этими переменными.

В инвестиционном проектировании часто применяют термин «эффективность»

Эффективность ИП (инвест.проекта) = {Доходность; Риск}

Под "доходностью" предлагается понимать экономическую категорию, характеризующую соотношение результатов к затратам по инвестиционному проекту (ИП). Виды доходности финансовых операций и способы анализы подробно рассматриваются в специальном курсе «Математические методы финансового анализа рынка ценных бумаг».

В случае, когда риск несущественен или сложно поддаётся измерению, условно считают, что Эффективность = Доходности.

Таким образом, при анализе инвестиционного проекта появляется новый фактор - фактор инвестиционного риска, оценку которого, безусловно, необходимо учитывать.

Автор: И.Ю. Выгодчикова

МОДУЛЬ 1

ТЕМА: СПОСОБЫ ОЦЕНКИ ФИНАНСОВЫХ РИСКОВ

1. Статистические измерители финансового риска

Рассмотрим следующие статистические показатели:

- средний срок обязательства,
- волатильность.

Простейшей характеристикой финансового риска является *срок, оставшийся до погашения финансового инструмента* (term to maturity). При прочих равных условиях бóльшим риском обладает инструмент с бóльшим сроком. Однако непосредственное сравнение сроков финансовых инструментов с фиксированным поступлением доходов, типичным представителям которых являются облигации, далеко не всегда приведёт к правильным результатам, поскольку здесь не учитываются особенности распределения (профиль) поступлений денег во времени. Для учёта этого фактора – распределения сумм погашения обязательства во времени – применяют средний срок поступлений (average life), который обобщает сроки поступлений денег от инструмента (без учёта процентных платежей) в виде средней взвешенной арифметической величины. В качестве весов берутся суммы поступлений.

Средний срок поступлений для инструмента с фиксированными доходами находят по формуле

$$T_a = \frac{\sum_{t=1}^{n} tS_t}{\sum_{t=1}^{n} S_t}, \qquad (1)$$

где T_a – средний срок поступлений, S_t – суммы поступлений (без купонного дохода), n – общий срок инструмента, t – сроки платежей.

Целесообразно учитывать ценность денег во времени. Поэтому рассматривают эквивалентный срок инструмента:

$$T_e = \frac{\sum_{t=1}^{n} tS_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} S_t v^t}, \qquad (2)$$

где T_e – средний срок поступлений, $S_t v^t$ – дисконтированные суммы поступлений, $v^t = (1+r)^{-t}$ – дисконтирующий множитель по ставке r на срок t, n – общий срок инструмента, t – сроки платежей. Ввиду того, что $r > 0$, $T_e < T_a$.

Пусть $t_1 < ... < t_n$. Обобщаем формулы:

$$T_a = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k S_{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} S_{t_k}}, \quad T_e = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k S_{t_k} v^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} S_{t_k} v^{t_k}},$$

Также (достаточно оценить разность) $T_e < T_a$.

Пример 1. Найдём 2 варианта среднего срока поступлений по обязательству, которое обеспечивает поступление денег через 2, 3 и 5 лет в размерах 100, 100 и 400 тыс. руб. Находим

$$\sum_t tS_t = 2500, \quad \sum_t S_t = 600.$$

Средний срок поступления составит $T_a = 4{,}17$ года. Если рыночная ставка $r = 16\%$, то с учётом потери стоимости денег во времени получаем

$$\sum_t tS_t \cdot 1{,}16^{-t} = 1293, \quad \sum_t S_t \cdot 1{,}16^{-t} = 329.$$

Средний эквивалентный срок поступления составит $T_e = 3{,}93$ года.

Вариант среднего срока, широко распространённый в современной практике измерения финансового риска, получил название *дюрация* (duration). Дюрация – это эквивалентный срок, при расчёте которого учитываются все поступления, включая проценты.

К простым статистическим мерам риска, характеризующим колебания значений экономической переменной (цены, уровня доходности, процентной ставки и т.п), имевшим место в периоде наблюдения, можно отнести ряд показателей. Наиболее элементарным из них является размах – диапазон значений. Чем шире размах, тем, в общем, ситуация более неопределённая и, вероятно, выше риск. Очевидно, что для финансового анализа размах мало что даёт, поскольку он определяется только двумя крайними значениями переменной. Мера риска, которая в отличие от размаха обобщает все наблюдавшиеся значения выбранной характеристики – это *волатильность (volatility)*. В широком смысле под волатильностью понимают изменчивость, вариацию во времени величины финансового или экономического показателя. Волатильность как меру риска обычно характеризуют с помощью широко распространённого статистического параметра – стандартного, или среднего квадратического отклонения (σ).

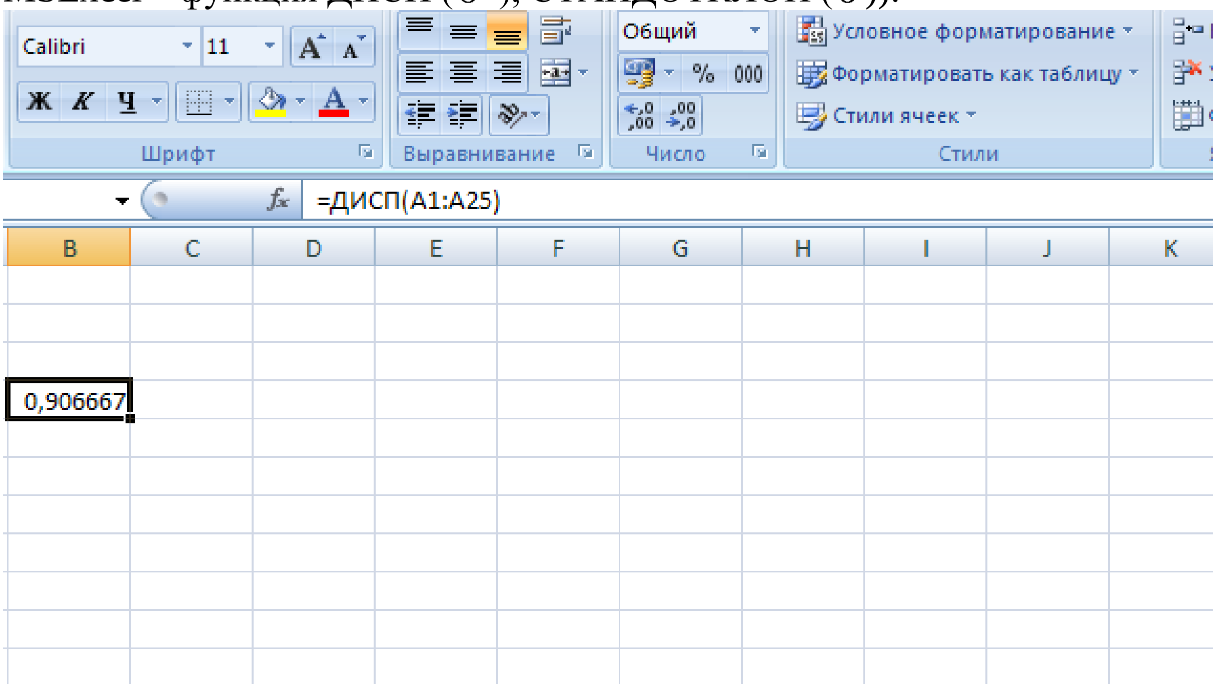
Другая распространённая статистическая мера изменчивости, функционально связанная со стандартным отклонением, – дисперсия

($D=\sigma^2$). Чем больше стандартное отклонение или дисперсия, тем, очевидно, выше неопределённость в величине соответствующей характеристики и, следовательно, выше риск. Волатильность в виде стандартного отклонения или дисперсии используется как непосредственная мера риска, так и в качестве одной из важнейших величин, применяемых в более сложных методиках измерения риска, например, при определении чувствительности цен облигаций и опционов, а также при расчёте стоимости под риском.

Стандартное отклонение равно среднему квадрату отклонений от арифметической средней варьирующего признака. Измеряется оно в тех же единицах, что и величина этого признака. Набор данных, по которым определяется стандартное отклонение, называют *выборкой*. При определении средней $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n}$ теряется одна степень свободы, и вместо числа наблюдений n используется величина $n-1$. Поэтому для расчёта стандартного отклонения и дисперсии с учётом числа степеней свободы получаем соответственно формулы

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}, \quad D=\sigma^2.$$

Расчёт средних, дисперсии и стандартного отклонения легко производится с помощью встроенных функций электронных таблиц (в MSExcel – функция ДИСП (σ^2), СТАНДОТКЛОН (σ)):



Для сопоставления различных экономических тенденций по степени волатильности удобнее применять относительный показатель –

коэффициент вариации, который может измеряться в долях: $v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$ или в процентах: $v = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$. Для расчёта волатильности при агрегировании данных во времени обычно допускают, что статистические величины имеют одинаковое распределение и не коррелируют в последовательных интервалах времени. На практике часто применяют следующие формулы агрегирования во времени показателей волатильности:

$$\sigma_{\text{год}} = \sigma_{\text{мес}}\sqrt{12}, \quad \sigma_{10\text{дневн}} = \sigma_{\text{дневн}}\sqrt{10},$$

$$\sigma_{\text{год}} = \sigma_{\text{дневн}}\sqrt{252} \text{ (если в году 252 торговых дня).}$$

Пример 2. Пусть волатильность доходности за месяц равна 10, тогда в расчёте за год она составит 34,65.

Если известно распределение вероятностей результатов финансовой операции, например, в банковской практике, при измерении риска конкретной кредитной операции, целесообразно оценивать параметр наиболее ожидаемого результата *(re)* по формуле математического ожидания:

$$re = \sum_{i=1}^{n} p_i r_i$$

где n — число возможных результатов; p_i — вероятность i-го результата; r_i — i-й возможный результат от операции.

При этом вероятность получения доходов часто считают на основании предыдущего опыта кредитования данного клиента. Среднее значение вероятности невозврата (Q) кредита заемщиком достаточно легко рассчитать по следующей формуле:

$$Q = (m + 1)/(n + 1), \; p = 1 - Q,$$

где n — общее количество предоставленных ранее (включая текущее обращение) кредитов m - число нарушений заемщиком условий договоров с банком, p- вероятность возврата кредита. Всегда m<n (текущее обращение ещё не повлекло нарушений).

Количественной оценкой риска конкретной кредитной операции принято считать вариацию *(var,* σ^2 *)*, разброс возможных результатов операции относительно ожидаемого значения (математического ожидания). В соответствии с теорией вероятности этот показатель рассчитывается как среднее квадратичное отклонение от ожидаемого результата по формуле

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i (r_i - re)^2$$

Кроме того, для оценки и измерения риска используется показатель среднеквадратического отклонения:

$$\sigma = \sqrt{var}\ .$$

Кредитный риск в данном случае будет измеряться на базе данных среднего квадратического отклонения и наиболее ожидаемого результата от операции путем их соотношения с помощью коэффициента вариации. Формула расчета имеет вид:

$$\gamma = \frac{\sigma}{re}$$

где γ - коэффициент вариации.

Вспомним следующие формулы из теории вероятностей:

Теорема умножения вероятностей независимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(B)P(A/B),$$

где *P(B/A)* - вероятность события *B* при условии, что произошло событие *A*.

Например, пусть заёмщик второй раз обратился в банк и имеет положительную кредитную историю, при этом банк согласился предоставить кредит на 1 год под 11 % годовых. Какова ожидаемая доходность операции для банка (возврат основной суммы гарантирован)?

Поскольку возврат основной суммы гарантирован, нам остаётся 2 возможности: вернуть проценты или нет. Вычисляем:

p=2/3, $re = 0 + 2/3*11\% = 7{,}33\%$,

$$\sigma^2 = 1/3*7{,}33^2\ (\%)^2 + 2/3*(11-7{,}33)^2\ (\%)^2 = 26{,}89\ (\%)^2,\ \sigma = 5{,}19\%,\ \gamma = 0{,}7.$$

Рассмотрим немного более сложную ситуацию. Банк кредитует двух независимых между собой клиентов на 1 год под 11 % годовых. Первый клиент второй раз обратился в банк и имеет положительную кредитную историю, а второй третий раз обратился в банк и имеет также положительную кредитную историю. Какова ожидаемая доходность операции для банка (распределение предоставленных сумм 50 % : 50 %, возврат основной суммы гарантирован)?

Поскольку возврат основной суммы гарантирован, нам остаётся 2 возможности: вернуть проценты или нет. Вычисляем:

$$p_1 = 2/3,\ p_2 = 3/4,$$

$$re = 0 + 2/3*3/4*11\% + 2/3*1/4*5{,}5\% + 1/3*3/4*5{,}5\% = 7{,}79\%,$$

$$\sigma^2 = 2/3*3/4*(11-7{,}79)^2\ (\%)^2 + 2/3*1/4*(5{,}5-7{,}79)^2\ (\%)^2 +$$
$$+1/3*3/4*(5{,}5-7{,}79)^2\ (\%)^2 + 1/3*1/4*7{,}79\text{^}2\ (\%)^2 = 11{,}81\ (\%)^2,$$
$$\sigma = 3{,}52\%,\ \gamma = 0{,}45\,.$$

2. Дюрация и мера выпуклости

Дюрация. *Дюрация* – средневзвешенная продолжительность платежей по облигации. Дюрация фактически сводится эквивалентному сроку (2), если при её расчёте учитываются все поступления, включая проценты.

Понятие «дюрация» (англ. duration – длительность) впервые было введено американским учёным Фредериком Маколи (F. Macaulay) в 1938 г. Этот показатель играет важную роль при анализе долгосрочных ценных бумаг с фиксированным доходом. Дюрация применяется в качестве одного из косвенных подходов к количественной оценке риска долговых инструментов. В целях упрощения предположим, что купонный платёж осуществляется 1 раз в год. Тогда дюрацию Маколи (D_M) с учётом процентной ставки r определяют следующим образом:

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t\, d_{\text{куп},\, t}}{(1+r)^t}}{P_{\text{вн}}} + \frac{\frac{nP_{\text{н}}}{(1+r)^n}}{\text{P}_{\text{вн}}} =$$

$$= \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t\, d_{\text{куп},\, t}}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{d_{\text{куп},\, t}}{(1+r)^t} + \frac{P_{\text{н}}}{(1+r)^n}} + \frac{\frac{nP_{\text{н}}}{(1+r)^n}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{d_{\text{куп},\, t}}{(1+r)^t} + \frac{P_{\text{н}}}{(1+r)^n}}, \qquad (3)$$

или

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{t\, S_t}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{S_t}{(1+r)^t}}, \qquad (4)$$

где $d_{\text{куп},\, t}$ – величина платежа по купону за *t*-й период, руб., *n* – число лет (срок) погашения, r – процентная ставка, равная доходности к погашению или рыночной процентной ставке, $P_{\text{вн}}$ – текущая (внутренняя) стоимость потока доходов и поступлений по облигации:

$$\text{P}_{\text{вн}} = \sum_{t=1}^{n} \frac{d_{\text{куп},\, t}}{(1+r)^t} + \frac{P_{\text{н}}}{(1+r)^n},$$

$P_{\text{н}}$ – номинальная цена облигации, S_t – доход по облигации в конце года *t*:

$$S_t = d_{\text{куп},t}, \ \ t = 1,...,n-1; \quad S_n = d_{\text{куп},n} + P_{\text{н}}.$$

В расчётах удобно использовать дисконтирующий множитель $v = (1+r)^{-1}$.

Перепишем формулу расчёта дюрации в виде

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} t\, S_t v^t}{P_{\text{вн}}}. \tag{5}$$

При расчете дюрации часто используют условие равенства текущей рыночной цены и внутренней стоимости облигации, т.е. в качестве процентной ставки рассматривают внутреннюю норму доходности по облигации. Тогда формула дюрации примет вид

$$D_M = \frac{\sum_{t=1}^{n} t\, S_t v^t}{P}. \tag{6}$$

Здесь P – рыночная цена облигации.

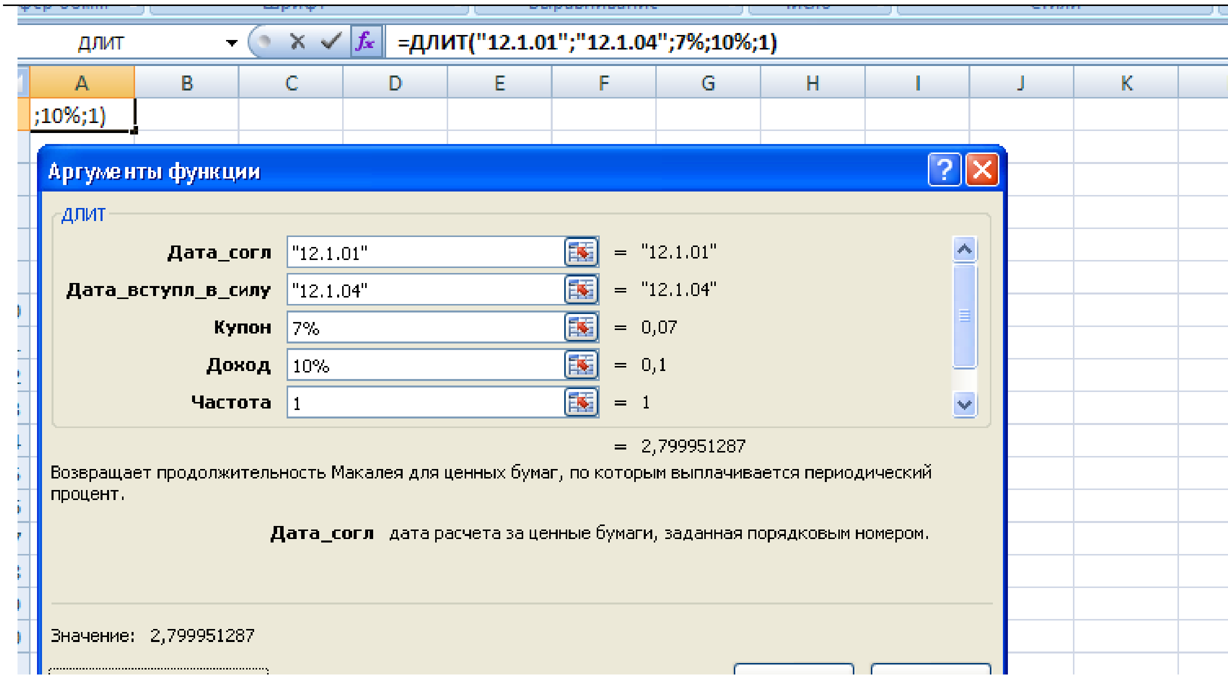
<u>Пример 3.</u> Облигация номиналом 1 000 руб. и ставкой купонного дохода 7%, выплачиваемого 1 раз в год, имеет срок обращения 3 года. Определим дюрацию данного обязательства, принимая рыночную процентную ставку (доходность к погашению), равной 10%. Для расчёта составим таблицу.

t	$d_{\text{куп } t}$, руб.	$P_{\text{н}}$	S_t	$\nu = (1+r)^{-1}$	ν^t	$S_t\, \nu^t$	$t\, S_t\, \nu^t$
1	70		70	0,90909	0,90909	63,6364	63,6364
2	70		70	0,90909	0,82645	57,8512	115,702
3	70	1000	1070	0,90909	0,75131	803,907	2411,72
						925,394	2591,06

Дюрация = 2591,06/925,394 = 2,79995.

Во многих прикладных программах, в частности, электронных таблицах операции вычисления дюрации автоматизированы в виде удобных функций.

Рассмотрим для приведённого примера применение функции ДЛИТ. Эта функция возвращает дюрацию Маколи, исходя из номинальной цены облигации 100 руб., поэтому купонную ставку укажем в процентах:



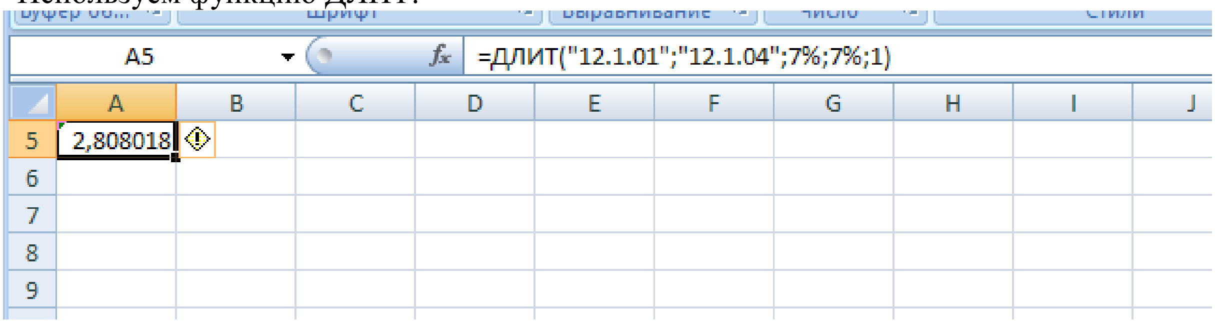
Таким образом, средняя продолжительность платежей по 3-летней купонной облигации равна приблизительно 2,8 года.

Пример 4. Теперь предположим, что процентная ставка в условиях предыдущего примера такова, что внутренняя стоимость облигации равна номинальной цене. Такое равенство возможно, если процентная ставка, как и ставка купона, составляет 7%. В таком случае расчёт дюрации следующий.

t	$d_{\text{куп } t}$, руб.	$P_{\text{н}}$	S_t	$v = (1+r)^{-1}$	v^t	$S_t v^t$	$t S_t v^t$
1	70		70	0,93458	0,93458	65,4206	65,4206
2	70		70	0,93458	0,87344	61,1407	122,281
3	70	1000	1070	0,93458	0,8163	873,439	2620,32
						1000	2808,02

Дюрация (по таблице) = 2808,02/1000= 2,808.

Используем функцию ДЛИТ:



Как видно, после снижения процентной ставки дюрация облигации возросла. Вообще, с ростом процентной ставки r на рынке и соответственно доходности операций, дюрация купонной облигации уменьшается, и наоборот.

Выводы:

- дюрация облигации с нулевым купоном всегда равна сроку её погашения:

$$D_M = \frac{\dfrac{nP_{\text{н}}}{(1+r)^n}}{\dfrac{P_{\text{н}}}{(1+r)^n}} = n$$
;

- дюрация купонной облигации всегда меньше срока погашения:

$$D_M < \frac{\sum_{t=1}^{n} \dfrac{n d_{\text{куп},t}}{(1+r)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \dfrac{d_{\text{куп},t}}{(1+r)^t} + \dfrac{P_{\text{н}}}{(1+r)^n}} + \frac{\dfrac{nP_{\text{н}}}{(1+r)^n}}{\sum_{t=1}^{n} \dfrac{d_{\text{куп},t}}{(1+r)^t} + \dfrac{P_{\text{н}}}{(1+r)^n}} = \frac{n\left(\sum_{t=1}^{n} \dfrac{d_{\text{куп},t}}{(1+\mathbf{r})^t} + \dfrac{P_{\text{н}}}{(1+\mathbf{r})^n}\right)}{\sum_{t=1}^{n} \dfrac{d_{\text{куп},t}}{(1+\mathbf{r})^t} + \dfrac{P_{\text{н}}}{(1+\mathbf{r})^n}} = n.$$

Дюрацию часто интерпретируют как средний срок обязательства с учётом его текущего (современного) значения или как срок эквивалентного обязательства без текущих выплат (бескупонной облигации). Облигация с более высоким купоном имеет меньшую дюрацию.

Расчёт дюрации для портфеля активов

Портфель – это набор различных ценных бумаг одного владельца, которые выбраны на основе учёта целей данного инвестора по результатам анализа.

Для портфеля, состоящего из финансовых активов с фиксированным доходом (например, из облигаций), дюрация находится как средняя взвешенная величина дюраций составляющих портфеля:

$$D_M = \sum_{i=1}^{n} \theta_i D_{M,i} \qquad (7)$$

где n – число видов активов, θ_i – удельный вес i-го актива в стоимости портфеля, $D_{M,i}$ – дюрация этого актива.

Пример 5. Инвестор покупает на 400 тыс. р. облигаций типа А и на 800 тыс.р. – типа В. Дюрация А 3 года, дюрация В 6 лет. Определите дюрацию портфеля. По формуле (7): $D_M = \frac{400}{1200} \cdot 3 + \frac{800}{1200} \cdot 6 = 5 \textit{лет}.$

Модифицированная дюрация является показателем чувствительности цены облигации к уровню рыночной процентной ставки r и находится по формуле

$$D_M^{\ *} = \frac{D_M}{1+\frac{r}{m}}, \tag{8}$$

где m – число выплат купонных доходов в году, в частности, для выплаты купона 1 раз в году, получаем

$$D_M^{\ *} = \frac{D_M}{1+r}. \tag{9}$$

Модифицированная дюрация, вычисляемая по формуле (9), позволяет измерить риск изменения цены облигации при обратном изменении уровня процентной ставки. Для вывода формулы (9) можно воспользоваться разложением прироста цены относительно процентной ставки по формуле Тейлора:

$$\Delta P = \frac{dP}{dr}\Delta r + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2P}{dr^2}\Delta r^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{d^3P}{dr^3}\Delta r^3 + \ldots$$

В правой части этой формулы отбросим все слагаемые, кроме первого:

$$\Delta P \approx \frac{dP}{dr}\Delta r. \tag{10}$$

Поскольку подразумеваем, что $P = P_{вн}$, то, учитывая (10), получаем

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} \approx \frac{dP}{dr} = \frac{dP_{вн}}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{\sum S_t\ 1+r_{об}\ ^{-t}}{1+r} =$$

$$= -\frac{\sum tS_t v^t}{1+r} \overset{6}{=} -\frac{PD_M}{1+r} \overset{df}{=} -PD_M^*,$$

где

$$D_M^* = -\frac{\Delta P}{P\Delta r} = \frac{D_M}{1+r}. \tag{11}$$

Из соотношений (10) и (11) вытекает формула

$$\Delta P \approx -PD_M^*\Delta r. \tag{12}$$

Пример 6. Приведём данные по облигации внутреннего валютного займа, выпущенной в 1997 г.

1	**Анализ купонных облигаций**				
2	Серия ОВВЗ	7		Дата покупки	18.03.97
3	Дата выпуска	14.05.96		Цена к номиналу	34,75
4	Дата погашения	14.05.11		Норма доходности	12,00%
5	Дата первой выплаты купона	14.05.97			
6	Ставка купона	3,00%			
7	Цена погашения (в % к номиналу)	100,00			
8	Число выплат в году	1			
9					
10	Дата предыдущей выплаты купона	14.05.96			
11	Дата следующей выплаты купона	14.05.97			
12	Дней от начала периода купона до покупки	304			
13	Число дней в периоде купона	360			
14	Число дней до следующей выплаты	56			
15	Число оставшихся выплат	15			
16					
17	Дюрация (Macaulay's duration)	9,39			
18	Модифицированная дюрация	8,39			
19	Цена облигации исходя из доходности (P)	40,06			
20	Доходность к погашению (YTM)	13,63%			
21	Текущая доходность	8,63%			
22	Накопленный процент (НКД)	2,53			

Указание. Выполнить расчёты дюрации и показателей доходности самостоятельно.

В примере 6 фигурирует показатель модифицированной дюрации $D_M{}^* = 9{,}394 / 1{,}12 \approx 8{,}39$.

Пример 7. (на основе примера 3) Оценить влияние на цену облигации предполагаемого повышения рыночной процентной ставки с 10 до 10,5%, считая, что $P = 925{,}394$.

Решение. Облигация из примера 3 характеризуется модифицированной дюрацией

$$D_M^* = \frac{2{,}79995}{1+0{,}1} = 2{,}5454 \text{ года.}$$

Используя полученное значение модифицированной дюрации, оценим влияние на цену облигации предполагаемого повышения рыночной процентной ставки с 10 до 10,5% при $P = 925{,}394$. По формуле (12) получаем

$$\Delta P \approx -925{,}394 \cdot 2{,}5454 \cdot (0{,}105 - 0{,}1) = -11{,}77753 \text{ (д.е.).}$$

Как видим, цена облигации сократится на 11,77753 д.е., или на 1,27 %.

Мера выпуклости

Снова воспользуемся разложением прироста цены относительно процентной ставки по формуле Тейлора:

$$\Delta P = \frac{dP}{dr}\Delta r + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2P}{dr^2}\Delta r^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{d^3P}{dr^3}\Delta r^3 + \ldots,$$

но рассмотрим уже второе слагаемое. Производная второго порядка цены по процентной ставке, делённая на цену, даст *меру выпуклости (convexity)*:

$$C = \frac{1}{P} \cdot \frac{d^2 P}{dr^2}. \tag{13}$$

Подсчитаем эту величину:

$$C = \frac{1}{P} \cdot \frac{d^2 P}{dr^2} = \frac{\sum t(t+1) S_t v^t}{P(1+r)^2} = \frac{\sum t(t+1) S_t v^{t+2}}{P}. \tag{14}$$

Мера выпуклости уточняет зависимость изменения цены облигаций от динамики процентной ставки. Эта зависимость ввиду положительности C является строго выпуклой функцией.

Если процентные ставки растут, цены облигаций обычно падают, но, линейным это соотношение можно считать лишь приближённо. Скорректировать прогноз позволяет мера выпуклости. Чем больше эта величина при относительно небольшом прогнозируемом изменении цен облигации, тем осторожнее нужно относиться к этому прогнозу.

Пример 8. Для примера 3 рассчитаем меру выпуклости. Составим таблицу.

t	$d_{\text{куп } t}$, руб.	$P_{\text{н}}$	S_t	$\nu = (1+r)^{-1}$	ν^t	$S_t \nu^t$	$t S_t \nu^t$	$t(t+1) S_t \nu^{t+1}$
1	70		70	0,90909	0,90909	63,6364	63,6364	105,184
2	70		70	0,90909	0,82645	57,8512	115,702	286,866
3	70	1000	1070	0,90909	0,75131	803,907	2411,72	7972,63
						925,394	2591,06	8364,68

C = 8364,68/925,394 = 9,03904.

3. Стоимость под риском

Value at Risk (VaR) – стоимостная мера риска, абсолютный максимальный размер потерь, которые можно ожидать при владении финансовым инструментом (или их портфелем) на протяжении некоторого фиксированного периода времени (временнóго горизонта) в нормальных рыночных условиях при заданном уровне доверительной вероятности.

Это выраженная в денежных единицах оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с заданной вероятностью. Еще называется показателем «16:15», ибо это время, в которое он должен был быть на столе у главы правления банка J.P. Morgan. В этом банке показатель VaR и был впервые введен в обиход с целью повышения эффективности работы с рисками.

VaR характеризуется тремя параметрами:

- **временным горизонтом**, который зависит от рассматриваемой ситуации. По базельским документам – 10 дней, по методике Risk Metrics – 1 день. Чаще распространен расчет с временным горизонтом 1 день. 10 дней используется для расчета величины капитала, покрывающего возможные убытки;
- **доверительным интервалом** (confidence level) – уровень допустимого риска. По базельским документам используется величина 99%, в системе RiskMetrics – 95%.
- **базовой валютой**, в которой измеряется показатель.

VaR – это величина убытков, которая с вероятностью, равной уровню доверия (например, 99%), не будет превышена. Следовательно, в 1% случаев убыток составит величину, большую, чем VaR.

Проще говоря, вычисление величины VaR проводится с целью заключения утверждения подобного типа: «Мы уверены на *X*% (с вероятностью *X*/100), что наши потери не превысят *Y* долларов в течение следующих *N* дней». В данном предложении неизвестная величина *Y* и есть VaR.

Для оценивания VaR применяются преимущественно параметрический и непараметрический методы. При непараметрическом оценивании непосредственно используются данные статистического ряда распределения финансовой характеристики (цены, дохода, валютного курса и т.д.). Приведём формулу VaR, основанную на применении, пожалуй, самого распространённого параметрического метода. В последнем случае при оценивании VaR используются параметры распределения вероятностей экономических характеристик.

Имеем

$$\mathrm{VaR} = -V \quad -\mu + z\sigma \quad ,$$

где μ – ожидаемая доходность, т.е. средняя величина доходности актива; σ – среднее квадратическое отклонение; *V* – текущее значение стоимости актива (в денежных единицах)

Предположение о нормальности распределения доходностей позволяет нам вычислить z-уровень для данного доверительного уровня. Так, для 95%-ного доверительного уровня имеем z = 1.645 – квантиль нормального распределения для вероятности в 95%.

Замечание. Для получения значения z при заданном уровне вероятности в MSExcel можно воспользоваться функцией НОРМСТОБР(0,95)=1,644485 или обратной к ней НОРМСТРАСП(1,645)=0,95.

Рассмотрим оценивание VaR для портфеля из двух составляющих. Пусть VaR_A является рисковой стоимостью для составляющей *A* портфеля, а VaR_B является рисковой стоимостью для составляющей *B* портфеля. И пусть корреляции доходов составляющих будет равна ρ. Тогда общая рисковая стоимость удовлетворяет формуле

$$(\mathrm{VaR}_{total})^2 = (\mathrm{VaR}_A)^2 + (\mathrm{VaR}_B)^2 + 2 \times \rho \times \mathrm{VaR}_A \times \mathrm{VaR}_B \,.$$

Заметим, что:

- если эти две составляющие полностью коррелированны ($\rho = +1$), то VaR_{total} является суммой рисковых стоимостей этих двух составляющих, если $\rho = -1$, то модулем разностей;
- в любом другом случае имеется расхождение прибыли, и VaR_{total} портфеля тогда меньше, чем сумма VaR двух составляющих.

МОДУЛЬ 2

Доходность и волатильность портфеля активов

Целесообразность операций с любым финансовым активом (эффективность) оценивается с помощью двух взаимосвязанных характеристик: доходность – риск. Одним из важных приёмов сокращения риска, применяемых в инвестиционных решениях, является диверсификация, под которой понимается распределение общей инвестированной суммы между несколькими активами. Диверсификация базируется на простой гипотезе. Если каждая составляющая портфеля характеризуется некоторой дисперсией дохода, то доход портфеля в целом имеет дисперсию, определяемую его составом. Таким образом, изменяя состав портфеля, можно изменять суммарную дисперсию дохода, а в некоторых случаях – свести её к минимуму.

Если нет особых требований к структуре портфеля, то при его формировании принимается во внимание не только волатильность, но также доходность портфеля. Степень важности каждой из этих характеристик (приоритет) определяется инвестором в зависимости от целого ряда условий. В некоторых случаях удаётся подобрать структуру портфеля, для которого одна из характеристик зафиксирована, а другая оптимальна.

Доходность портфеля, очевидно, равна средней взвешенной величине:

$$R = \sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i ,$$

где n – число видов активов, θ_i – доля этого актива в портфеле, R_i – доходность i-го актива.

Обычно в расчётах оперируют средними величинами, учитывая, что доходности меняются. Если цена акции, по которой выплачивают годовые дивиденды 10 руб., составляет 100 руб., то текущая доходность 10 %. Такова же и внутренняя норма доходности, при условии, что акция будет приносить такие дивиденды бесконечно долго.

Пусть, например, для актива наблюдались следующие колебания доходности (например, текущей): 10%, 13% и 10%. Тогда среднее (ожидаемая доходность) составит 11%.

Обозначим m_i- ожидаемую доходность i-го актива, а m_p – ожидаемую доходность портфеля, тогда

$$m_p = \sum_{i=1}^{n} \theta_i m_i , \qquad (1)$$

Приведём расчётные формулы для статистических характеристик портфеля, содержащего n видов активов, которые вытекают из двух основных свойств дисперсии.

1. Если все значения случайной величины x увеличить в α раз, то дисперсия увеличится в α^2 раз: $\sigma_{x\alpha}{}^2 = \alpha^2 \sigma_x{}^2$.
2. Дисперсия суммы двух случайных величин x и y находится как

$$\sigma_{x+y}{}^2 = \sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 + \rho_{xy}\sigma_x\sigma_y ,$$

где ρ_{xy} – коэффициент парной корреляции между переменными x и y:

$$\rho_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,y)}{\sigma_x\sigma_y}, \ \operatorname{cov}(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) ,$$

$\operatorname{cov}(x,y)$ – ковариация между этими переменными.

Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости между переменными. Значение коэффициента корреляции изменяется от –1 до 1. Если значение приближается к –1 (1), то между переменными существует сильная отрицательная (положительная) линейная зависимость. Если этот коэффициент равен нулю, то говорят, что *переменные статистически независимы* (некоррелированы) друг с другом.

Для портфеля, состоящего из двух активов, получаем следующее значение волатильности (стандартного отклонения портфеля):

$$\sigma_p = \sqrt{\theta_1^2 \sigma_1{}^2 + \theta_2^2 \sigma_2{}^2 + 2\theta_1\theta_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}\,. \qquad (2)$$

Пусть портфель состоит из n видов активов, в долях соответственно $\theta_1,...,\theta_n$, тогда волатильность (стандартное отклонение портфеля) составит

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \theta_i^2 \sigma_i{}^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1+i}^{n} \theta_i \theta_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}\,. \qquad (3)$$

Приведём также формулы доходности и волатильности портфеля с тремя активами на основании формул (1) и (3). Получаем:

$$m_p = \theta_1 m_1 + \theta_2 m_2 + \theta_3 m_3, \qquad (4)$$

$$\sigma_p = \sqrt{\theta_1{}^2\sigma_1{}^2 + \theta_2{}^2\sigma_2{}^2 + \theta_3{}^2\sigma_3{}^2 + 2\theta_1\theta_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2\theta_1\theta_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2\theta_2\theta_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3}\,. \qquad (5)$$

Пример 1. Рассмотрим инвестиционный портфель объёмом 500 тыс. руб., содержащий 2 вида акций – А и В, одинаковой номинальной цены. Объём акций А в портфеле составляет 100 тыс. руб. Ежемесячные показатели доходности активов А и В представлены в таблице.

Заметим, что доходность второго актива немного выше, чем доходность первого, а волатильность второго актива заметно выше. Рассчитаем доли (удельные веса) активов в портфеле. Доля первого актива 100/500 = 0,2. Соответственно доля второго актива в общей стоимости портфеля составит 0,8.

	Ежемесячные показатели доходности активов *A* и *B*, %					
	t		*A*		*B*	Функция (Excel)
	1		6,35		9,02	
	2		6,88		7,65	
	3		6,99		9,12	
	4		7,91		7,01	
	5		7,4		5,69	
	6		9,12		8,65	
	7		6,38		6,36	
	8		6,13		10,23	
	9		7,55		6,56	
	10		8,12		7,01	
	11		6,99		5,23	
	12		7,19		6,56	
Средние уровни доходности		$\bar{x}_A =$	7,24583	$\bar{x}_B =$	7,42417	СРЗНАЧ()

Дисперсия (с учетом степеней свободы)	$\sigma_A^2 =$	0,71904	$\sigma_B^2 =$	2,33088	ДИСП()
Стандартные отклонения	$\sigma_A =$	0,84797	$\sigma_B =$	1,52672	СТАНОТКЛОН()
Ковариация	$\operatorname{cov}\ x_A, x_B\ =$		–0,197		КОВАР()
Коэффициент корреляции	$\rho_{AB} =$		–0,166		КОРРЕЛ()

Ожидаемая доходность портфеля

$$\bar{x}_p = 0,2\bar{x}_A + 0,8\bar{x}_B = 7,3885\%.$$

Волатильность (риск) портфеля:

$$\sigma_p = \sqrt{0,2^2\sigma^2{}_A + 0,8^2\sigma^2{}_B + 2\cdot 0,2\cdot 0,8\cdot \rho_{AB}\cdot \sigma_A\sigma_B} = 1,205.$$

Если считать, что активы некоррелируют между собой, получим

$$\sigma_p = \sqrt{0,2^2\sigma^2{}_A + 0,8^2\sigma^2{}_B} = 1,2331.$$

Отрицательная корреляция показателей доходности немного снизила волатильность портфеля.

Пример 2. Рассмотрим расчёт доходности и риска для портфеля из трёх активов. Пусть доли активов одинаковы.

доли	0,333333	0,333333	0,333333
	a	b	c
	4	4	8
	6	5	4
	7	5	13
	8	5	10
	8	5	7
	9	5	12

Результаты расчётов:

21							
22	доли	0,333333	0,333333	0,333333			
23		a	b	c			
24		4	4	8			
25		6	5	4			
26		7	5	13		corr12	0,821584
27		8	5	10		corr13	0,4343
28		8	5	7		corr23	0,146385
29		9	5	12			
30	sigma^2	3,2	0,166667	11,2			
31	sigma	1,788854	0,408248	3,34664			
32	m_i	7	4,833333	9			
33	m_p	6,944444					
34	sigma_p^2	2,374074					
35	sigma_p	1,540803					

Доходность портфеля 6,94, риск 1,54.

Приведём формулы расчёта волатильности портфеля с двумя видами активов при разных значениях коэффициента корреляции. Рассматриваем случаи полной положительной корреляции ($\rho_{12}=1$), полной отрицательной корреляции ($\rho_{12}=-1$) и отсутствия корреляции ($\rho_{12}=0$). Обозначим доли активов в портфеле через θ_1,θ_2. Ясно, что $\theta_1+\theta_2=1$.

Волатильность портфеля с двумя видами активов
(σ_1,σ_2 – волатильности активов)

Структура портфеля $\theta_1;\theta_2$	Коэффициент корреляции ρ_{12}		
	+1	0	-1
(1;0)	σ_1	σ_1	σ_1
(0,75;0,25)	$0,75\sigma_1+0,25\sigma_2$	$0,25\sqrt{9\sigma_1^2+\sigma_2^2}$	$\lvert 0,75\sigma_1-0,25\sigma_2\rvert$
(0,5;0,5)	$0,5\ \ \sigma_1+\sigma_2$	$0,5\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$	$0,5\lvert\sigma_1-\sigma_2\rvert$
(0,25;0,75)	$0,25\sigma_1+0,75\sigma_2$	$0,25\sqrt{\sigma_1^2+9\sigma_2^2}$	$\lvert 0,25\sigma_1-0,75\sigma_2\rvert$
(0;1)	σ_2	σ_2	σ_2

В частности при $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ получаем следующие формулы.

Волатильность портфеля с двумя видами активов ($\sigma_1=\sigma_2=\sigma$)

Структура портфеля $\theta_1;\theta_2$	Коэффициент корреляции ρ_{12}		
	+1	0	-1
(1;0)	σ	σ	σ
(0,75;0,25)	σ	$0,79\ \sigma$	$0,5\ \sigma$
(0,5;0,5)	σ	$0,71\ \sigma$	0
(0,25;0,75)	σ	$0,79\ \sigma$	$0,5\ \sigma$

(0;1)	σ	σ	σ

Указанная зависимость графически представлена на рисунке.

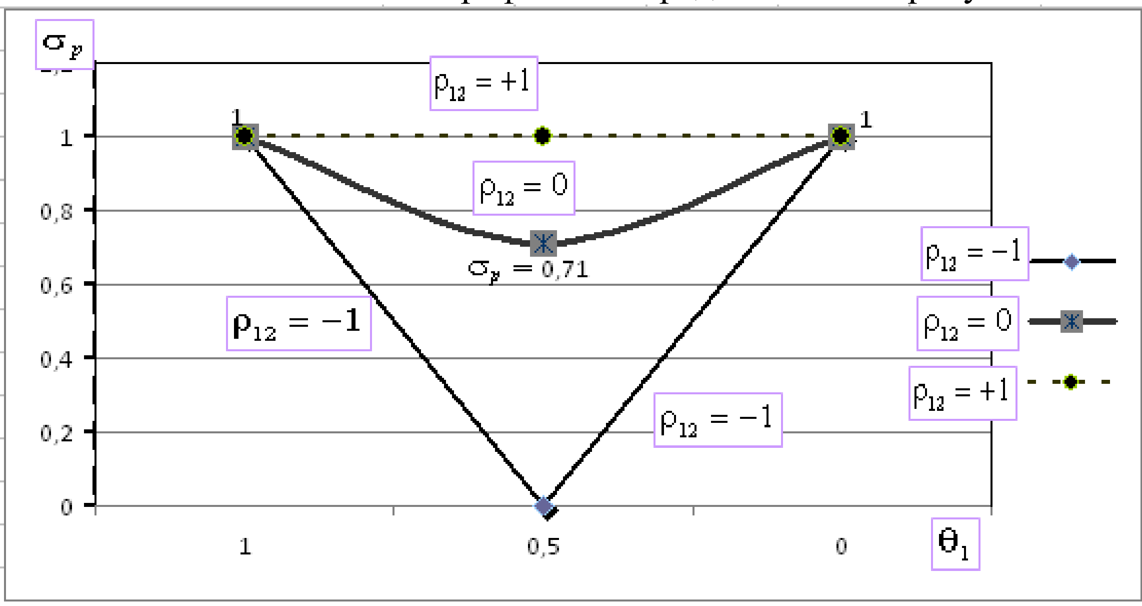


График волатильности портфеля с двумя видами активов ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$)

Теперь выясним, при какой структуре портфеля достигается минимум дисперсии $\sigma_p{}^2 = \theta_1^2\sigma_1{}^2 + \theta_2^2\sigma_2{}^2 + 2\theta_1\theta_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. При этом волатильность также будет минимальной. Если дисперсии активов одинаковы, то одним из соотношений долей активов, при котором риск портфеля минимален, является 0,5:0,5. Ясно также, что если какой-либо актив имеет нулевую дисперсию, то для минимизации риска портфеля все деньги нужно вложить в него. Пусть дисперсии активов положительны и различны. Не ограничивая общности в рассуждениях, будем считать, что $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

Используя соотношение $\theta_1 + \theta_2 = 1$, выразим $\theta_2 = 1 - \theta_1$ и преобразуем дисперсию портфеля: $\sigma_p{}^2 = \theta_1^2\sigma_1{}^2 + (1-\theta_1)^2\sigma_2{}^2 + 2\theta_1(1-\theta_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$. Поскольку функция $\sigma_p{}^2$ является непрерывной на ограниченном замкнутом множестве значений переменной $0 \le \theta_1 \le 1$, то она достигает на этом множестве наименьшего значения. Рассмотрим 3 случая.

1. Пусть активы находятся в полной положительной корреляции, $\rho_{12} = 1$, тогда волатильность портфеля

$$\sigma_p = \theta_1\sigma_1 + \theta_2\sigma_2 = \theta_1\sigma_1 + (1-\theta_1)\sigma_2 = \sigma_2 + \theta_1(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Поскольку $\sigma_1 - \sigma_2 < 0$, риск портфеля будет минимальным при $\theta_1 = 1$, соответственно $\theta_2 = 0$.

2. Пусть активы находятся в полной отрицательной корреляции, $\rho_{12} = -1$. Тогда волатильность портфеля $\sigma_p = |\theta_1\sigma_1 - \theta_2\sigma_2|$. Риск будет минимальным при $\theta_1 = \theta_2\sigma_2 / \sigma_1$. Учитывая, что $\theta_1 + \theta_2 = 1$, получаем $\theta_2 = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1}, \theta_1 = \dfrac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1}$. При этом портфель оказывается безрисковым: $\sigma_p = 0$.

3. Пусть $|\rho_{12}| < 1$. Для нахождения стационарной точки приравниваем производную дисперсии к нулю:

$$(\sigma_p^2)' = 2\theta_1\sigma_1^2 - 2(1-\theta_1)\sigma_2^2 + 2(1-\theta_1)\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\theta_1\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 =$$

$$= 2\theta_1(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2 = 0.$$

Из условия $|\rho_{12}| < 1$ вытекает, что производная второго порядка

$$(\sigma_p^2)'' = 2(\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) > 0.$$

Поэтому в стационарной точке достигается минимум дисперсии:

$$\theta_1^* = \frac{\sigma_2^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}, \theta_2^* = \frac{\sigma_1^2 - \rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - 2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}.$$

(* указывает на оптимальность результата).

МОДУЛЬ 3

ТЕМА: Портфельное инвестирование

- Понятие инвестиционного портфеля.
- Расчёт риска для финансового портфеля.
- Эффективность портфеля и способы её оптимизации.
- Оценка волатильности для портфеля активов.
- Задача Г. Марковица. Дилемма «риск-доходность» для портфеля активов, задачи субоптимизации структуры портфеля, интерпретация результата.

Портфель – это набор различных ценных бумаг одного владельца, которые выбраны на основе учёта целей данного инвестора по результатам анализа.

При выборе стратегии вложения средств все инвесторы определяют для себя принципы формирования инвестиционного портфеля, который представляет собой комбинацию разных типов инвестиций. Инвестиционный портфель должен быть сформирован диверсифицировано: чтобы снизить общий риск потерь и чтобы потери от одной инвестиции не повлияли на состояние портфеля в целом.

При формировании портфеля нужно учитывать желаемую норму прибыли, то есть портфель должен обеспечивать приращение стоимости произведенных инвестиций.

Управление портфелем, или *размещение* активов, сводится к нахождению таких пропорций в структуре инвестиционного портфеля, чтобы обеспечить наиболее высокую норму прибыли и максимально снизить уровень риска. В некоторых случаях добиться этой цели можно с помощью несложных расчётов. Одним из таких случаев является наличие в портфеле лишь двух типов финансовых активов.

Пример 1. Рассмотрим портфель, состоящий из двух видов ценных бумаг: акций с ожидаемой доходностью 12% и облигаций, доходность по которым равна 5,1%. Стандартное отклонение акций 21,2%, облигаций — 8,3%.

Риск портфеля из двух активов будет рассчитываться по формуле

$$\sigma = \sqrt{2V\sigma_{ак}\sigma_{об}\theta_{ак}\theta_{об} + \sigma_{ак}^2\theta_{ак}^2 + \sigma_{об}^2\theta_{об}^2},$$

где $\sigma_{ак} = 21{,}2\%$, $\sigma_{об} = 8{,}3\%$, $\theta_{ак}, \theta_{об}$ – доли акций и облигаций в портфеле, причём сумма долей равна 1.

Ожидаемая доходность портфеля = доля акций $\times$ 12%+доля облигаций $\times$ 5,1% (табл.).

Несложно видеть, что увеличение удельного веса акций в портфеле увеличивает его доходность, но усугубляет показатель риска.

Портфель 0 состоит только из облигаций, тогда как портфель 21 – только из акций. Портфель, состоящий только из облигаций, имеет ожидаемую доходность 5,1%, а его стандартное отклонение равно 8,3%. Портфель, состоящий только из акций, имеет ожидаемую доходность 12%, а стандартное отклонение – 21,2%.

Портфель, состоящий на 60% из акций и на 40% из облигаций, будет иметь ожидаемую доходность 9,2%, стандартное отклонение доходности по такому портфелю составит 13,71%, если корреляция между изменениями доходностей по облигациям и акциям равна 0,18.

Расчёты риска и доходности портфеля при значениях коэффициента корреляции между активами –1; –0,7; 0; 0,18; 1

Портфель	Доля актива		Ожидаемая	Риск портфеля при корреляции, соответственно:					MAX
	акций	облигаций	доходность,%	-1,00	-0,70	0,00	0,18	1,00	из альтерн.
1	**0,00**	**1,00**	**5,1**	8,30	8,30	8,30	8,30	8,30	**8,30**
2	**0,05**	**0,95**	**5,4**	6,83	7,18	7,96	8,14	8,95	**8,95**
3	**0,10**	**0,90**	**5,8**	5,35	6,17	7,77	8,12	9,59	**9,59**
4	**0,15**	**0,85**	**6,1**	3,88	5,34	7,74	8,24	10,24	**10,24**
5	**0,20**	**0,80**	**6,5**	2,40	4,76	7,88	8,50	10,88	**10,88**
6	**0,25**	**0,75**	**6,8**	0,93	4,54	8,18	8,87	11,53	**11,53**
7	**0,30**	**0,70**	**7,2**	0,55	4,74	8,61	9,35	12,17	**12,17**
8	**0,35**	**0,65**	**7,5**	2,03	5,30	9,17	9,93	12,82	**12,82**
9	**0,40**	**0,60**	**7,9**	3,50	6,13	9,83	10,58	13,46	**13,46**
10	**0,45**	**0,55**	**8,2**	4,98	7,13	10,58	11,29	14,11	**14,11**
11	**0,50**	**0,50**	**8,6**	6,45	8,25	11,38	12,06	14,75	**14,75**
12	**0,55**	**0,45**	**8,9**	7,93	9,43	12,24	12,87	15,40	**15,40**
13	**0,60**	**0,40**	**9,2**	9,40	10,66	13,15	13,71	16,04	**16,04**
14	**0,65**	**0,35**	**9,6**	10,88	11,93	14,08	14,59	16,69	**16,69**
15	**0,70**	**0,30**	**9,9**	12,35	13,22	15,05	15,48	17,33	**17,33**
16	**0,75**	**0,25**	**10,3**	13,83	14,52	16,03	16,40	17,98	**17,98**
17	**0,80**	**0,20**	**10,6**	15,30	15,84	17,04	17,34	18,62	**18,62**
18	**0,85**	**0,15**	**11,0**	16,78	17,17	18,06	18,29	19,27	**19,27**
19	**0,90**	**0,10**	**11,3**	18,25	18,51	19,10	19,25	19,91	**19,91**
20	**0,95**	**0,05**	**11,7**	19,73	19,85	20,14	20,22	20,56	**20,56**
21	**1,00**	**0,00**	**12,0**	21,20	21,20	21,20	21,20	21,20	**21,20**

В настоящее время управление инвестиционным портфелем осуществляется на основе концепции эффективного рынка, согласно которой все ценные бумаги имеют на рынке реальную (правильную) стоимость, а рынок ценных бумаг быстро и эффективно уточняет цены. Для оценки активности рынка могут использоваться модели поведения произвольно выбранных ценных бумаг, которые характеризуются рыночными индексами, а по ним можно оценивать и прогнозировать состояние фондового рынка. Отбирая ценные бумаги для инвестиционного портфеля посредством индексирования, инвесторы стремятся привести в соответствие структуру своих инвестиций с состоянием рынка.

Рассмотрим математическую формализацию задачи формирования оптимального портфеля, которую предложил американский экономист Г. Марковиц (H. Markovitz) в 1952 г.

Пусть в портфель планируется включить n видов активов. Обозначим доли активов в портфеле через $\theta = \theta_1,\ldots,\theta_n$. Ясно, что $\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1$. Кроме того, считаем $\theta_i \geq 0,\ i = \overline{1,n}$.

Последнее ограничение в некоторых случаях можно опустить. Если доля некоторого актива отрицательна, то содержательно это означает провести операцию «short sale» (короткая продажа). В таком случае можно рассматривать произвольные знаки неизвестных $\theta = \theta_1,\ldots,\theta_n$. Если такие операции невозможны, то необходимо ввести ограничения $\theta_i \geq 0$. Инвестор, формирующий портфель, обязуется через какое-то время поставить ценные бумаги i-го вида (вместе с доходом, какой они принесли бы их владельцу за это время). А сейчас он получает их денежный эквивалент, который присоединяет к своему капиталу, и покупает рекомендуемые оптимальным решением ценные бумаги. Так как ценные бумаги других видов (не i-го) более эффективны, то инвестор оказывается в выигрыше. Собственно, можно обойтись и без операции «short sale», если инвестору доступны займы денежных средств по безрисковой ставке.

Через несколько лет после исследования Марковица другой крупнейший американский экономист Д. Тобин заметил, что если на рынке есть безрисковые ценные бумаги (к таким можно отнести государственные ценные бумаги), то решение задачи об оптимальном портфеле сильно упрощается. Считается, что безрисковые бумаги некоррелированы с остальными. Портфель Тобина – это портфель Марковица, включающий безрисковые ценные бумаги.

Приведём математическую формализацию задачи Марковица.

Пусть R_i – случайная величина, характеризующая доходность i-го актива при условии, что все средства вложены только в него. Математическое ожидание доходности i-го актива обозначим m_i ($m_i = E\ R_i$).

Доходность портфеля – это случайная величина $R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i \theta_i$ с математическим ожиданием $m_p = \sum_{i=1}^{n} m_i \theta_i$ и дисперсией $D\ R_p = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j$. Мерой риска может служить корень квадратный из дисперсии – волатильность.

Минимизируем квадрат риска (дисперсию портфеля):

$$F\ \theta \coloneqq D\ R_p = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} \theta_i \theta_j,$$

где $b_{ij} = \mathrm{cov}\ R_i, R_j$.

Если риски (стандартные отклонения по i-ой ценной бумаге σ_i , то $b_{ij} = \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j$, где ρ_{ij} - коэффициент корреляции между доходностями I и j – го активов.

Если в портфель включены статистически независимые друг от друга активы, то ковариационная матрица $B = \left\| b_{ij} \right\|_{i,j=1}^{n}$ является диагональной, по диагонали стоят выборочные дисперсии активов.

Предположим, что требуемый уровень доходности портфеля задан и составляет m_p.

В результате получаем оптимизационную задачу:

$$F(\theta) := \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\theta_i\theta_j \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1, \ \sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i = m_p, \ \theta_i \ge 0, \ i = \overline{1,n}, \qquad (1)$$

для решения которой можно применить один из известных методов, например, метод множителей Лагранжа, графический метод или метод исключения переменных, а также можно воспользоваться одной из стандартных математических программ или электронных таблиц, включающих инструментарий численных методов решения задач квадратичного программирования.

Целевая функция задачи (1) – это квадрат риска (формулы (3), (5) из модуля 2).

Двойственной к задаче Марковица минимального риска (1) является задача максимальной доходности (F^* – минимальное значение целевой функции задачи (1)):

$$Ef(\theta) := \sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\theta_i = 1, \ \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\theta_i\theta_j = F^*, \ \theta_i \ge 0, \ i = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Задачи (1) и (2) являются задачами субоптимизации (оптимизируем проблему по одному критерию, фиксируя другой) и позволяют решать двухкритериальную проблему: снизить риск – увеличить доходность, поскольку увеличение доходности обычно сопровождается повышением риска. При этом $m_p = Ef^*$, где Ef^* – максимальное значение целевой функции задачи (2).

Замечание. В целях упрощения решения, можно уменьшить число переменных на 2, воспользовавшись ограничениями.

<u>Пример 2.</u> Найти портфель минимального риска, состоящий из некоррелированных между собой акций и облигаций из предыдущего примера. Требуемая от портфеля доходность 9,6 %.

Решение. Обозначим через θ_1, θ_2 доли акций и облигаций в портфеле соответственно. Получаем несложную задачу:

$$F(\theta) := 21{,}2^2\theta_1^2 + 8{,}3^2\theta_2^2 \to \min,$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 1,$$

$$12\theta_1 + 5{,}1\theta_2 = 9{,}6,$$

$$\theta_i \geq 0,\ i = \overline{1,2}.$$

Решение единственно: $\theta_1 = 1 - \theta_2$, $12(1-\theta_2) + 5{,}1\theta_2 = 9{,}6$, откуда $\theta_2 = 0{,}35$, $\theta_1 = 0{,}65$ (табл., портфель № 14). Целевая функция при этом несущественна и служит лишь для оценки уровня риска ($\sqrt{21{,}2^2 \cdot 0{,}65^2 + 8{,}3^2 \cdot 0{,}35^2} = 14{,}08$).

В более сложных задачах целевая функция весьма существенна.

Пример 3. Рассмотрим портфель, состоящий из трёх видов независимых ценных бумаг с ожидаемыми доходностями 10, 20 и 15 % и рисками (корень квадратный из дисперсии) 15, 40 и 12 соответственно. В таком случае ковариационная матрица является диагональной (по диагонали стоят дисперсии):

$$B = \begin{pmatrix} 225 & 0 & 0 \\ 0 & 1600 & 0 \\ 0 & 0 & 144 \end{pmatrix}.$$

Требуется сформировать портфель из трёх видов ценных бумаг с минимальным риском потерь капитала и ожидаемой доходностью 15%. Следовательно, нужно найти, в каких долях $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ должны входить ценные бумаги в портфель. Получаем следующую задачу:

$$F(\theta) := 225\theta_1^2 + 1600\theta_2^2 + 144\theta_3^2 \to \min,$$

$$10\theta_1 + 20\theta_2 + 15\theta_3 = 15,\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1,\ \theta_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}.$$

Решая задачу методом множителей Лагранжа. Сначала составляем функцию Лагранжа, регулярную, ввиду линейной независимости градиентов левых частей ограничений $(10, 20, 15)$ и $(1, 1, 1)$:

$$L\ \theta,\lambda,\mu\ \coloneqq 225\theta_1^2 + 1600\theta_2^2 + 144\theta_3^2 +$$
$$+\lambda\ 10\theta_1 + 20\theta_2 + 15\theta_3 - 15\ + \mu\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1$$

Применяем необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial L\ \theta_1,\theta_2,\theta_3,\lambda,\mu}{\partial\theta_1} = 225 \cdot 2\theta_1 + 10\lambda + \mu = 0,$$
$$\frac{\partial L\ \theta_1,\theta_2,\theta_3,\lambda,\mu}{\partial\theta_2} = 1600 \cdot 2\theta_2 + 20\lambda + \mu = 0,$$
$$\frac{\partial L\ \theta_1,\theta_2,\theta_3,\lambda,\mu}{\partial\theta_3} = 144 \cdot 2\theta_1 + 15\lambda + \mu = 0,$$

приходим к системе

$$2 \cdot 225\theta_1 + 10\lambda + \mu = 0, 2 \cdot 1600\theta_2 + 20\lambda + \mu = 0, 2 \cdot 144\theta_3 + 15\lambda + \mu = 0,$$
$$10\theta_1 + 20\theta_2 + 15\theta_3 = 15, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1.$$

Решение системы: $\theta_1 = 0{,}12$; $\theta_2 = 0{,}12$; $\theta_3 = 0{,}76, \mu = 276, \lambda = -33.$.

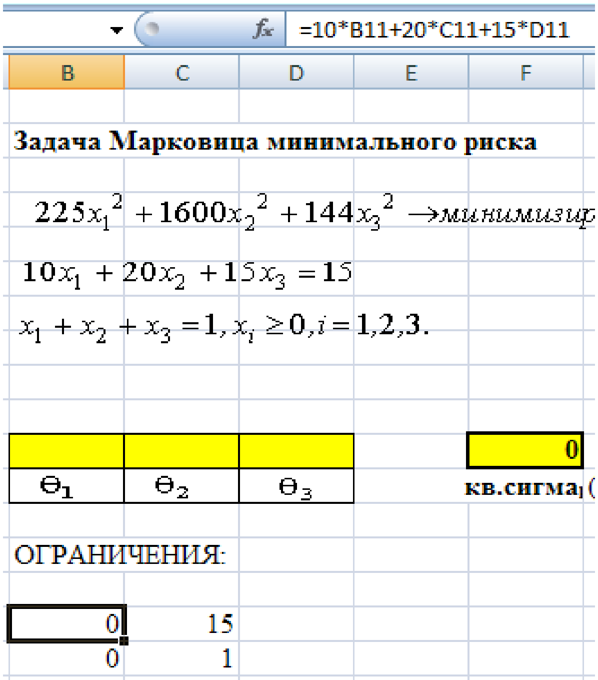
Матрица Гёссе (частных производных второго порядка функции Лагранжа по аргументам $\theta_1,\theta_2,\theta_3$:

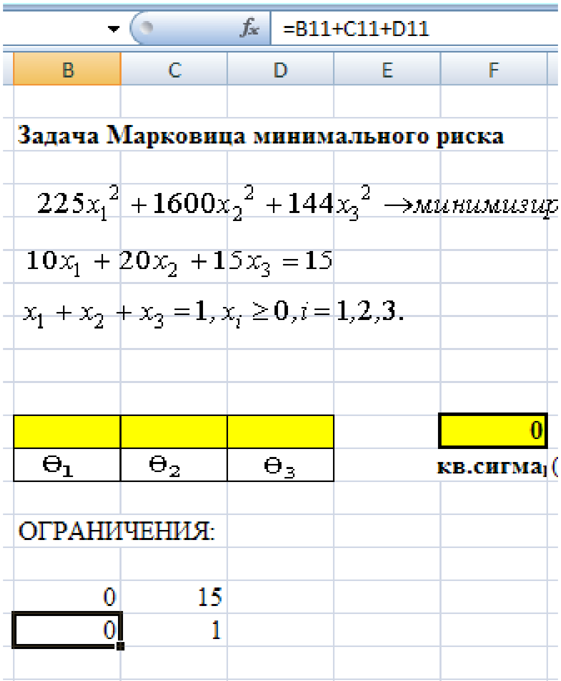
$$L''\ \cdot,\cdot,\cdot\ = \begin{pmatrix} 450 & 0 & 0 \\ 0 & 3200 & 0 \\ 0 & 0 & 288 \end{pmatrix}$$

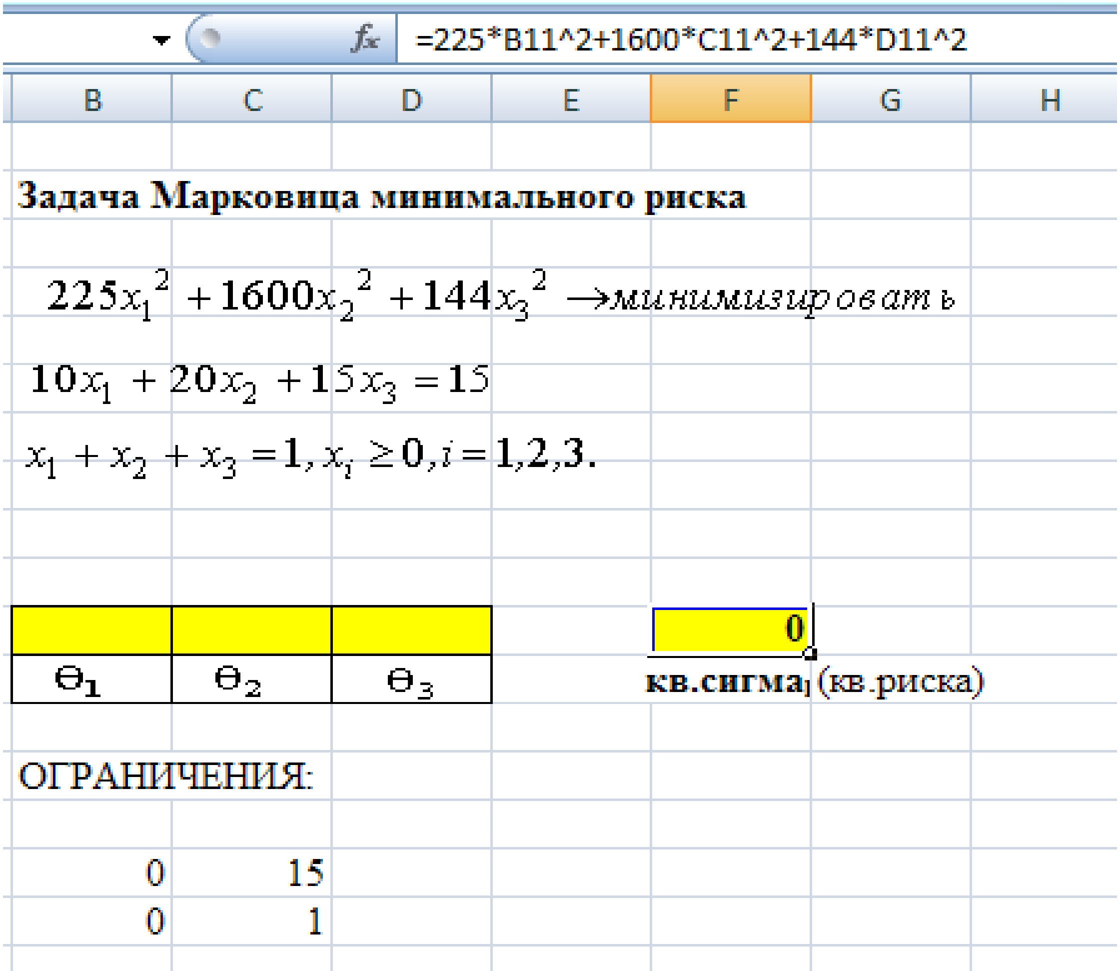
Положительно определена (вообще говоря, для любых действительных $\theta_1,\theta_2,\theta_3$), поэтому получена точка минимума.

Ответ: **структура портфеля Марковица минимального риска** $\theta_1 = 0{,}12$; $\theta_2 = 0{,}12$; $\theta_3 = 0{,}76.$.

Используя надстройку MSExcel «Поиск решения» для примера 3, получаем такие же результаты (рис. *а,б,в*):

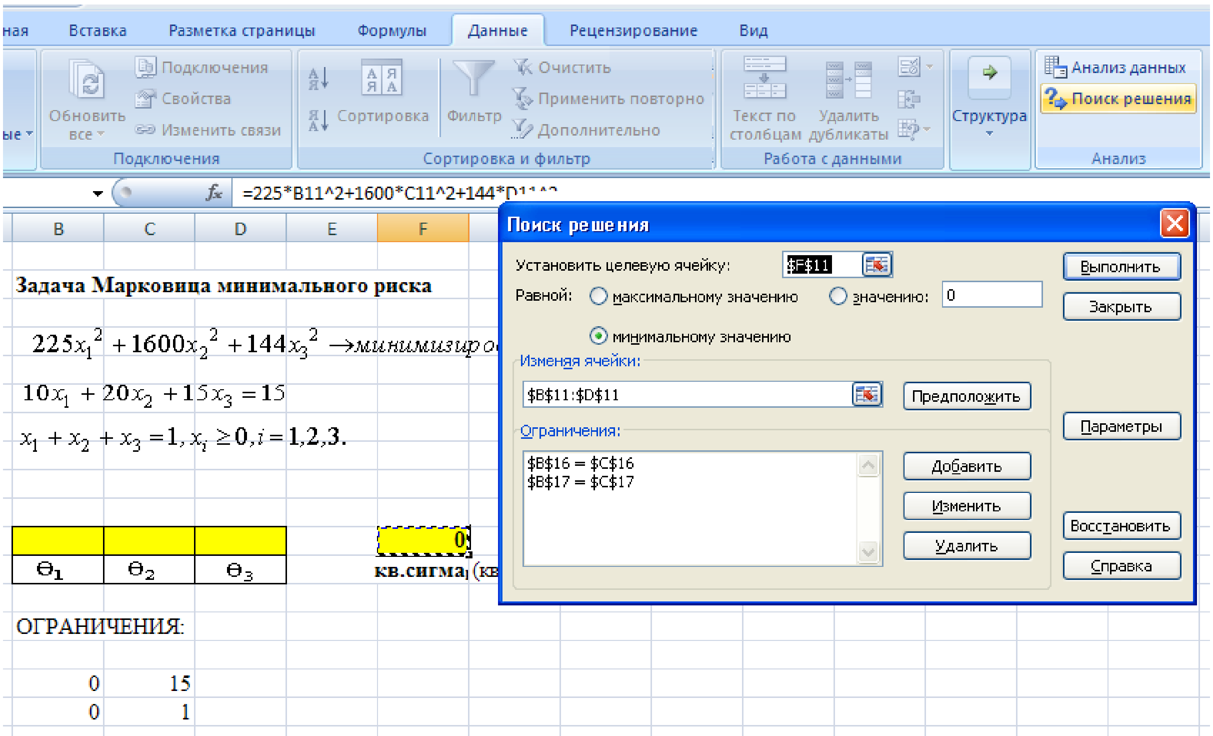






а

Рис.*а* – ввод формул в ячейки B11, B12, F11 и процедура решения задачи Марковица в MSExcel



б

Риск актива		Ожидаемая доходность	
15.0		10	
40.0		20	
12.0		15	
109.5	Целевая функция		
15	← Ограничение по доходности		
1	← Ограничение по сумме долей		
0.119950021	0.11995	0.760099958	Резуль-таты

в

Рис. *б* – вызов надстройки «Поиск решения»; *в* – результат решения задачи Марковица в MSExcel

Можно воспользоваться для решения этой задачей любой из математических программ, например, свободно доступной программой wxmaxima.

В примере 3 ожидаемые доходности и риски активов были заданы. В реальных задачах их требуется предварительно рассчитать. Кроме того, весьма сложно отследить, насколько активы коррелируют между собой.

Автор: И.Ю. Выгодчикова

МОДУЛЬ 4

ТЕМА: САРМ-модель. Оценка коэффициента β для актива и портфеля активов

Модель Capital Asset Pricing Model (CAPM) была предложена Уильямом Шарпом в 1964 г. Эту модель иногда называют SLM-моделью (Sharpe, Lintner, Mossin), поскольку считается, что она была независимо от Шарпа получена Джоном Линтнером (1965 г.) и Яном Моссином (1966 г.).

Рассматривается абстрактный рыночный инвестиционный портфель, включающий все котируемые на рынке ценные бумаги, причем пропорция вложения в конкретную бумагу равна ее доле в общей капитализации рынка. Модель САРМ является однофакторной регрессионной моделью, в которой в качестве единственного универсального фактора выбрана доходность рыночного портфеля.

Мерой риска служит коэффициент «бета» (β), определяющий соотношение доходности рассматриваемого актива или портфеля с уровнем доходности рыночного инвестиционного портфеля. Предполагается также, что по всем ценным бумагам имеются исторические данные о доходностях, на основании которых могут быть получены оценки математических ожиданий и дисперсий.

Формальная запись итогового уравнения данной модели выглядит следующим образом:

$$m_i = a_i + \beta_i m_r + \varepsilon_i,$$

где $m_i = E(R_i)$ – ожидаемый доход (математическое ожидание случайной величины доходности R_i на конкретную, i-ю, ценную бумагу) при условии равновесия рынка; β_i – бета-коэффициент акции i – мера рыночного риска акции (измеряет изменчивость доходности акции по отношению к доходности среднерыночного портфеля); $m_r = E(R_r)$ – средняя рыночная доходность.

С точки зрения предельного анализа β_i-коэффициент равен производной m_i по m_r. Он приближенно показывает, насколько изменится ожидаемая доходность i-й ценной бумаги при изменении рыночной доходности на единицу, и является коэффициентом наклона характеристической линии акции, представляющей собой графическое изображение уравнения регрессии, построенного по статистическим данным о доходности i-й акции и среднерыночной доходности.

Оценка параметров регрессионной модели осуществляется с помощью метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_i = \frac{\operatorname{cov}(R_i, R_r)}{\sigma_r^2}; \ \alpha_i = \overline{m}_i - \hat{\beta}_i \overline{m}_r,$$

где $\operatorname{cov}(R_i, R_r)$ – ковариация между доходностью акции i-й бумаги и доходностью рыночного портфеля; σ_r^2 – дисперсия доходности рыночного портфеля; β – коэффициент для рынка в целом всегда равен единице.

Для получения оценок уравнения регрессии можно воспользоваться прикладными программами («Регрессия» пакета анализа MSExcel, инструментарием программы Gretl, статистическими функциями любых электронных таблиц).

Пример. Определить коэффициенты – бета и дополнительные статистические параметры, характеризующие надежность уравнения регрессии в целом, и стандартные ошибки коэффициентов регрессии двух акций (А и В).

Данные о динамике ежемесячных показателей текущей доходности этих акций и доходности некоторого базового портфеля акций (рыночной доходности) приведены в таблице 1.

Таблица 1.

Ежемесячные характеристики доходностей акций

Месяцы	Доходность акций		
	А	В	Рыночная
1	2	2,8	2,5
2	0,8	1,8	1
3	2,3	3,2	3
4	3,5	4,5	4,1
5	3,2	4,2	3,7
6	4,2	2,5	4
Итого	16	19	18,3
Средняя доходность	2,67	3,17	3,05

Решение. На основе приведенных в табл. 1 данных с помощью функций MSExcel (ОТРЕЗОК, НАКЛОН) строим уравнения регрессий для акций А и В соответственно (в качестве независимой переменной выбираем рыночную доходность), крышка указывает на тот факт, что получена оценка показателя доходности:

$$\hat{m}_A = -0{,}36 + 0{,}99 m_r, \qquad \hat{m}_B = 1{,}21 + 0{,}64 m_r.$$

Для вычисления коэффициента детерминации нужно возвести в квадрат коэффициент корреляции Пирсона, полученный применением формулы КОРРЕЛ, или же воспользоваться функцией КВПИРСОН, для расчета волатильности можно взять корень квадратный из числа, полученного с помощью функции ДИСП – дисперсии, или воспользоваться функцией СТАНДОТКЛОН.

Для вычисления ошибок коэффициентов пользуемся формулами:

стандартное отклонение коэффициента отрезка $(\alpha)^2 =$
= (сумма квадратов значений зависимой переменной ×
× квадрат стандартной ошибки регрессии) /
/ (число наблюдений × сумма квадратов отклонений от среднего);

(стандартное отклонение коэффициента наклона (β))^2 =
= (квадрат стандартной ошибки регрессии) /
/ (число наблюдений $\times$ сумма квадратов отклонений от среднего);

Функции СТОШYX, СУММКВ, КВАДРОТКЛ – стандартные статистические функции MSExcel.

Полученные результаты представим в таблице.

РЕГРЕССИОННАЯ СТАТИСТИКА:			
Показатель	**А относительно рынка**	**В относительно рынка**	
ОТРЕЗОК(α)	-0,363542418	1,21396299	
НАКЛОН (β)	0,993511175	0,640230714	
Уравнение регрессии	$\hat{m}_A = -0{,}36 + 0{,}99 m_r$	$\hat{m}_B = 1{,}21 + 0{,}64 m_r$	
Коэффициент корреляции	0,962223248	0,732816292	
Коэффициент детерминации	0,925873579	0,537019717	
Волатильность ($\sqrt{\sigma^2}$)	1,216004386	1,028915286	1,177709642
Станд.ош.регр.(СТОШYX)	0,37014907	0,782737019	
Квадрат ошибки	0,137010334	0,612677241	
Сумма квадратов значений зависимой переменной-рыночной дох.			62,75
Сумма кв.отклонений от ср.значений зависимой переменной			6,935
Квадрат ошибки коэф. α	0,206618564	0,923948495	
Ошибка коэффициента α	0,454553148	0,961222396	
Квадрат ошибки коэф. β	0,019756357	0,088345673	
Ошибка коэффициента β	0,140557308	0,29723	

Проверка значимости выборочного коэффициента корреляции может проводиться с помощью статистики Стьюдента

Шаг 1. Вычисляем наблюдаемое значение критерия (одна зависимая переменная y, x – независимая, в нашем случае имеется 2 варианта: $y = m_A, x = m_r$, $y = m_B, x = m_r$, для каждого расчёты ведутся отдельно):

$$t_{набл} = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}},\ r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sqrt{\operatorname{var}(x)\operatorname{var}(y)}}, \operatorname{var} = \sigma^2(ДИСП).$$

Здесь n –объём выборки, n=6.

Величина $t_{набл}$ имеет распределение Стьюдента с $n-2$ $(n-1-1)$ степенями свободы.

Замечание. В Excel

$r_{xy} = ПИРСОН(массив\_x; массив\_y)$

$r_{xy}^2 = КВПИРСОН(массив\_x; массив\_y)$ (коэф.детерминации)

Шаг 2. Задаём уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, подсчитываем число степеней свободы $\nu = n-2$, где n – число наблюдений, пользуемся таблицами распределения Стьюдента или функцией $t_{кр} = СТЬЮДРАСПОБР(\alpha;\nu)$. Если

$$\left|t_{набл}\right| > t_{кр},$$

То коэффициент детерминации значим на 5 %-нтном уровне.
Можно поступить иначе. Наблюдаемому (расчётному) значению критерия $t_{набл}$ соответствует значимость, определяемая в Excel функцией

$ЗНАЧИМОСТЬ\_t_{набл} = СТЬЮДРАСП(t_{набл};\nu;2)$,

Если это значение меньше 5 %, то
имеется линейная связь между переменными.

Проверка значимости коэффициента детерминации может проводиться с помощью статистики Фишера
(может использоваться, если независимых переменных $\nu_1 \geq 1$)

Шаг 1. Вычисляем наблюдаемое значение критерия (одна зависимая переменная y, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = n - \nu_1 - 1$, x – независимая, в нашем случае имеется 2 варианта: $y = m_A, x = m_r$, $y = m_B, x = m_r$, для каждого расчёты ведутся отдельно):

$$F_{набл} = \frac{r_{xy}{}^2(n - \nu_1 - 1)}{1 - r_{xy}{}^2},\ r_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{\sqrt{\mathrm{var}(x)\,\mathrm{var}(y)}},\ \mathrm{var} = \sigma^2(ДИСП).$$

Величина F имеет распределение Фишера со степенями свободы $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = n - \nu_1 - 1$. Проверяется гипотеза о том, что F=0.
Здесь n –объём выборки, n=6.

Шаг 2. Задаём уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, подсчитываем число степеней свободы $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = n - \nu_1 - 1$, где n – число наблюдений, пользуемся таблицами распределения Фишера или функцией $F_{кр} = FРАСПОБР(\alpha;\nu_1,\nu_2)$. Если

$$F > F_{кр},$$

то коэффициент детерминации значим на 5 %-нтном уровне.
Можно поступить иначе. Наблюдаемому (расчётному) значению критерия $F_{набл}$ соответствует значимость, определяемая в Excel функцией

$ЗНАЧИМОСТЬ\_F_{набл}$=FРАСП$(t_{набл};\nu_1;\nu_2)$,

Если это значение меньше 5 %, то
имеется линейная связь между переменными.

Исходные данные также можно применить для анализа в Gretl:

```
gretl: модель 1
Файл  Правка  Тесты  Сохранить  Графики  Анализ  LaTeX
Модель 1: МНК, использованы наблюдения 1-6
Зависимая переменная: v1

             Коэффициент   Ст. ошибка   t-статистика   P-значение
  ---------------------------------------------------------------
  const       -0,363542    0,454553      -0,7998        0,4686
  v3           0,993511    0,140557       7,068         0,0021    ***

Среднее зав. перемен    2,666667   Ст. откл. зав. перемен  1,216004
Сумма кв. остатков      0,548041   Ст. ошибка модели       0,370149
R-квадрат               0,925874   Испр. R-квадрат         0,907342
F(1, 4)                 49,96187   Р-значение (F)          0,002114
```

Уравнение регрессии значимо на 5%-нтном уровне значимости (с точки зрения коэффициента детерминации, поскольку вероятность незначимости, по критерию Фишера, Р-значение (F) меньше стандартного уровня значимости 0,05 (5%). Можно выполнить анализ данных (Регрессия) в MSExcel, результаты будут те же:

13	*Регрессионная статистика*	
14	Множественный R	0,962223248
15	R-квадрат	0,925873579
16	Нормированный R-квадра	0,907341974
17	Стандартная ошибка	0,37014907
18	Наблюдения	6
19		

20	Дисперсионный анализ					
21		*df*	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
22	Регрессия	1	6,845292	6,845291997	49,96186634	0,002113669
23	Остаток	4	0,548041	0,137010334		
24	Итого	5	7,393333			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*
Y-пересечение	-0,363542418	0,454553148	-0,799779782	0,468641111
Переменная X 1	0,993511175	0,140557308	7,068370841	0,002113669

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четыркин Е.М.. Финансовые риски. – М.: «ДЕЛО», 2008.*
2. *Шарп Уильям Ф., Александер Гордон Дж., Бейли Джеффри Б. Инвестиции. - Инфра-М, 2007 г., 1040 стр.*
3. *Sharpe W.F., Alexander G.J. Investments, 4-Th ed. Prentice-Hall International, Inc., 1990.*
4. *И.В. Политковская. Оценка стоимости ценных бумаг. – М.: ИЦ «Академия», 2006.*
5. *Финансовая математика: математическое моделирование финансовых операций. Под ред. В.А. Половникова, А.И. Пилипенко. – М.: ВЗФЭИ, 2007.*
6. *И.В. Орлова, В.А. Половникова. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. – М.: Вузовский учебник, 2007.*

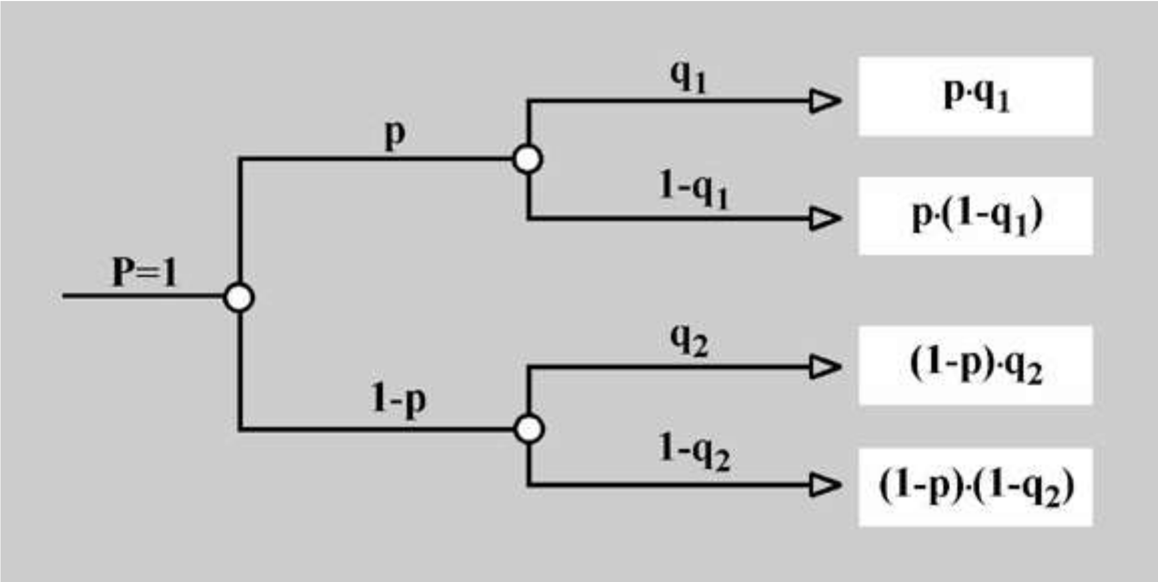
7. *П.П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. Финансовая математика. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.*
8. *С.Н. Кабушкин. Управление банковским кредитным риском. – Минск: Новое знание, 2007.*
9. *И.Ю. Выгодчикова. Процентный анализ финансовых потоков. – Саратов: изд-во СГУ, 2008.*
10. *Е.М. Четыркин. Финансовая математика. - М.: Дело, 2007.*
11. *Рынок ценных бумаг. Ред. В.А. Галанова, А.И. Басова. – М.: Финансы и статистика, 2006.*
12. *М. Хаертфельдер, Е. Лозовская, Е. Хануш. Фундаментальный и технический анализ рынка ценных бумаг. Изд. Дом «Питер», 2005.*
13. И.Ю. Выгодчикова. Наилучшее приближение динамики экономических показателей фундаментального и технического анализа рынка ценных бумаг алгебраическими полиномами. Изд-во Саратовского ун-та, 2007.
14. И.Ю. Выгодчикова. Оценка доходности финансовых активов Изд-во Сарат. ун-та, 2009.
15. И.Ю. Выгодчикова, Е.Г. Носова. Математические методы финансового анализа (брошюра). Изд-во СГСЭУ, 2010 г, 96 с.
16. *Бабешко Л.О. Основы эконометрического моделирования. – М.: КомКнига, 2006 г. – 432 с.*
17. *Выгодчикова И.Ю. , Трошина Н.Ю. Финансовая математика: процентный анализ. - Саратов: изд-во СГУ, 2003.*
18. *Выгодчикова И.Ю. Наилучшее приближение динамики экономических показателей фундаментального и технического анализа рынка ценных бумаг алгебраическими полиномами. Изд-во Саратовского ун-та, 2007.*
19. *Дудов С.И.* Оптимальное портфельное инвестирование. Саратов, 2008.
20. *Ковалёв В.В. Управление активами фирмы. – М.: «Издательство Проспект», 2007, 392 с.*
21. *Куфель Тадеуш. Эконометрика. Решение задач с применением пакета программ GRETL. М., 2007*
22. *Савицкая Г.В. Экономический анализ: Учебник. – 11 изд., испр. и доп. – М.: Новое знание, 2006. – С. 378.*
23. *Касимов Ю.Ф. Введение в теорию оптимального портфеля ценных бумаг. – М.: «Анкил», 2005.*
24. *Хорн Дж. Основы управления финансами. М., 2004.*
25. *Федеральные законы «О рынке ценных бумаг» (от 22 апреля 1996 г. № 39-ФЗ, ред. от 15 апреля 2006 г.), «Об акционерных обществах» (от 26 дек. 1995 г. № 208-ФЗ, ред. от 21 марта 2002 г.), «Об оценочной деятельности в РФ» (от 29 июля 1998 г. № 135-ФЗ, ред. от 22 авг. 2004 г.), «Об инвестиционной деятельности в РФ,*

осуществляемой в форме капитальных вложений» (от 25 февраля 1999 г. № 39-ФЗ).

ПРИЛОЖЕНИЕ. АНАЛИЗ РИСКОВОЙ СИТУАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДЕРЕВА РЕШЕНИЙ

В зарубежной практике в качестве метода количественного определения риска вложения капитала предлагается использовать дерево вероятностей.

Каждая ветка представляет собой отдельный сценарий развития событий с данной вероятностью (дополнительные условия и ограничения увеличивают число ветвей):



Здесь p – исходные вероятности, q – условные вероятности, pq, p(1-q), (1-p)(1-q) – совместные вероятности.

Этот метод позволяет точно определить вероятные будущие денежные потоки инвестиционного проекта в их связи с результатами предыдущих периодов времени. Если проект вложения капитала приемлем в первом периоде времени, то он может быть также приемлем и в последующих периодах времени.

Схема «дерево решений» очень похожа на схему «дерево вероятностей». Ее используют, когда нужно принять несколько решений в условиях неопределенности, когда каждое решение зависит от исхода предыдущего или исходов испытаний. Составляя "дерево" решений, нужно нарисовать "ствол" и "ветви", отображающие структуру проблемы. Располагаются "деревья" слева направо. "Ветви" обозначают возможные альтернативные решения, которые могут быть приняты, и возможные исходы, возникающие в результате этих решений. На схеме мы используем два вида "ветвей": первый - пунктирные линии, соединяющие квадраты возможных решений, второй - сплошные линии, соединяющие кружки возможных исходов. Квадратные "узлы" обозначают места, где принимается решение, круглые "узлы" - появление исходов.

Так как принимающий решение не может влиять на появление исходов, ему остается лишь вычислять вероятность их появления. Когда все решения и их исходы указаны на "дереве", просчитывается каждый из вариантов, и в конце проставляется его денежный доход. Все расходы, вызванные решением, проставляются на соответствующей "ветви".

Пример. Для финансирования проекта бизнесмену нужно занять сроком на один год 15000 ф. ст. Банк может одолжить ему эти деньги под 15% годовых или вложить в дело со 100%-ным возвратом суммы, но под 9% годовых. Из прошлого опыта банкиру известно, что 4% таких клиентов ссуду не возвращают. Что делать? Давать ему заем или нет? Перед вами пример задачи с одним решением, поэтому можно воспользоваться как таблицей доходов, так и "деревом". Рассмотрим оба варианта.

Решение 1 (по таблице доходов).

Максимизируем ожидаемый в конце года чистый доход, который представляет собой разность суммы, полученной в конце года, и инвестированной в его начале. Таким образом, если заем был выдан и возвращен, то чистый доход составит:

Чистый доход = ((15000 + 15% от 15000) - 15000) = 2250 ф. ст.

15 000*9% = 1350 ф. ст.

Таблица 1. Чистый доход в конце года, ф. ст.

Возможные исходы	Возможные решения		Вероятность
	Выдавать заем	Не выдавать (инвестировать)	
Клиент заем возвращает	2250	1350	0,96
Клиент заем не возвращает	-15000	1350	0,04
Ожидаемый чистый доход	1560	1350	

Заметим, 1560=2250*0,06-15000*0,04.

Если банк решает выдать заем, то максимальный ожидаемый чистый доход равен 1560 ф. ст.

Решение 2 (по "дереву" решений).

В данном случае также используем критерий максимизации ожидаемого чистого дохода на конец года. Изобразим «дерево» решений:

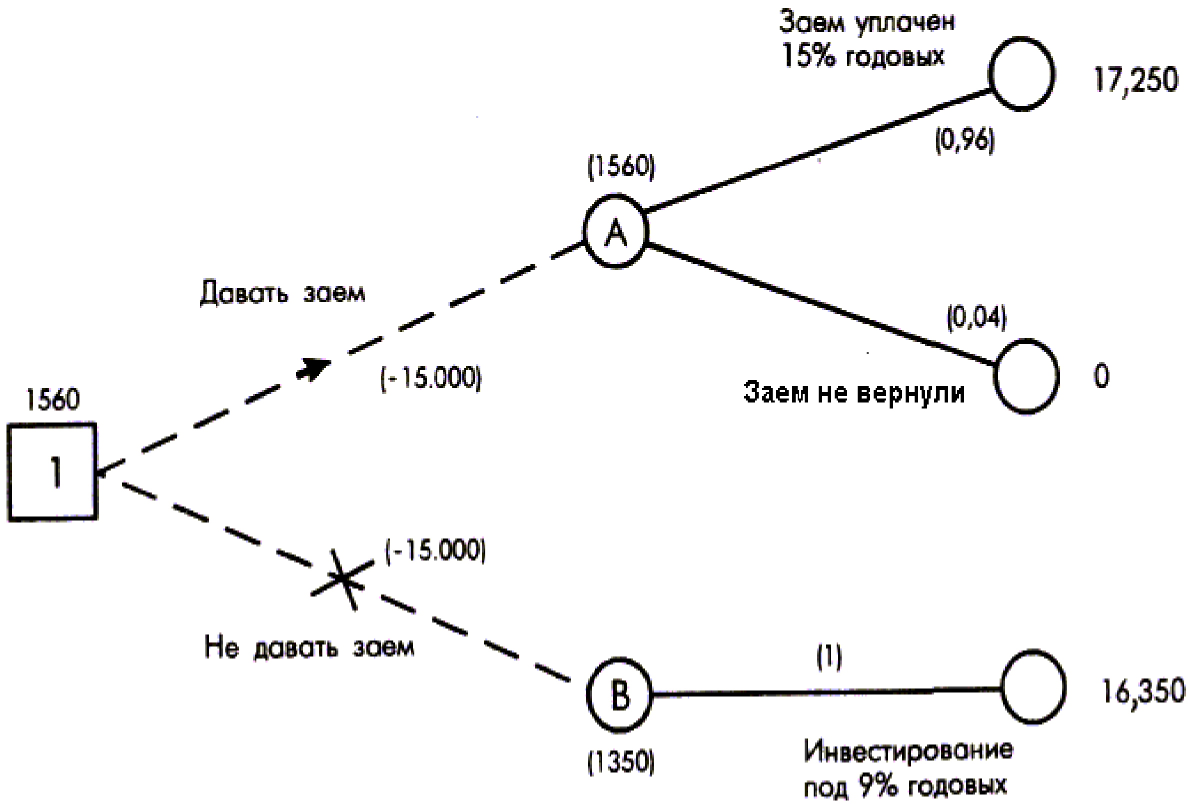


Рис. "Дерево" решений для примера.

Далее расчет ведется аналогично расчетам по таблице доходов. Ожидаемый чистый доход (математическое ожидание обозначаем символом Е) в кружках А и В вычисляется следующим образом:
В кружке А:
Е(доходы/давать заем) = {17250*0,96+0*0,04}-15000=16560-15000=1560ф.ст.
В кружке Б

Е(доходы/не давать заем) = {16350*1,0 - 15000} = 1350 ф. ст. Поскольку ожидаемый чистый доход больше в кружке А, то принимаем решение выдать заем.

Однако такой подход не вполне обоснован, поскольку существует риск потерь предоставленного займа. Если в качестве рискового показателя использовать среднеквадратическое отклонение, или коэффициент вариации, то для первого случая (А) риск составит $\sqrt{(17250-16560)^2 0{,}96+(0-16560)^2 0{,}04}=690$, коэффициент вариации составляет 690/16560*100%=4,2%, в рассматриваемом случае он практически совпадает с вероятностью невозврата займа (4%). Для второго случая (В) риск потерь, по условию, отсутствует. В реальной практике, конечно, безрисковых ситуаций не бывает, и говоря о том, что риск «отсутствует», подразумевают, что «риск ничтожно мал».